# Bất đẳng thức thuần nhất

## 1. Mở đầu

Hầu hết các bất đẳng thức cổ điển (Cauchy, Bunhiacopsky, Holder, Minkowsky, Chebysev ...) đều là các bất đẳng thức thuần nhất. Điều này hoàn toàn không ngẫu nhiên. Về logích, có thể nói rằng, chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh với nhau một cách toàn cục được.

Chính vì thế, bất đẳng thức thuần nhất chiếm một tỷ lệ rất cao trong các bài toán bất đẳng thức, đặc biệt là bất đẳng thức đại số (khi các hàm số là hàm đại số, có bậc hữu hạn). Đối với các hàm giải tích (mũ, lượng giác, logarith), các bất đẳng thức cũng được coi là thuần nhất vì các hàm số có bậc $\infty$ (theo công thức Taylor).

Trong bài này, chúng ta sẽ đề cập tới các phương pháp cơ bản để chứng minh bất đẳng thức thuần nhất, cũng như cách chuyển từ một bất đẳng thức không thuần nhất về một bất đẳng thức thuần nhất. Nắm vững và vận dụng nhuần nhuyễn các phương pháp này, chúng ta có thể chứng minh được hầu hết các bất đẳng thức sơ cấp.

## 2. Bất đẳng thức thuần nhất

Hàm số $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ của các biến số thực $x_1, x_2, \ldots, x_n$ được là hàm thuần nhất bậc $\alpha$ nếu với mọi số thực $t$ ta có

$$f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Bất đẳng thức dạng

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0$$

với $f$ là một hàm thuần nhất được gọi là bất đẳng thức thuần nhất (bậc $\alpha$).

Ví dụ các bất đẳng thức Cauchy, bất đẳng thức Bunhiacopsky, bất đẳng thức Chebyshev là các bất đẳng thức thuần nhất. Bất đẳng thức Bernoulli, bất đẳng thức $\sin x < x$ với $x > 0$ là các bất đẳng thức không thuần nhất.

## 3. Chứng minh bất đẳng thức thuần nhất

### 3.1. Phương pháp dồn biến

Đặc điểm của nhiều bất đẳng thức, đặc biệt là các bất đẳng thức đại số là dấu bằng xảy ra khi tất cả hoặc một vài biến số bằng nhau (xuất phát từ bất đẳng thức cơ bản $x^2 \geq 0$!). Phương pháp dồn biến dựa vào đặc điểm này để làm giảm số biến số của bất đẳng thức, đưa bất đẳng thức về dạng đơn giản hơn có thể chứng minh trực tiếp bằng cách khảo sát hàm một biến hoặc chứng minh bằng quy nạp.

Để chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (1)$$

Ta có thể thử chứng minh

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f((x_1+x_2)/2, (x_1+x_2)/2, \ldots, x_n) \qquad (2)$$

hoặc

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq f(\sqrt{x_1x_2}, \sqrt{x_1x_2}, \ldots, x_n) \qquad (3)$$

Sau đó chuyển việc chứng minh (1) về việc chứng minh bất đẳng thức

$$f(x_1, x_1, x_3, \ldots, x_n) = g(x_1, x_3, \ldots, x_n) \geq 0 \qquad (4)$$

tức là một bất đẳng thức có số biến ít hơn. Dĩ nhiên, các bất đẳng thức (2), (3) có thể không đúng hoặc chỉ đúng trong một số điều kiện nào đó. Vì ta chỉ thay đổi 2 biến số nên thông thường thì tính đúng đắn của bất đẳng thức này có thể kiểm tra được dễ dàng.

Ví dụ 1: Cho a, b, c > 0. Chứng minh bất đẳng thức

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \geq a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b$$

Giải: Xét hàm số $f(a, b, c) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b)$

Ta có

$f(a, b, c) - f(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = a^3 + b^3 + c^3 + 3abc - (a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b) - a^3 - (b+c)^3/4 - 3a(b+c)^2/4 + a^2(b+c) + a(b+c)^2/2 + (b+c)^3/4 = (b+c-5a/4)(b-c)^2$.

Do đó, nếu $a = \min\{a, b, c\}$ (điều này luôn có thể giả sử) thì ta có

$f(a, b, c) \geq f(a, (b+c)/2, (b+c)/2)$

Như vậy, để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh $f(a, b, b) \geq 0$. Nhưng bất đẳng thức này tương đương với

$$a^3 + 2b^3 + 3ab^2 - (a^2b + a^2b + b^2a + b^3 + b^2a + b^3) \geq 0$$

ó $\quad a^3 + ab^2 - 2a^2b \geq 0$

ó $\quad a(a-b)^2 \geq 0$.

