**ĐỀ SỐ 22**

**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TỈNH NAM ĐỊNH NĂM 2023-2024**

**Câu 1. (3 điểm)**

1, Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$ . Chứng minh

$$\frac{bc+1}{a^{2}+1}+\frac{ac+1}{b^{2}+1}+\frac{ba+1}{c^{2}+1}=3$$

2, Cho đa thức $P\left(x\right)=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)…(x+2022)$. Khi khai triển đa thức P(x) ta được $P\left(x\right)= a\_{0}+a\_{1}x+a\_{2}x^{2}+…+a\_{2021}x^{2021}+a\_{2022}x^{2022}$. Tính giá trị biểu thức $$S= \frac{a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021}}{a\_{0}+a\_{2}+a\_{4}+…+a\_{2022}}- \frac{a\_{0}}{2(a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021})} $$

**Câu 2. (5,0 điểm)**

1, Giải phương trình $\left(x+1\right)\left(3x+\sqrt{x+1}-3\right)=4\sqrt{x^{3}}-2$

2, Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}x\left(y+1\right)+y=3\\\sqrt{5-2(x+y)}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2\end{array}\right.$

**Câu 3.(3,0 điểm)**

1, Tìm tất cả các số nguyên tố p, q sao cho $p^{4}-q^{2}(p^{2}+q^{2}+1)=(q^{2}+1)^{2}$

2, Cho m, n, p, q là các số nguyên thỏa mãn (m + n + p + q) $\vdots 30$ . Chứng minh rằng ($m^{5}+n^{5}+p^{5}+q^{5})\vdots 30$

**Câu 4. (7,0 điểm)** Cho tam giác ABC với AB < AC nội tiếp đường tròn (0). Gọi BH và CQ là hai đường cao của tam giác ABC. Tiếp tuyến tại B và tại C của đường tròn (0) cắt nhau tại M. Đoạn thẳng OM cắt BC và cắt đường tròn (0) lần lượt tại N và D. Tia AD cắt BC tại F; AM cắt BC tại E và cắt đườn tròn (0) tại điểm thứ hai là K (K khác A).

1, Chứng minh rằng: AB.KC = AC.KB v$à \hat{ABM}= \hat{AHN}$

2, Gọi I là tâm đườn tròn ngoại tiếp tam giác AFN.

 Chứng minh $\hat{IOM}+ \hat{ADN=180°}$ .

3, Qua E kẻ đườn thẳng vuông góc với BC cắt QH tại G. Chứng minh ba điểm A, G, N thẳng hàng.

**Câu 5. (2,0 điểm**)

1, Lấy 2018 điểm phân biệt ở miền trong của một ngũ giác lồi cùng với 5 đỉnh của ngũ giác đó ta được 2023 điểm phân biệt sao cho không có ba điểm nào thẳng hàng. Biết diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị. Chứng minh rằng tồn tại một tam giác có 3 đỉnh lấy từ 2023 điểm đã cho có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.

2, Xét a, b, c là các số tực dương thỏa mãn a + b + c $\geq 3$ . Hãy tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$Q= \frac{1}{a^{2}+b+c}+\frac{1}{a+b^{2}+c}+\frac{1}{a+b+c^{2}}$$

**ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN GIẢI**

**Câu 1. (3,0 điểm)**

**1**, Ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}⟺ab+bc+ac=1$$

Ta có:

$$\frac{bc+1}{a^{2}+1}=\frac{bc+ab+bc+ac}{a^{2}+ab+bc+ac}=\frac{b\left(a+c\right)+c(a+b)}{(a+c)(a+b)}=\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}$$

Chứng minh tương tự:

$\frac{ac+1}{b^{2}+1}=\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}$ và $\frac{ab+1}{c^{2}+1}=\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}$

Do đó:

$\frac{bc+1}{a^{2}+1}+\frac{ac+1}{b^{2}+1}+\frac{ba+1}{c^{2}+1}=\frac{b}{a+b}+\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+b}+\frac{c}{b+c}+$ $\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}= \left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)+\left(\frac{c}{a+c}+\frac{a}{a+c}\right)+\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)=1+1+1=3$

Vậy $\frac{bc+1}{a^{2}+1}+\frac{ac+1}{b^{2}+1}+\frac{ba+1}{c^{2}+1}=3$ khi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{abc}$ và a, b, c > 0

