

ĐỀ CHÍNH THỨC

Môn kiểm tra: Toán

Ngày thi: 07/09/2023

Thời gian làm bài: 120 phút

(Không tính thời gian phát đề)

Bài 1. (5,0 điểm)

1. Cho $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$.
- Rút gọn biểu thức P.
 - Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$.

2. Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = r^2 + 1$

Bài 2. (4,0 điểm)

1. Giải phương trình $x \left(\frac{3 - x}{x + 1} \right) \left(x + \frac{3 - x}{x + 1} \right) = 2$
2. Tìm các cặp số nguyên dương (x; y) thỏa mãn $xy^2 + 2xy + x = 9y$

Bài 3. (4,0 điểm)

- Cho x và y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^3 + y^3$ và $x^2 + y^2$ cùng chia hết cho $x^2 + y^2$. Chứng minh rằng $2x + 2y$ là số chính phương.
- Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P = \frac{1}{2 - a} + \frac{1}{2 - b} + \frac{1}{2 - c}.$$

Bài 4. (6,0 điểm) Cho tam giác ABC vuông tại A ($AB < AC$). Vẽ đường cao AH ($H \in BC$). Trên tia đối của tia BC lấy điểm K sao cho $KH = HA$. Qua K kẻ đường thẳng song song với AH, cắt đường thẳng AC tại P.

- Chứng minh rằng tam giác AKC đồng dạng với tam giác BPC.
- Gọi Q là trung điểm của BP. Chứng minh $\angle QKH = \angle QCP$.

3. Tia AQ cắt BC tại I. Chứng minh $\frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$.

Bài 5. (1,0 điểm)

1. Xét tập $T = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Lập tất cả các tập con hai phần tử trong T sao cho hiệu của hai phần tử đó là 5 hoặc 8.
2. Cho M là tập con của $S = \{1, 2, 3, \dots, 869\}$ có tính chất hiệu hai số bất kỳ của M không là 5 hoặc 8. Hỏi M có nhiều nhất bao nhiêu phần tử?

-----HẾT-----

Họ và tên thí sinh:Số báo danh:

PHÒNG GD & ĐT QUẬN CẦU GIẤY
TRƯỜNG THCS CẦU GIẤY

ĐỀ KIỂM TRA CLB VĂN HÓA LỚP 9
VÀ CHỌN ĐỘI TUYỂN HSG LỚP 9 VÒNG I

ĐỀ CHÍNH THỨC

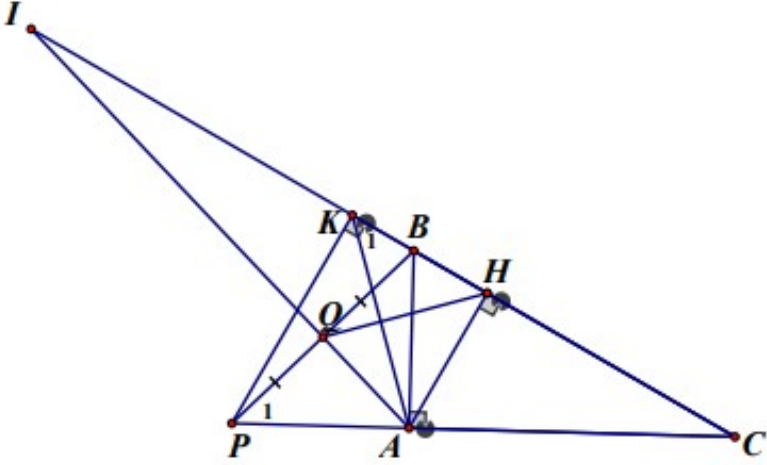
Môn kiểm tra: Toán
Ngày thi: 07/09/2023
Thời gian làm bài: 120 phút
(Không tính thời gian phát đề)