Ví dụ 2: Cho a, b, c là các số thực bất kỳ. Chứng minh rằng

$$F(a,b,c) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - (4/7)(a^4+b^4+c^4) \geq 0$$

(Đề thi chọn đội tuyển Việt Nam 1996)

Giải: Ta có

$F(a, b, c) - F(a, (b+c)/2, (b+c)/2) = (a+b)^4 + (b+c)^4 + (c+a)^4 - (4/7)(a^4+b^4+c^4) - 2(a+(b+c)/2)^4 - (b+c)^4 + (4/7)(a^4+2((b+c)/2)^4) = (a+b)^4 + (c+a)^4 - 2(a+(b+c)/2)^4 + c(4/7)((b+c)^4/8 - b^4 - c^4) = a(4b^3+4c^3-(b+c)^3) + 3a^2(2b^2+c^2-(b+c)^2) + (3/7)(b^4+c^4-(b+c)^4/8) = 3a(b+c)(b-c)^2 + 3a^2(b-c)^2 + (3/56)(b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc] = 3a(a+b+c)(b-c)^2 + (3/56)(b-c)^2[7b^2+7c^2+10bc]$.

Số hạng cuối cùng luôn không âm. Nếu a, b, c cùng dấu thì bất đẳng thức cần chứng minh là hiển nhiên. Nếu a, b, c không cùng dấu thì phải có ít nhất 1 trong ba số a, b, c cùng dấu với a+b+c. Không mất tính tổng quát, giả sử đó là a. Từ đẳng thức trên suy ra $F(a, b, c) \geq F(a, (b+c)/2, (b+c)/2)$. Như vậy ta chỉ còn cần chứng minh:

$F(a, b, b) \geq 0$ với mọi a, b, hay là

$$2(a+b)^4 + (2b)^4 - (4/7)(a^4+2b^4) \geq 0$$

Nếu b = 0 thì bất đẳng thức là hiển nhiên. Nếu $b \neq 0$, chia hai vế của bất đẳng thức cho $b^4$ rồi đặt $x = a/b$ thì ta được bất đẳng thức tương đương

$$2(x+1)^4 + 16 - (4/7)(x^4+2) \geq 0$$

Bất đẳng thức cuối cùng có thể chứng minh như sau

Xét $\quad f(x) = 2(x+1)^4 + 16 - (4/7)(x^4+2)$

Ta có $f'(x) = 8(x+1)^3 - (16/7)x^3$. $f'(x) = 0$ ó $x+1 = (2/7)^{1/3}x$ ó $x = -2.9294$.

$f_{min} = f(-2.9294) = 2(-1.9294)^4 + 16 - (4/7)(-2.9294)^4 - 8/7 = 0.4924$

(Các phần tính toán cuối được tính với độ chính xác tới 4 chữ số sau dấu phẩy. Do $f_{min}$ tính được là 0.4924 nên nếu tính cả sai số tuyệt đối thì giá trị chính xác của $f_{min}$ vẫn là một số dương. Vì đây là một bất đẳng thức rất chặt nên không thể tránh được các tính toán với số lẻ trên đây. Chẳng hạn nếu thay 4/7 bằng 16/27 để $x_{min} = -3$ thì $f^*_{min}$ có giá trị âm! Ở đây $f^*(x) = 2(x+1)^4 + 16 - (16/27)x^4 - 8/7$.)

**3.2. Phương pháp chuẩn hóa**

Dạng thường gặp của bất đẳng thức thuần nhất là

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

trong đó f và g là hai hàm thuần nhất cùng bậc. Do tính chất của hàm thuần nhất, ta có thể chuyển việc chứng minh bất đẳng thức trên về việc chứng minh bất đẳng thức $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq A$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = A$. Chuẩn hóa một cách thích hợp, ta có thể làm đơn giản các biểu thức của bất đẳng thức cần chứng minh, tận dụng được một số tính chất đặc biệt của các hằng số.

Ví dụ :

Cho bộ n số thực dương $(x) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Với mỗi số thực r ta đặt

$$M_r(x) = [(x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r)/n]^{1/r}$$

Chứng minh rằng với mọi r>s>0 ta có $M_r(x) \geq M_s(x)$.

(Bất đẳng thức về trung bình lũy thừa)

Giải: Vì $M_r(tx) = tM_r(x)$ với mọi t>0 nên ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức đúng cho các số thực dương $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$, tức là cần chứng minh $M_r(x) \geq 1$ với mọi $x_1, x_2, \ldots, x_n$ thoả mãn điều kiện $M_s(x) = 1$. Điều này có thể viết đơn giản lại là

Chứng minh $x_1^r + x_2^r + \ldots + x_n^r \geq n$ với $x_1^s + x_2^s + \ldots + x_n^s = n$.

Để chứng minh bất đẳng thức cuối cùng, ta áp dụng bất đẳng thức Bernoulli:

$$x_i^r = (x_i^s)^{r/s} = [1 + (x_i^s-1)]^{r/s} \geq 1 + (r/s)(x_i^s-1),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Cộng các bất đẳng thức trên lại, ta được điều phải chứng minh.