**2**, Ta có:

$$P\left(x\right)= a\_{0}+a\_{1}x+a\_{2}x^{2}+…+a\_{2021}x^{2021}+a\_{2022}x^{2022}=\left(x+1\right)\left(x+2\right)\left(x+3\right)…(x+2022)$$

$$⇒P\left(1\right)= a\_{0}+a\_{1}1+a\_{2}1^{2}+…+a\_{2021}1^{2021}+a\_{2022}1^{2022}=\left(1+1\right)\left(1+2\right)\left(1+3\right)…(1+2022)$$

$⇒P\left(1\right)=a\_{0}+a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{2022}=2023!$

Lại có

$$P\left(-1\right)= a\_{0}+a\_{1}(-1)+a\_{2}\left(-1\right)^{2}+…+a\_{2022}\left(-1\right)^{2022}=\left(-1+1\right)\left(-1+2\right)…(-1+2022)$$

$$⇒P\left(-1\right)=a\_{0}-a\_{1}+a\_{2}-…+a\_{2022}=0$$

$⇒a\_{0}+a\_{2}+…+a\_{2022}=a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021}$

Mà

$a\_{0}+a\_{1}+a\_{2}+…+a\_{2022}=2023!$

$⇒a\_{0}+a\_{2}+…+a\_{2022}=a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021}=\frac{2023!}{2}$

Ta có

$$⇒P\left(0\right)= a\_{0}+a\_{1}.0+a\_{2}.0^{2}+…+a\_{2022}.0^{2022}=\left(0+1\right)\left(0+2\right)\left(1+3\right)…(0+2022)$$

$⇒P\left(0\right)=a\_{0}=2022!$

Do đó

$S= \frac{a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021}}{a\_{0}+a\_{2}+a\_{4}+…+a\_{2022}}- \frac{a\_{0}}{2(a\_{1}+a\_{3}+a\_{5}+…+a\_{2021})}=1-\frac{2022!}{2.\frac{2023!}{2}}=1-\frac{2022!}{2023!}=1-\frac{1}{2023}=\frac{2022}{2023}$

**Câu 2. (5,0 điểm)**

**1,** Điều kiện xác định $\left\{\begin{array}{c}x+1\geq 0\\x^{3}\geq 0\end{array}\right.⇔x\geq 0$

Khi đó phương trình đã cho tương ứng với

$3x^{2}+3x-3x-3+(x+1)\sqrt{(x+1})=4x\sqrt{x}-2$

$$⇔3x^{2}-4x\sqrt{x}+x+\left(x+1\right)\sqrt{(x+1}-\left(x+1\right)=0$$

$⇔x(3x-4\sqrt{x}+1)+\left(x+1\right)(\sqrt{(x+1}-1)=0$

$$⇔x(3x-4\sqrt{x}+1)+\frac{\left(x+1\right)x}{\sqrt{x+1}+1}=0$$

$$⇔x(3x-4\sqrt{x}+1+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1})=0$$

$$⇔\left⟦\genfrac{}{}{0pt}{}{x=0}{3x-4\sqrt{x}+1+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1}=0}\right.$$

Ta thấy:

$$3x-4\sqrt{x}+1+\frac{x+1}{\sqrt{x+1}+1}=3x-4\sqrt{x}+\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1} $$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{x+2+\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}+1}-\frac{4}{3}$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{6x+4-2\sqrt{x+1}}{6(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$=3\left(x-\frac{2}{3}\right)^{2}+\frac{(\sqrt{x+1}-1)^{2}+5x+2}{6(\sqrt{x+1}+1)}>0$$

Với x = 0 thỏa mãn điều kiện

Vậy tất cả các nghiệm của phương trình đã cho là x = 0.

**2,** Điều kiện: $\left\{\begin{array}{c}5-2(x+y)\geq 0\\2-x^{2}y^{2}\geq 0\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}x+y\leq \frac{5}{2}\\x^{2}y^{2}\leq 2\end{array}\right.$

Kết hợp với phương trình trong hệ ta được điều kiện $\frac{1}{2}\leq xy\leq \sqrt{2}$