BÀI I	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
1	1	1. Cho $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$. a) Rút gọn biểu thức P. b) Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$.	1,5 1,0
		a) $P = \frac{2}{x} - \left(\frac{x^2}{x^2 + xy} + \frac{y^2 - x^2}{xy} - \frac{y^2}{xy + y^2} \right) \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ $P = \frac{2}{x} - \frac{x^2 y + (y^2 - x^2)(x + y) - xy^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ $P = \frac{2}{x} - \frac{x^2 y + xy^2 + y^3 - x^3 - x^2 y - xy^2}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$	1,0
		$P = \frac{2}{x} - \frac{(y - x)(x^2 + xy + y^2)}{xy(x + y)} \cdot \frac{x + y}{x^2 + xy + y^2}$ $P = \frac{2}{x} - \frac{y - x}{xy} = \frac{2y - y + x}{xy} = \frac{x + y}{xy}$ với $x \neq 0, y \neq 0, x \neq -y$.	0,5

BÀI I	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
1		b) Tính giá trị của biểu thức P biết x, y thỏa mãn đẳng thức $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$. Ta có: $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$ $\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 6y + 9 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 0$ Vì $(x - 1)^2 \geq 0 \quad \forall x$; $(y + 3)^2 \geq 0 \quad \forall y$ $\Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ y + 3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -3 \end{cases} \text{ (TMĐK)}$ $P = \frac{1 + (-3)}{1 - (-3)} = \frac{2}{3}$ Tại $x = 1$; $y = -3$ thì $P = \frac{2}{3}$ Vậy $P = \frac{2}{3}$ khi $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$.	0,5
		Tại $x = 1$; $y = -3$ thì $P = \frac{2}{3}$ Vậy $P = \frac{2}{3}$ khi $x^2 + y^2 + 10 = 2(x - 3y)$.	0,5
	2	Tìm tất cả các số nguyên tố p, q, r thỏa mãn $(p^2 + 1)(q^2 + 1) = r^2 + 1$	2,5
		Do vai trò p và q như nhau nên ta có thể giả sử $p \leq q$. Nếu p và q cùng lẻ thì vế trái chia hết cho 4. Suy ra r^2 chia cho 4 dư 3: vô lý. Do đó có ít nhất một số chẵn trong p và q. Suy ra $p = 2$	1,0
		Khi đó có: $5(q^2 + 1) = r^2 + 1 \Leftrightarrow 5q^2 + 4 = r^2$ $q = 2 \Rightarrow r^2 = 24$ (loại)	0,5
		$q = 3 \Rightarrow r^2 = 49 \Rightarrow r = 7$ (thỏa mãn)	0,5
		$q > 3 \Rightarrow r^2 = 5q^2 + 4$ chia hết cho 3 $\Rightarrow r = 3 \Rightarrow 9 = 5q^2 + 4 > 49$ (vô lý) Vậy $\begin{cases} p = 2; q = 3; r = 7 \\ p = 3; q = 2; r = 7 \end{cases}$	0,5
2	1	ĐKXD: $x \neq -1$ $x \left(\frac{3-x}{x+1} \right) \left(x + \frac{3-x}{x+1} \right) = 2$ C1	2,0