Ví dụ 4: Chứng minh rằng với x, y, z là các số thực bất kỳ ta có bất đẳng thức

$$6(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) \leq 27xyz + 10(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

(Đề thi Học sinh giỏi quốc gia năm 2002)

Giải: Bất đẳng thức này rất cồng kềnh. Nếu thức hiện phép biến đổi trực tiếp sẽ rất khó khăn (ví dụ thử bình phương để khử căn). Ta thực hiện phép chuẩn hóa để đơn giản hóa bất đẳng thức đã cho. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ thì $x= y = z = 0$, bất đẳng thức trở thành đẳng thức. Nếu $x^2 + y^2 + z^2 > 0$, do bất đẳng thức đã cho là thuần nhất, ta có thể giả sử $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Ta cần chứng minh $2(x+y+z) \leq xyz + 10$ với điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 9$. Để chứng minh điều này, ta chỉ cần chứng minh

$$[2(x+y+z) - xyz]^2 \leq 100$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $|x| \leq |y| \leq |z|$. Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacopsky, ta có

$[2(x+y+z) - xyz]^2 = [(x+y)^2 + z(2-xy)]^2 \leq [(x+y)^2 + z^2][2^2+(2-xy)^2] = (9+2xy)(8-4xy+x^2y^2) = 72 - 20xy + x^2y^2 + 2x^3y^3 = 100 + (xy+2)^2(2xy-7)$.

Từ $|x| \leq |y| \leq |z|$ suy ra $z^2 \geq 3$. Suy ra $2xy \leq x^2 + y^2 \leq 6$, tức là $(xy+2)^2(2xy-7) \leq 0$. Từ đây, kết hợp với đánh giá trên đây ta được điều cần chứng minh. Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $(x+y)/2 = z/(2-xy)$ và $xy+2 = 0$. Từ đây giải ra được $x = -1, y = 2, z = 2$.

Kỹ thuật chuẩn hóa cho phép chúng ta biến một bất đẳng thức phức tạp thành một bất đẳng thức có dạng đơn giản hơn. Điều này giúp ta có thể áp dụng các biến đổi đại số một cách dễ dàng hơn, thay vì phải làm việc với các biểu thức cồng kềnh ban đầu. Đặc biệt, sau khi chuẩn hóa xong, ta vẫn có thể áp dụng phương pháp dồn biến để giải. Ta đưa ra lời giải thứ hai cho bài toán trên:

Đặt $f(x, y, z) = 2(x+y+z) - xyz$. Ta cần chứng minh $f(x, y, z) \leq 10$ với $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

Xét $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) - f(x, y, z) = 2(x + 2\sqrt{(y^2+z^2)/2}) - x(y^2+z^2)/2 - 2(x+y+z) + xyz = 2(\sqrt{2(y^2+z^2)} - y - z) - x(y-z)^2/2 = (y-z)^2[2/(\sqrt{2(y^2+z^2)} + y + z) - x/2]$.

+ Nếu x, y, z > 0, ta xét hai trường hợp:

- $1 \leq x \leq y \leq z$. Khi đó $2(x+y+z) - xyz \leq 2\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)} - 1 = 6\sqrt{3} - 1 < 10$

- $0 < x \le 1$. Khi đó $2(x+y+z) - xyz < 2(x+y+z) \le 2x + 2\sqrt{2(y^2+z^2)} = 2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} = g(x)$. Ta có $g'(x) = 2 - 2\sqrt{2}x/\sqrt{9-x^2} > 0$, suy ra $g(x) \le g(1) = 10$.

+ Nếu trong 3 số x, y ,z có một số âm, không mất tính tổng quát, có thể giả sử $x < 0$. Khi đó $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) - f(x, y, z) \ge 0$ và ta đưa bài toán việc chứng minh $f(x, \sqrt{(y^2+z^2)/2}, \sqrt{(y^2+z^2)/2}) \le 10$, hay

$$2x + 2\sqrt{2(9-x^2)} - x(9-x^2)/2 \le 10$$

$$\Leftrightarrow \quad h(x) = x^3 - 5x + 4\sqrt{2(9-x^2)} \le 20.$$

Ta có: $h'(x) = 3x^2 - 5 - 4x\sqrt{2}/\sqrt{(9-x^2)}$. Giải phương trình $h'(x) = 0$ (với $x < 0$), ta được $x = -1$. Đây là điểm cực đại của h, do đó $h(x) \le h(-1) = 20$.

Bằng cách chuẩn hóa, ta có thể đưa một bài toán bất đẳng thức về bài toán tìm giá trị lớn nhất hay nhỏ nhất của một hàm số trên một miền (chẳng hạn trên hình cầu $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ như ở ví dụ 4). Điều này cho phép chúng ta vận dụng được một số kỹ thuật tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất (ví dụ như bất đẳng thức Jensen, hàm lồi ...)