Từ phương trình $x\left(y+1\right)+y=3⇔xy+x+y=3⇔x+y=3-xy$

thế vào phương trình $\sqrt{5-2\left(x+y\right)}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2$ ta được $\sqrt{5-2\left(3-xy\right)}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2$ $⇔\sqrt{5-6+2xy}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2$

$$⇔\sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2$$

$$⇔\sqrt{2xy-1}+\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=2$$

$$⇔4-2\sqrt{2xy-1}-2\sqrt{2-x^{2}y^{2}}=0$$

$$⇔2xy-1-2\sqrt{2xy-1}+1+2-x^{2}y^{2}-2\sqrt{2-x^{2}y^{2}}+1+x^{2}y^{2}-2xy+1=0$$

$⇔\left(\sqrt{2xy-1}-1\right)^{2}+\left(\sqrt{2-x^{2}y^{2}}-1\right)^{2}$+ $\left(xy-1\right)^{2}=0$

Với $\frac{1}{2}\leq xy\leq \sqrt{2}$ thì $\left\{\begin{array}{c}\left(\sqrt{2xy-1}-1\right)^{2}\geq 0\\\left(\sqrt{2-x^{2}y^{2}}-1\right)^{2}\geq 0\\\left(xy-1\right)^{2}\geq 0\end{array}\right.$

Do đó phương trình $\left(\sqrt{2xy-1}-1\right)^{2}+\left(\sqrt{2-x^{2}y^{2}}-1\right)^{2}+\left(xy-1\right)^{2}=0$

$$⇔\left\{\begin{array}{c}\left(\sqrt{2xy-1}-1\right)^{2}=0\\\left(\sqrt{2-x^{2}y^{2}}-1\right)^{2}=0\\\left(xy-1\right)^{2}=0\end{array}\right.⇔\begin{array}{c}\sqrt{2xy-1}=1\\ \sqrt{2-x^{2}y^{2}}=1 ⇔xy=1\\xy=1\end{array}$$

Với xy = 1 kết hợp với x + y = 3 - xy ta được

$$\left\{\begin{array}{c}x+y=2\\xy=1\end{array}⇔\right.\left\{\begin{array}{c}x=2-y\\\left(2-y\right)y=1\end{array}⇔\right.\left\{\begin{array}{c}x=2-y\\(y-1)^{2}=0\end{array}⇔x=y=1\right.$$

Với x = y = 1 thỏa mãn điều kiện. Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất là (x;y) = (1;1).

**Câu 3.(3,0 điểm)**

**1,** Ta có:

$$p^{4}-q^{2}\left(p^{2}+q^{2}+1\right)=\left(q^{2}+1\right)^{2}⇔p^{4}-\left(q^{2}+1\right)^{2}-q^{2}\left(p^{2}+q^{2}+1\right)=0$$

$$⇔\left(p^{2}+q^{2}+1\right)\left(p^{2}-q^{2}-1\right)-q^{2}\left(p^{2}+q^{2}+1\right)=0$$

$$⇔\left(p^{2}+q^{2}+1\right)\left(p^{2}-2q^{2}-1\right)=0$$

$⇔\left(p^{2}+q^{2}+1\right)\left(p^{2}-2q^{2}-1\right)=0⇔p^{2}-2q^{2}-1=0$ (do p, q là các số nguyên tố)

$⇔p^{2}-1=2q^{2}⇔\left(p-1\right)\left(p+1\right)=2q^{2}$

Nếu p =2 $⇒\left(2-1\right)\left(2+1\right)=2q^{2}⇔q^{2}=\frac{3}{2 } $(Loại do 1 là số nguyên tố)

Nếu p $\geq 3$, mà p nguyên tố thì p -1 và p +1 là các số chẵn do đó

$\left(p-1\right)\left(p+1\right)\vdots 4⇒2q^{2}\vdots 4⇒q^{2}\vdots 2$ , mà q nguyên tố $⇒q=2$

Thay q = 2 vào $p^{2}-1=2q^{2}⇒p^{2}=9⇒p=3$ thỏa mãn

Vậy tất cả các số nguyên tố p, q là $\left\{\begin{array}{c}p=3\\q=2\end{array}\right.$

**2,** Ta có: $m^{5}-m=m\left(m^{4}-1\right)=m(m-1)(m+1)(m^{2}+1)$

$$=m(m-1)(m+1)(m^{2}+1)$$

$$=m(m-1)(m+1)(m^{2}-4+5)$$

$$=m\left(m-1\right)\left(m+1\right)\left(m-2\right)\left(m+2\right)+5m(m-1)(m+1)$$

