

Bài Giảng Câu Lạc Bộ Toán học

Bài 1. Hoán vị: một số tính chất và song ánh

Phan Thị Hà Dương - Viện Toán học
28 tháng 11 năm 2010

Ngày 6 tháng 12 năm 2010

Ghi chú

Bài giảng này được chuẩn bị khá nhiều phần (tôi ghi tóm tắt dần bài trong tài liệu này); tôi chọn một số phần để giảng trong Buổi CLB 90', các phần còn lại các bạn có thể về nhà đọc thêm. Đặc biệt khuyến khích các bạn làm các bài tập. Trong buổi trình bày ngày 28/11, tôi đã trình bày các Định lý dưới dạng bài tập, và đã chữa khá chi tiết, một số bài được chữa toàn bộ. Cụ thể là các bài sau: 5 Bài tập trong phần 3 và 4 và các Định lý 3.1, 3.3, 4.1, 4.2. Đặc biệt bài tập số 2 trong Phần Bài tập 7.2 với việc sử dụng các tính chất của hoán vị và Nguyên lý Bù trừ. Hầu hết các chứng minh được dựa trên việc xây dựng các song ánh giữa các tập hợp. Phần lý thuyết, tôi trình bày các phần 1, 2, 3, 4, và 8.

1 Giới thiệu về Hoán vị

2 Định nghĩa và ví dụ

Định nghĩa 2.1 Một hoán vị của tập X là một song ánh của X vào chính nó.

Đặc biệt, một hoán vị của n với n là số nguyên dương là một song ánh từ $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ vào chính nó. ■

Số các hoán vị của n bằng $n!$.

Ví dụ: Một hoán vị f của 7, có thể viết dưới dạng $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 4257361 \end{pmatrix}$, và được hiểu là $f(1) = 4, f(2) = 2, f(3) = 5, \dots$

3 Biểu diễn hoán vị. Số Stirling loại một

Phân tích một hoán vị thành các xích:

Cho $1 \leq x \leq n$, ta xét dãy $x, f(x), f(f(x)), \dots$, tồn tại số tự nhiên nhỏ nhất l sao cho $f^l(x) = x$. Như vậy các số trong dãy $x, f(x), \dots, f^{l-1}(x)$ là đôi một khác nhau, và được gọi là một xích.

Bài tập 1: Chứng minh rằng một hoán vị của n có thể viết dưới dạng một hợp rời của các xích $C_1, \dots, C_k$, trong đó mỗi số tự nhiên từ 1 đến n xuất hiện trong đúng 1 xích.

Ví dụ: hoán vị $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 4257361 \end{pmatrix}$ có thể được viết như sau $f = (53)(6)(147)(2)$.

Nếu ta quy ước viết sao cho: mỗi xích bắt đầu bằng số lớn nhất trong xích, các xích được sắp theo thứ tự tăng dần của các số lớn nhất xích, thì cách viết này là duy nhất. Ánh xạ biến một hoán vị thành một cách viết các xích như trên được ký hiệu là h

Ví dụ: hoán vị $\begin{pmatrix} 1234567 \\ 4257361 \end{pmatrix}$ sẽ được viết là $(2)(53)(6)(714)$.

Bài tập 2: Có bao nhiêu hoán vị có chẵn xích có độ dài chẵn ?

Định lý 3.1 Ánh xạ h là một song ánh từ S_n vào chính nó. ■

Định nghĩa 3.2 Số các hoán vị của n có đúng k xích được ký hiệu là $s(n, k)$, và được gọi là số Stirling loại một. ■

Định lý 3.3 Số $s(n, k)$ thỏa mãn công thức truy hồi sau:

$$s(n+1, k) = s(n, k-1) + ns(n, k),$$

với mọi n, k nguyên dương, và quy ước $s(n, k) = 0$ nếu $n = 0$ hoặc $k = 0$, trừ trường hợp $s(0, 0) = 1$. ■

Định lý 3.4 Với n nguyên không âm ta có:

$$x(x+1)\dots(x+m-1) = \sum_{n=1}^m s(m, n)x^n.$$

Nghịch thế: Cho f là một hoán vị của n . Ta gọi cặp $(f(i), f(j))$ là một nghịch thế của f nếu $1 \leq i < j \leq n$ và $f(i) > f(j)$.

Bài tập 3 (Bài 5 kỳ thi chọn đội tuyển Đà Nẵng - 2010):

Cho n em học sinh đứng thành hàng dọc. Cứ mỗi lần thầy giáo thổi còi thì có đúng hai em đổi chỗ cho nhau. Hỏi: sau một số lẻ lần thầy giáo thổi còi, ta có thể thấy tất cả các em học sinh đều đứng ở đúng vị trí ban đầu của mình hay không?