<u>Ví dụ 5:</u> Cho a, b, c là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$(b+c-a)^2/[(b+c)^2+a^2] + (c+a-b)^2/[(c+a)^2+b^2] + (a+b-c)^2/[(a+b)^2+c^2] \ge 3/5$$

<u>Giải:</u> Ta chỉ cần chứng minh bất đẳng thức cho các số dương a, b, c thoả $a+b+c=1$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$(1-2a)^2/(2a^2-2a+1) + (1-2b)^2/(2b^2-2b+1) + (1-2c)^2/(2c^2-2c+1) \ge 3/5$$

$$\Leftrightarrow \quad 1/(2a^2-2a+1) + 1/(2b^2-2b+1) + 1/(2c^2-2c+1) \le 27/5$$

$$\Leftrightarrow \quad f(a) + f(b) + f(c) \le 27/5 \text{ với } f(x) = 1/(2x^2-2x+1) \qquad (5.1)$$

Để ý rằng $27/5 = 3f(1/3)$, ta thấy (5.1) có dạng bất đẳng thức Jensen. Tuy nhiên, tính đạo hàm bậc hai của f(x), ta có

$$f''(x) = -4(6x^2 - 6x + 1)/(2x^2-2x+1)^3$$

hàm chỉ lồi trên khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$ nên không thể áp dụng bất đẳng thức Jensen một cách trực tiếp. Ta chứng minh $f(a) + f(b) + f(c) \le 27/5$ bằng các nhận xét bổ sung sau:

$f_{max} = f(1/2) = 2$

f(x) tăng trên (0, 1/2) và giảm trên (1/2, 1)

$f((3 - \sqrt{3})/6) = f((3 + \sqrt{3})/6) = 12/7$

Nếu có ít nhất 2 trong 3 số a, b, c nằm trong khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$, chẳng hạn là a, b thì áp dụng bất đẳng thức Jensen ta có

$$f(a) + f(b) \le 2f((a+b)/2) = 2f((1-c)/2) = 4/(c^2+1)$$

Như vậy trong trường hợp này ta chỉ cần chứng minh

$$1/(2c^2-2c+1) + 4/(1+c^2) \le 27/5$$

Quy đồng mẫu số và rút gọn ta được bất đẳng thức tương đương

$$27c^4 - 27c^3 + 18c^2 - 7c + 1 \ge 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (3c-1)^2(3c^2 - c + 1) \ge 0 \text{ (đúng).}$$

Như vậy ta chỉ còn cần xét trường hợp có ít nhất hai số nằm ngoài khoảng $((3 - \sqrt{3})/6, (3 + \sqrt{3})/6)$. Nếu chẳng hạn $a \ge (3 + \sqrt{3})/6)$ thì rõ ràng $b, c \le (3 - \sqrt{3})/6$ và như vậy, do nhận xét trên $f(a) + f(b) + f(c) \le 36/7 < 27/5$. Ta chỉ còn duy nhất một trường hợp cần xét là có hai số, chẳng hạn $a, b \le (3 - \sqrt{3})/6$. Lúc này, do $a + b \le 1 - \sqrt{3}/3$ nên $c \ge \sqrt{3}/3 > 1/2$. Theo các nhận xét trên ta có $f(a) + f(b) + f(c) \le 2f((3 - \sqrt{3})/6) + f(\sqrt{3}/3) = 24/7 + (15+6\sqrt{3})/13 \sim 5.381 < 5.4 = 27/5$.

<u>Ghi chú:</u> Bài toán trên có một cách giải ngắn gọn và độc đáo hơn như sau:

Bất đẳng thức có thể viết lại thành

$$(b+c)a/[(b+c)^2+a^2] + (c+a)b/[(c+a)^2+b^2] + (a+b)c/[(a+b)^2+c^2] \le 6/5$$

Không mất tính tổng quát, có thể giả sử $a + b + c = 1$. Khi đó bất đẳng thức viết lại thành

$$(1-a)a/(1-2a+2a^2) + (1-b)b/(1-2b+2b^2) + (1-c)c/(1-2c+2c^2) \le 6/5$$

Ta có $2a(1-a) \le (a+1)^2/4$. Do đó $1 - 2a + 2a^2 \ge 1 - (a+1)^2/4 = (1-a)(3+a)/4$.
Từ đó $(1-a)a/(1-2a+2a^2) \le (1-a)a/[(1-a)(3+a)/4] = 4a/(3+a)$.
Tương tự $(1-b)b/(1-2b+2b^2) \le 4b/(3+b)$, $(1-c)c/(1-2c+2c^2) \le 4c/(3+c)$
Và để chứng minh bất đẳng thức đầu bài, ta chỉ cần chứng minh

$$4a/(3+a) + 4b/(3+c) + 4c/(3+c) \le 6/5$$

Bất đẳng thức cuối cùng này tương đương với

$$1/(3+a) + 1/(3+b) + 1/(3+c) \ge 9/10$$ là hiển nhiên (Áp dụng BĐT Cauchy)

Chuẩn hóa là một kỹ thuật cơ bản. Tuy nhiên, kỹ thuật đó cũng đòi hỏi những kinh nghiệm và độ tinh tế nhất định. Trong ví dụ trên, tại sao ta lại chuẩn hóa $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ mà không phải là $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (tự nhiên hơn)? Và ta có đạt được những hiệu quả mong muốn không nếu như chuẩn hóa $x+y+z = 1$? Đó là những vấn đề mà chúng ta phải suy nghĩ trước khi thực hiện bước chuẩn hóa.