Ta có $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)\left(m-2\right)\left(m+2\right)$ là tích của 5 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3 và 5

$5m(m-1)(m+1)$ là tích của 5 và 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 2, 3, và 5 mà UCLN(2,3,5) = 1 nên $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)\left(m-2\right)\left(m+2\right)\vdots 30 và 5m(m-1)(m+1)\vdots 30$. Do đó $m\left(m-1\right)\left(m+1\right)\left(m-2\right)\left(m+2\right)+5m(m-1)(m+1)\vdots 30⇒(m^{5}-m)\vdots 30$

Chứng minh tương tự ta được $\left\{\begin{array}{c}(n^{5}-n)\vdots 30\\(p^{5}-p)\vdots 30\\(q^{5}-q)\vdots 30\end{array}\right.$

Do đó $\left(m^{5}+n^{5}+p^{5}+q^{5}\right)-(m+n+p+q)\vdots 30$ mà $(m+n+p+q)\vdots 30$

Vậy $\left(m^{5}+n^{5}+p^{5}+q^{5}\right)\vdots 30$

**Câu 4. (7,0 điểm)**

****

1, Trong (0) có: $\hat{MBK}=\hat{BAK}$ (góc nội tiếp và góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung chắn $\hat{BK}$)

Xét $∆MBK và ∆MAB $có $\hat{MBK}=\hat{BAK}$ và chung $\hat{BMK} ⇒∆MBK và ∆MAB $đồng dạng$⇒\frac{BK}{AB}=\frac{MB}{MA}$. (1)

Tương tự chứng minh được $∆MCK và ∆MAC đồng dạng ⇒\frac{CK}{AC}=\frac{MC}{MA}$ (2)

Do MB; MC là tiếp tuyến của đường tròn (0) nên MB = MC (3)

Từ (1), (2) và (3) suy ra $\frac{BK}{AB}=\frac{CK}{AC}⇒AB.CK=AC.BK$

Trong (0) có: $\hat{ACB}=\hat{ABx}$ ( góc nội tiếp và góc tạo tia bởi tiếp tuyến và dây cung chắn $\hat{AB}$ ).

Có MB = MC; OB = OC $⇒OM$ là đường trung trực của BC $⇒$ N là trung điểm của BC.

Do BH là đường cao của $∆ABC nên ∆BHC $vuông tại H, mà N là trung điểm của BC nên NB = NC = NH nên $∆NHC $cân tại N$⇒\hat{NHC}==\hat{ACB}$ . Do đó $\hat{NHC}=\hat{ABx}$

Ta có $\hat{NHC}+\hat{AHN}=180°;\hat{ABx }+\hat{ABM=180°};\hat{NHC} =\hat{ABx}⇒\hat{AHN}=\hat{ABM} $

**2,** Kẻ tia MO cắt đường tròn (0) tại điểm thứ hai là S khác điểm D$ ⇒SN⊥BC⇒\hat{FNS} =90°⇒N$ thuộc đường tròn đường kính FS

Trong (0) có: $\hat{DAS} =90° $(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) hay : $\hat{FAS} =90° $

$⇒$ A thuộc đường tròn đường kính FS.

 Do đó 4 điểm A, F, N, S cùng thuộc đường tròn đường kính FS. Suy ra tâm I của đường tròn ngoại tiếp $∆AFN$ là trung điểm của FS

Trong $∆DFS$ có I là trung tâm của FS; O là trung điểm của DS $⇒$ OI là đường trung bình $⇒$ OI //DF $⇒$ OI //AD $⇒$ $\hat{IOM}+\hat{ADN}=180° $

**3,** Gọi G’ là giao điểm của AN và QH

Chứng minh được $∆ABH và ∆BMN $ đồng dạng $⇒\frac{AH}{BN}=\frac{AB}{BM}$ mà NB = NH

$⇒\frac{AH}{NH}=\frac{AB}{BM}$ mà $\hat{AHN}=\hat{ABM}$ suy ra $∆AHN và ∆ABM $đồng dạng.

Do đó $\hat{NAH}=\hat{MAB}$ hay $\hat{G'AH}=\hat{EAB}$ (4)

Chứng minh được $∆AQC và ∆AHB $đồng dạng $⇒\frac{AQ}{AH}=\frac{AC}{AB}$ suy ra $∆AQH và ∆ACB $đồng dạng.