		$\Leftrightarrow \frac{3x-x^2}{x+1} \cdot \frac{x^2+x-3-x}{x+1} = 2$ $\Leftrightarrow \frac{(3x-x^2)(x^2+3)}{(x+1)^2} = 2$ $\Rightarrow 3x^3 + 9x - x^4 - 3x^2 = 2x^2 + 4x + 2$	0,5
BÀI I	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
2	1	$\Leftrightarrow x^4 - 3x^3 + 5x^2 - 5x + 2 = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)^2 \cdot (x^2 - x + 2) = 0$	1,0
		$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^2-x+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1(tm) \\ VN \end{cases}$ Vậy S = {1}	0,5
	C2		
		Đặt $A = x \left(\frac{3-x}{x+1} \right)$; $B = \left(x + \frac{3-x}{x+1} \right)$ Ta có $A + B = 3$; $A \cdot B = 2 \Rightarrow A=1, B=2$ hoặc ngược lại và tìm được $x = 1$	
	2	Tìm các cặp số nguyên dương (x;y) thỏa mãn	2,0
		$xy^2 + 2xy + x = 9y$ $xy^2 + 2xy + x = 32y \Leftrightarrow x(y+1)^2 = 9y$ $\Rightarrow y+1 \neq 0 \Rightarrow x = \frac{9y}{(y+1)^2}$ Do y nguyên dương	0,5
		Vì $(y, y+1) = 1 \Rightarrow (y+1)^2 \in U(9)$	0,5
		Do $(y+1)^2 > 1$ và là số chính phương nên $(y+1)^2 = 9$	0,5
		$(y+1)^2 = 9 \Rightarrow y = 2; x = 2$ Vậy nghiệm nguyên dương của phương trình là $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$	0,5
3	1	Cho x và y là các số nguyên dương thỏa mãn $x^3 + y$ và $x + y^3$ cùng chia hết cho $x^2 + y^2$. Chứng minh rằng $2x + 2y$ là số chính phương.	2,0

		Đặt $a = (x; y) \Rightarrow$ chứng minh được $a = 1$. $\begin{cases} x + y^3 : x^2 + y^2 \\ x^3 + y : x^2 + y^2 \end{cases} \Rightarrow (x - y)(x^2 + xy + y^2 - 1) : x^2 + y^2$	0,5
		$d = (x - y, x^2 + y^2) \Rightarrow \begin{cases} x \equiv y(m \text{ o } dd) \\ x^2 + y^2 : d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x^2 : d \\ 2y^2 : d \end{cases}$ Đặt Do $(x; y) = 1 \Rightarrow d \in \{1; 2\}$.	0,5
BÀI I	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
		+) Nếu $x = y \Rightarrow x + y^3 = x + x^3$ chia hết cho $x^2 + y^2 = 2x^2$. Từ đây tìm được $x = y = 1$	
		Nếu $d = 1 \Rightarrow (x - y, x^2 + y^2) = 1$ khi đó $\Rightarrow x^2 + xy + y^2 - 1 : x^2 + y^2 \Rightarrow xy - 1 : x^2 + y^2$ Từ đây chỉ ra $xy - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1 \Rightarrow (x - y, x^2 + y^2) = (0; 2) = 2$ (loại)	0,5
		Nếu $d = 2 \Rightarrow \left(\frac{x - y}{2}, \frac{x^2 + y^2}{2} \right) = 1$ $\Rightarrow x^2 + xy + y^2 - 1 : \frac{x^2 + y^2}{2} \Rightarrow xy - 1 : \frac{x^2 + y^2}{2}$ Từ đây chỉ ra $xy - 1 = 0 \Rightarrow x = y = 1$ (thỏa mãn) Vậy $x = y = 1 \Rightarrow 2x + 2y = 4$ là số chính phương	0,5
	2	Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a^2 + b^2 + c^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $P = \frac{1}{2 - a} + \frac{1}{2 - b} + \frac{1}{2 - c}.$	2,0
		$\frac{1}{a^2 + 1} = 1 - \frac{a^2}{a^2 + 1} \geq 1 - \frac{a^2}{2a} = \frac{2 - a}{2}$	0,5
		$\Rightarrow \frac{1}{2 - a} \geq \frac{a^2 + 1}{2}$	0,5
		Tương tự suy ra $P \geq \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 3}{2} = 3$	0,5
		Suy ra $P_{\min} = 3$ Dấu “=” xảy ra khi $a = b = c = 1$	0,5