### 3.3. Phương pháp trọng số

Bất đẳng thức Cauchy và bất đẳng thức Bunhiacopsky là những bất đẳng thức thuần nhất. Vì thế, chúng rất hữu hiệu trong việc chứng minh các bất đẳng thức thuần nhất. Tuy nhiên, do điều kiện xảy ra dấu bằng của các bất đẳng thức này rất nghiêm ngặt nên việc áp dụng một cách trực tiếp và máy móc đôi khi khó đem lại kết quả. Để áp dụng tốt các bất đẳng thức này, chúng ta phải nghiên cứu kỹ điều kiện xảy ra dấu bằng và áp dụng phương pháp trọng số.

Ví dụ 5: Chứng minh rằng nếu x, y, z là các số thực không âm thì

$$6(-x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) + 27xyz \le 10(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$$

Giải: Sử dụng nguyên lý cơ bản « dấu bằng xảy ra khi một cặp biến số nào đó bằng nhau », ta có thể tìm ta được dấu bằng của bất đẳng thức trên xảy ra khi $y = z = 2x$. Điều này cho phép chúng ta mạnh dạn đánh giá như sau

$$10(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} - 6(-x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2) =$$
$$(x^2+y^2+z^2)[10(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} - 6(-x + y + z)] = (x^2+y^2+z^2)[(10/3)(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}(1+2^2+2^2)^{1/2} - 6(-x + y + z)] \ge (x^2+y^2+z^2)[(10/3)(x+2y+2z) - 6(-x + y + z)]$$
$$= (x^2+y^2+z^2)(28x + 2y + 2z)/3. \qquad (5.1)$$

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy, ta có

$$x^2+y^2+z^2 = x^2 + y^2/4 + y^2/4 + y^2/4 + y^2/4 + z^2/4 + z^2/4 + z^2/4 + z^2/4 \ge 9(x^2y^8z^8/4^8)^{1/9}$$
$$28x + 2y + 2z = 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 4x + 2y + 2z \ge 9(4^8x^7yz)^{1/9}$$

Nhân hai bất đẳng thức trên vế theo vế, ta được

$$(x^2+y^2+z^2)(28x + 2y + 2z) \ge 9(x^2y^8z^8/4^8)^{1/9}9(4^8x^7yz)^{1/9} = 81 \qquad (5.2)$$

Từ (5.1) và (5.2) ta suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã sử dụng cả bất đẳng thức Bunhiacopsky và bất đẳng thức Cauchy có trọng số. Lời giải rất hiệu quả và ấn tượng. Tuy nhiên, sự thành công của lời giải trên nằm ở hai dòng ngắn ngủi ở đầu. Không có được « dự đoán » đó, khó có thể thu được kết quả mong muốn. Dưới đây ta sẽ xét một ví dụ về việc chọn các trọng số thích hợp bằng phương pháp hệ số bất định để các điều kiện xảy ra dấu bằng được thoả mãn.

Ví dụ 6: Chứng minh rằng nều $0 \le x \le y$ thì ta có bất đẳng thức

$$13x(y^2-x^2)^{1/2} + 9x(y^2+x^2)^{1/2} \le 16y^2 \qquad (6.1)$$

Giải: Ta sẽ áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho các tích ở vế trái. Tuy nhiên, nếu áp dụng một cách trực tiếp thì ta được

$$VT \le 13(x^2 + y^2-x^2)/2 + 9(x^2+ y^2+x^2)/2 = 9x^2 + 11y^2 \qquad (6.2)$$

Đây không phải là điều mà ta cần (Từ đây chỉ có thể suy ra $VT \le 20y^2$). Sở dĩ ta không thu được đánh giá cần thiết là vì dấu bằng không thể đồng thời xảy ra ở hai lần áp dụng bất đẳng thức Cauchy. Để điều chỉnh, ta đưa vào các hệ số dương a, b như sau :

$$VT = (13/a)ax.(y^2-x^2)^{1/2} + (9/b)bx(y^2+x^2)^{1/2}$$
$$\le (13/2a)(a^2x^2+y^2-x^2) + (9/2b)(b^2x^2+ y^2+x^2) \qquad (6.3)$$

Đánh giá trên đúng với mọi $a, b > 0$ (chẳng hạn với $a=b=1$ ta được 6.2) và ta sẽ phải chọn a, b sao cho

a) Vế phải không phụ thuộc vào x

b) Dấu bằng có thể đồng thời xảy ra ở hai bất đẳng thức

Yêu cầu này tương đương với hệ

$$13(a^2-1)/2a + 9(b^2+1)/2b = 0$$
$$\exists\, x,y :\ a^2x^2 = y^2-x^2,\ b^2x^2 = y^2+x^2$$

Tức là có hệ $13(a^2-1)/2a + 9(b^2+1)/2b = 0$, $a^2+1 = b^2 - 1$. Giải hệ ra, ta được $a = 1/2$, $b = 3/2$. Thay hai giá trị này vào (6.3) ta được

$$VT \le 13(x^2/4 + y^2 - x^2) + 3(9x^2/4 + y^2 + x^2) = 16y^2.$$

Ghi chú: Trong ví dụ trên, thực chất ta đã cố định y và tìm giá trị lớn nhất của vế trái khi x thay đổi trong đoạn $[0, y]$.