Do đó $\hat{AHQ}=\hat{ABC}$ hay $\hat{AHG'}=\hat{ABE }$ (5)

Từ (4) và (5) suy ra $∆AHG' và ∆ABE $đồng dạng $⇒\frac{AG'}{AE}=\frac{AH}{AB}mà \frac{AH}{AB}=\frac{AN}{AM}$ ( do $∆AHN và ∆ABM $đồng dạng) $⇒\frac{AG'}{AE}=\frac{AN}{AM}$ . Theo định lí Ta – lét đảo suy ra EG’ //MN

Ta có EG//MN ( vì cùng vuông góc với BC). Do đó E, G, G’ thẳng hàng, mà G, G’ $\in QH$ suy ra G’ và G trùng nhau. Vậy ba điểm A, G, N thẳng hàng.

**Câu 5. (2,0 điểm)**

**1,** Nối các điểm trong 2023 điểm đã tạo thành các tam giác đôi một chung nhiều nhất một cạnh, phủ vừa kín ngũ giác. Giả sư có n tam giác được tạo thành. Khi đó tổng tất cả các góc của n tam giác này là n.180$°$

Tổng trên có thể tính thông qua những tổng sau:

- Tổng các góc xung quanh một điểm trong ngũ giác là 360$°$ mà có 2018 điểm trong ngũ giác do dó tổng số đo là 2018.360$°$

- Tổng các góc tại 5 đỉnh của ngũ giác là 3.180$°$

Do đó ta có n.180$°=3.180°+2018.360°⇒n=4039$

Như vậy ta có 4039 tam giác đôi một chỉ chung nhiều nhất một cạnh tạo thành từ 2023 điểm phân biệt để bài phủ kín hình ngũ giác. Vì diện tích của ngũ giác là 1 đơn vị nên luôn tồn tại một tam giác có diện tích không vượt quá $\frac{1}{4039}$ đơn vị.

2, Ta có: $x(y-1)^{2}\geq 0 với x, y>0$

$$⇒xy^{2}-2xy+x\geq 0⇒xy^{2}+x\geq 2xy⇒x^{2}+y^{2}+xy^{2}+x \geq (x+y)^{2}$$

$$⇒y^{2}\left(x+1\right)+x(x+1)\geq \left(x+y\right)^{2}⇒(y^{2}+x)(x+1)\geq (x+y)^{2}$$

$⇒\frac{1}{y^{2}+x}\leq \frac{x+1}{(x+y)^{2}}$ Đẳng thức xảy ra khi y = 1

Vậy $\frac{1}{y^{2}+x}\leq \frac{x+1}{\left(x+y\right)^{2}} \left(\*\right)với x, y>0$

Áp dụng BĐT(\*) ta có: $ $

$$\frac{1}{a^{2}+b+c}\leq \frac{b+c+1}{\left(a+b+c\right)^{2}} $$

$$\frac{1}{a+b^{2}+c}\leq \frac{a+c+1}{\left(a+b+c\right)^{2}} $$

$$\frac{1}{a+b+c^{2}}\leq \frac{b+a+1}{\left(a+b+c\right)^{2}} $$

Cộng theo vế ba bất đẳng thức trên ta được

$$Q=\frac{1}{a^{2}+b+c}+\frac{1}{a+b^{2}+c}+\frac{1}{a+b+c^{2}}\leq \frac{2\left(a+b+c\right)+3}{\left(a+b+c\right)^{2}}$$

Ta chứng minh $\frac{2\left(a+b+c\right)+3}{\left(a+b+c\right)^{2}}\leq 1$

Thật vậy: $\frac{2\left(a+b+c\right)+3}{\left(a+b+c\right)^{2}}\leq 1⇔\left(a+b+c\right)^{2}-2\left(a+b+c\right)-3\geq 0$

$⇔(a+b+c+1)(a+b+c-3)\geq 0$ luôn đúng do a +b + c $\geq 3$

Suy ra $Q=\frac{1}{a^{2}+b+c}+\frac{1}{a+b^{2}+c}+\frac{1}{a+b+c^{2}}\leq \frac{2\left(a+b+c\right)+3}{\left(a+b+c\right)^{2}}\leq 1$

Vậy GTLN của Q là 1 khi $\left\{\begin{array}{c}a+b+c-3=0\\a=1\\b=1\\c=1\end{array}\right.⇔a=b=c=1$