4	1		
		a) $PK \parallel AH \Rightarrow \Delta CKP \sim \Delta CAB \Rightarrow \frac{CK}{CP} = \frac{CA}{CB}$	2,0
		Suy ra $\Delta AKC \sim \Delta BPC$ (c.g.c) (1)	1,0
BÀI I	Ý	HƯỚNG DẪN CHẤM	ĐIỂM
	2	ΔAKH vuông cân tại H $\Rightarrow \hat{K}_1 = 45^\circ$. Từ (1) $\Rightarrow \hat{K}_1 = \hat{P}_1 = 45^\circ \Rightarrow \Delta BAP$ vuông cân tại A $\Rightarrow BP = AB\sqrt{2}$ $\Delta BHA \sim \Delta BAC \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{BC}$ Chứng minh	0,5
		$\Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{\sqrt{2}AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{AB} = \frac{AB}{\sqrt{2}BC} \Rightarrow \frac{BH}{\sqrt{2}AB} = \frac{AB}{2BC}$ $\Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BP}{2BC} \Rightarrow \frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC} (BP = 2BQ)$	1,0
		ΔBHQ và ΔBPC có $\frac{BH}{BP} = \frac{BQ}{BC}$; $\hat{P}_{BC}$ chung $\Delta BHQ \sim \Delta BPC$ (c.g.c) Suy ra $BQH = BCP$	0,5
	3	ΔBAP vuông cân tại A, AQ là trung tuyến nên cũng là phân giác $\Rightarrow AI$ là phân giác ngoài của $\Delta ABC \Rightarrow \frac{IC}{IB} = \frac{AC}{AB}$ (2)	0,5
		$\Delta ABC \sim \Delta HBA \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AH}{HB}$ (3) Từ (2) và (3) ta có: $\frac{IC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow \frac{IB + BC}{IB} = \frac{AH}{HB} \Rightarrow 1 + \frac{BC}{IB} = \frac{AH}{HB}$	0,5

		$\Rightarrow \frac{AH}{HB} - \frac{BC}{IB} = 1$ (đpcm)	
		1. Xét tập $T = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$. Lập tất cả các tập con hai phần tử trong T sao cho hiệu của hai phần tử đó là 5 hoặc 8. 2. Cho M là tập con của $S = \{1, 2, 3, \dots, 869\}$ có tính chất hiệu hai số bất kỳ của M không là 5 hoặc 8. Hỏi M có nhiều nhất bao nhiêu phần tử ?	1,0
5	1	Xét $T = \{1, 2, 3, \dots, 13\}$ có 13 tập con $\{1,6\}$ $\{2,7\}$ $\{3,8\}$ $\{4,9\}$ $\{5,10\}$ $\{6,11\}$ $\{7,12\}$ $\{8,13\}$ $\{1,9\}$ $\{2,10\}$ $\{3,11\}$ $\{4,12\}$ $\{5,13\}$ mà hiệu các phần tử của mỗi tập này chỉ là 5 hoặc 8	0,25
	2	Đồng thời mỗi phần tử của T luôn nằm trong đúng 2 tập con như trên. Nếu N là một tập con của T có ít nhất 7 phần tử thì mỗi phần tử của N sẽ nằm trong đúng 2 tập con trong 13 tập kể trên. Do đó 7 phần tử sẽ nằm trong 14 tập con. Vậy phải có 2 phần tử trong 7 phần tử phải cùng nằm trong 1 tập con trong 13 tập kể trên, khi đó hiệu của 2 phần tử đó là 5 hoặc 8	0,25
		Do đó, nếu T' là 1 tập con của T có tính chất như M thì T' chỉ có nhiều nhất 6 phần tử, dễ thấy $T' = \{1, 2, 4, 5, 8, 11\}$ có tính chất là 2 phần tử bất kỳ có hiệu không là 5 hoặc 8 và có 6 phần tử.	0,25
		Chú ý 869 chia 13 được thương 66 và dư 11 nên M sẽ có nhiều nhất $6 \cdot 66 + 6 = 402$ phần tử.	0,25