**4. Bất đẳng thức thuần nhất đối xứng**

Khi gặp các bất đẳng thức dạng đa thức thuần nhất đối xứng, ngoài các phương pháp trên, ta còn có thể sử dụng phương pháp khai triển trực tiếp và dụng định lý về nhóm các số hạng. Phương pháp này cồng kềnh, không thật đẹp nhưng đôi lúc tỏ ra khá hiệu quả. Khi sử dụng bằng phương pháp này, chúng ta thường dùng các ký hiệu quy ước sau để đơn giản hóa cách viết:

$$\Sigma_{sym}Q(x_1, x_2, ..., x_n) = \Sigma_\sigma Q(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, ..., x_{\sigma(n)})$$

trong đó σ chạy qua tất cả các hoán vị của $\{1, 2, ..., n\}$. Ví dụ với $n = 3$ và ba biến số x, y, z thì

$\Sigma_{sym} x^3 = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3$, $\Sigma_{sym}x^2y = x^2y + y^2z + z^2x + xy^2 + yz^2 + zx^2$, $\Sigma_{sym} xyz = 6xyz$.

Đối với các biểu thức không hoàn toàn đối xứng, ta có thể sử dụng ký hiệu hoán vị vòng quanh như sau: $\Sigma_{cyclic} x^2y = x^2y + y^2z + z^2x$.

Phương pháp này được xây dựng dựa trên tính so sánh được của một số tổng đối xứng cùng bậc - định lý về nhóm các số hạng (hệ quả của bất đẳng thức Karamata) mà chúng ta sẽ phát biểu và chứng minh dưới đây. Trong trường hợp 3 biến, ta còn có đẳng thức Schur.

Nếu $s = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ và $t = (t_1, t_2, ..., t_n)$ là hai dãy số không tăng. Ta nói rằng s là *trội* của t nếu $s_1 + s_2 + ... + s_2 = t_1 + t_2 + ...+t_n$ và $s_1 + ...+ s_i \ge t_1 + ...+ t_i$ với mọi $i=1,2, ..., n$.

**Định lý:** (« Nhóm ») Nếu s và t là các dãy số thực không âm sao cho s là trội của t thì

$$\Sigma_{sym}x_1^{s1}...x_n^{sn} \ge \Sigma_{sym}x_1^{t1}...x_n^{tn}$$

Chứng minh: Đầu tiên ta chứng minh rằng nếu s là *trội* của t thì tồn tại các hằng số không âm $k_\sigma$, với σ chạy qua tập hợp tất cả các hoán vị của {1, 2, ..., n}, có tổng bằng 1 sao cho

$$\Sigma_\sigma k_\sigma(s_{\sigma 1},\dots,s_{\sigma n}) = (t_1, t_2, \dots, t_n)$$

Sau đó, áp dụng bất đẳng thức Cauchy như sau

$$\Sigma_\sigma x_1^{s\sigma(1)}\dots x_n^{s\sigma(n)} = \Sigma_{\sigma,\tau} k_\tau x_1^{s\sigma(\tau(1))}\dots x_n^{s\sigma(\tau(n))} \geq \Sigma_\sigma x_1^{t\sigma(1)}\dots x_n^{t\sigma(n)}.$$

Ví dụ, với s = (5, 2, 1) và t = (3, 3, 2), ta có

$$(3,3,2) = (3/8)*(5, 2, 1) + (3/8)*(2, 5, 1) + (1/8)*(2,1,5) + (1/8)*(1,2,5)$$

Và ta có đánh giá

$$(3x^5y^2z + 3x^2y^5z+x^2yz^5+xy^2z^5)/8 \geq x^3y^3z^2$$

Cộng bất đẳng thức trên và các bất đẳng thức tương tự, ta thu được bất đẳng thức $\Sigma_{sym}x^5y^2z \geq \Sigma_{sym}x^3y^3z^2$.

Ví dụ 7: Chứng minh rằng với mọi số thực dương a, b, c ta có

$$1/(a^3+b^3+abc) + 1/(b^3+c^3+abc) + 1/(c^3+a^3+abc) \leq 1/abc$$

Giải: Quy đồng mẫu số và nhân hai vế cho 2, ta có

$$\Sigma_{sym}(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)abc \leq 2(a^3+b^3+abc)(b^3+c^3+abc)(c^3+a^3+abc)$$

$$\Leftrightarrow \quad \Sigma_{sym}\, a^7bc+3a^4b^4c+4a^5b^2c^2+a^3b^3c^3 \leq \Sigma_{sym}a^3b^3c^3+2a^6b^3+3a^4b^4c+2a^5b^2c^2 + a^7bc$$

$$\Leftrightarrow \quad \Sigma_{sym}2a^6b^3 - 2a^5b^2c^2 \geq 0,$$

Bất đẳng thức này đúng theo định lý nhóm.

Trong ví dụ trên, chúng ta đã gặp may vì sau khi thực hiện các phép biến đổi đại số, ta thu được một bất đẳng thức tương đối đơn giản, có thể áp dụng trực tiếp định lý nhóm. Tuy nhiên, không phải trường hợp nào định lý này cũng đủ để giải quyết vấn đề. Trong trường hợp 3 biến số, ta có một kết quả rất đẹp khác là định lý Schur.

**Định lý:** (Schur). Cho x, y, z là các số thực không âm. Khi đó với mọi r > 0,

$$x^r(x-y)(x-z) + y^r(y-z)(y-x) + z^r(z-x)(z-y) \geq 0.$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi x = y = z hay khi hai trong ba số x, y, z bằng nhau còn số thứ ba bằng 0.

Chứng minh: Vì bất đẳng thức hoàn toàn đối xứng đối với ba biến số, không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $x \geq y \geq z$. Khi đó bất đẳng thức có thể viết lại dưới dạng

$$(x-y)[x^r(x-z) - y^r(y-z)] + z^r(x-z)(y-z) \geq 0,$$

và mỗi một thừa số ở vế trái đều hiển nhiên không âm.

Trường hợp hay được sử dụng nhất của bất đẳng thức Schur là khi r = 1. Bất đẳng thức này có thể viết lại dưới dạng

$$\Sigma_{sym}x^3 - 2x^2y + xyz \geq 0.$$

Đây chính là bất đẳng thức ở ví dụ 1.

Ví dụ 8: Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$(ab + bc + ca)(1/(a+b)^2 + 1/(b+c)^2 + 1/(c+a)^2) \geq 9/4$$

Giải: Quy đồng mẫu số, khai triển và rút gọn, ta được

$$\Sigma_{sym}\, 4a^5b - a^4b^2 - 3a^3b^3 + a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2 \geq 0 \qquad (8.1)$$

Dùng bất đẳng thức Schur: $x(x-y)(x-z) + y(y-z)(y-x) + z(z-x)(z-y) \geq 0$. Nhân hai vế với 2xyz rồi cộng lại, ta được

$$\Sigma_{sym}\, a^4bc - 2a^3b^2c + a^2b^2c^2 \geq 0 \qquad (8.2)$$

Ngoài ra áp dụng định lý nhóm (hay nói cách khác - bất đẳng thức Cauchy có trọng số) ta có $\Sigma_{sym}\,(a^5b - a^4b^2) + 3(a^5b- 3a^3b^3) \geq 0.$ (8.3)

Từ 8.2, 8.3 suy ra 8.1 và đó chính là điều phải chứng minh.

Nói đến bất đẳng thức thuần nhất đối xứng, không thể không nói đến các hàm số đối xứng cơ bản. Đó là các biểu thức $S_1 = x_1 + x_2 + ...+ x_n$, $S_2 = \Sigma x_i x_j$, ..., $S_n = x_1 x_2 ... x_n$. Với các bất đẳng thức liên quan đến các hàm đối xứng này, có một thủ thuật rất hữu hiệu được gọi là « thủ thuật giảm biến số bằng định lý Rolle ». Chúng ta trình bày ý tưởng của thủ thuật này thông qua ví dụ sau:

Ví dụ 9: Cho a, b, c, d là các số thực dương. Chứng minh rằng

$$[(ab+ac+ad+bc+bd+cd)/6]^{1/2} \geq [(abc+abd+acd+bcd)/4]^{1/3}$$

Giải: Đặt $S_2 = ab+ac+ad+bc+bd+cd$, $S_3 = abc+abd+acd+bcd$. Xét đa thức $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) = x^4 - (a+b+c+d)x^3 + S_2x^2 - S_3x + abcd$. P(x) có 4 nghiệm thực a, b, c, d (nếu có các nghiệm trùng nhau thì đó là nghiệm bội). Theo định lý Rolle, P'(x) cũng có 3 nghiệm (đều dương) u, v, w. Do P'(x) có hệ số cao nhất bằng 4 nên

$$P'(x) = 4(x-u)(x-v)(x-w) = 4x^3 - 4(u+v+w)x^2 + 4(uv+vw+wu)x - 4uvw$$

Mặt khác

$$P'(x) = 4x^3 - 3(a+b+c+d)x^2 + 2S_2x - S_3$$

suy ra $S_2 = 2(uv+vw+wu)$, $S_3 = 4uvw$ và bất đẳng thức cần chứng minh ở đầu bài có thể viết lại theo ngôn ngữ u, v, w là

$$[(uv+vw+wu)/3]^{1/2} \geq (uvw)^{1/3}$$

Bất đẳng thức này hiển nhiên đúng theo bất đẳng thức Cauchy.

**5. Thuần nhất hóa bất đẳng thức không thuần nhất**

Trong các phần trên, chúng ta đã trình bày các phương pháp cơ bản để chứng minh một bất đẳng thức thuần nhất. Đó không phải là tất cả các phương pháp (và dĩ nhiên không bao giờ có thể tìm được tất cả!), tuy vậy có thể giúp chúng ta định hướng tốt khi gặp các bất đẳng thức thuần nhất. Nhưng nếu gặp bất đẳng thức không thuần nhất thì sao nhỉ? Có thể bằng cách nào đó để đưa các bất đẳng thức không thuần nhất về các bất đẳng thức thuần nhất và áp dụng các phương pháp nói trên được không?

Câu trả lời là có. Trong hầu hết các trường hợp, các bất đẳng thức không thuần nhất có thể đưa về bất đẳng thức thuần nhất bằng một quá trình mà ta gọi là thuần nhất hóa. Chúng ta không thể "chứng minh" một "định lý" được phát biểu kiểu như thế, nhưng có hai lý do để tin vào nó: thứ nhất, thực ra chỉ có các đại lượng cùng bậc mới có thể so sánh được, còn các đại lượng khác bậc chỉ so sánh được trong các ràng buộc nào đó. Thứ hai, nhiều bất đẳng thức không thuần nhất đã được "tạo ra" bằng cách chuẩn hóa hoặc thay các biến số bằng các hằng số. Chỉ cần chúng ta đi ngược lại quá trình trên là sẽ tìm được nguyên dạng ban đầu.

Một ví dụ rất đơn giản cho lý luận nêu trên là từ bất đẳng thức thuần nhất $x^3 + y^3 + z^3 \geq x^2y + y^2z + z^2x$, bằng cách cho z = 1, ta được bất đẳng thức không thuần nhất
$x^3 + y^3 + 1 \geq x^2y + y^2 + x$.

Ví dụ 10: Cho p, q, r là các số thực dương thoả mãn điều kiện p + q + r = 1. Chứng minh rằng $7(pq+qr+rp) \leq 2 + 9pqr$.

(Vô địch Anh, 1999)

Ví dụ 11: Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện abc = 1. Chứng minh rằng $(a - 1 + 1/b)(b - 1 + 1/c)(c - 1 + 1/a) \leq 1$.

(IMO, 2000)

Hướng dẫn: Đặt a = x/y, b = y/z, c = z/x!

<u>Ví dụ 12:</u> Chứng minh rằng nếu a, b, c là ba cạnh của một tam giác thì:

$$a^2b(a-b) + b^2c(b-c) + c^2a(c-a) \geq 0$$

(IMO, 1983)

<u>Hướng dẫn:</u> Đặt a = y+z, b = z+x, c = x+y!

<u>Bài tập</u>

1. Cho x, y, z > 0. Chứng minh rằng
$x^3/y^3 + x^3/z^3 + y^3/x^3 + y^3z^3 + z^3/x^3 + z^3/y^3 \geq x^2/yz + y^2/zx + z^2/xy + yz/x^2 + zx/y^2 + xy/z^2$

2. Chứng minh bất đẳng thức sau với mọi số thực dương x, y, z :

$$x/(x+y)(x+z) + y/(y+z)(y+x) + z/(z+x)(z+y) \leq 9/4(x+y+z).$$

3. Cho x, y, z là các số thực dương thoả mãn điều kiện

$$2x + 4y + 7z = 2xyz$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức x + y + z.

4. Cho a, b, c là các số thực dương thoả mãn điều kiện $a^2 + b^2 + c^2 + abc = 4$. Chứng minh rằng $a + b + c \leq 3$.

5. (IMO, 1984). Cho x, y, z là các số thực không âm thoả mãn điều kiện x + y + z = 1. Chứng minh rằng

$$0 \leq xy + yz + zx - 2xyz \leq 7/27.$$

6. (Iran, 1996). Cho a, b, c > 0. Chứng minh rằng

$$(ab+bc+ca)\left(\frac{1}{(a+b)^2}+\frac{1}{(b+c)^2}+\frac{1}{(c+a)^2}\right) \geq \frac{9}{4}$$

7. (Việt Nam, 1996) Cho a, b, c, d là các số thực không âm thoả mãn điều kiện 2(ab+ac+ad+bc+bd+ca) + abc + bcd + cda + dab = 16. Chứng minh rằng

$$3(a + b + c + d) \geq 2(ab+ac+ad+bc+bd+ca)$$

8. (Ba Lan, 1996) Cho a, b, c là các số thực thoả mãn điều kiện a + b + c = 1. Chứng minh rằng

$$\frac{a}{a^2+1}+\frac{b}{b^2+1}+\frac{c}{c^2+1} \leq \frac{9}{10}$$

9. (Ba Lan, 1991) Cho x, y, z là các số thực thoả mãn điều kiện $x^2 + y^2 + z^2 = 2$. Chứng minh rằng

$$x + y + z \leq 2 + xyz.$$

10. (IMO, 2001). Cho a, b, c > 0. Chøng minh r»ng

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+8bc}}+\frac{b}{\sqrt{b^2+8ca}}+\frac{c}{\sqrt{c^2+8ab}} \geq 1$$