4 Hoán vị của đa tập

Cho tập $S = \{x_1, \dots, x_m\}$ gồm m phần tử.

Một tổ hợp chập k của m là một tập con T gồm k phần tử của một tập S gồm m phần tử.

Đa tập: là một tập hợp mà các phần tử có thể giống nhau. Số các thành phần của đa tập được gọi là số phần tử của đa tập.

Ví dụ: Đa tập M gồm a_i phần tử x_i , có thể được ký hiệu là $\{x_1^{a_1}, \dots, x_m^{a_m}\}$. Số các phần tử n của M bằng tổng các a_i .

Tổ hợp lặp chập k của m là một đa tập k phần tử của tập S gồm m phần tử (các phần tử của S khác nhau).

Bài tập 4: Có bao nhiêu tổ hợp lặp chập k của m ? (ký hiệu là $\binom{n}{k}$).

Hoán vị của đa tập

Hoán vị của một đa tập M là một cách sắp xếp n phần tử của đa tập M . Số các hoán vị của đa tập M ký hiệu là $\binom{n}{a_1, \dots, a_m}$

Định lý 4.1 Số các hoán vị của đa tập $M = \{x_1^{a_1}, \dots, x_m^{a_m}\}$ bằng $\frac{n!}{a_1! \dots a_m!}$ ■

Định lý 4.2 Số các hoán vị của đa tập $M = \{x_1^{a_1}, \dots, x_m^{a_m}\}$ bằng hệ số của đơn thức $x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ trong khai triển của hàm mũ $(x_1 + \dots + x_m)^n$. ■

Chú ý: Có thể coi tổ hợp chập k của n là hệ số của $x_1^k x_2^{n-k}$ trong khai triển của $(x_1 + x_2)^n$ còn số các hoán vị của đa tập M là hệ số của $x_1^{a_1} \dots x_m^{a_m}$ trong khai triển của $(x_1 + \dots + x_m)^n$.

Bài tập 5: Chứng minh rằng

$$\sum_{r+s+t=n} \binom{n}{r, s, t} = 3^n$$

5 Một số song ánh

5.1 Giới thiệu về cây

1. Một cây là một đồ thị vô hướng không có chu trình và liên thông (luôn tồn tại đường đi giữa hai đỉnh bất kỳ)
2. **Định lý cơ bản về cây:** Cho một đồ thị vô hướng $G = (V, E)$ trong đó V là tập đỉnh và E là tập cạnh. Các mệnh đề sau là tương đương:
 - (a) G là một cây: G liên thông và không có chu trình
 - (b) G liên thông và $|V| = |E| + 1$.
 - (c) G không có chu trình và $|V| = |E| + 1$.
 - (d) G liên thông và nếu xóa đi một cạnh bất kỳ thì đồ thị nhận được không còn liên thông nữa.
 - (e) G không có chu trình và nếu thêm vào một cạnh bất kỳ thì đồ thị nhận được sẽ có chu trình.
 - (f) Giữa hai đỉnh bất kỳ của G có một và chỉ một đường đi.
3. Một cây có gốc là một đồ thị có dạng cây trong đó có một đỉnh r được chọn làm gốc. Tại mỗi đỉnh u khác r của cây, đều có một đường đi duy nhất đến r , đỉnh v gần nhất đỉnh đó trên đường đi ấy được gọi là cha của đỉnh u , và u là con của v .
4. Một cây nhị phân là cây mà mỗi đỉnh có 0 hoặc 1 hoặc 2 con. Có bao nhiêu cây n đỉnh như vậy?
5. Một cây nhị phân đầy đủ là cây nhị phân mà mỗi đỉnh hoặc có hai con hoặc không có con. Có bao nhiêu cây n đỉnh như vậy?
6. Một cây được đánh số là cây mà các đỉnh của nó được gán một số tự nhiên từ 1 đến n (n là số đỉnh của cây), mỗi số được gán đúng 1 lần. Có bao nhiêu cây n đỉnh như vậy?
7. Một rừng là một hợp thành của các cây, nghĩa là một đồ thị không có chu trình. Có bao nhiêu rừng n đỉnh được đánh số?

5.2 Song ánh

- Song ánh giữa các hoán vị của n và các cây nhị phân tăng n đỉnh (các đỉnh được đánh số sao cho số của cha nhỏ hơn số của con).
- Song ánh giữa các hoán vị của n và các cây được đánh số thỏa mãn: số của con nhỏ hơn của cha và của em nhỏ hơn của anh.

6 Sinh ngẫu nhiên hoán vị

Bảng nghịch đảo: Cho một hoán vị $(a_1, \dots, a_n)$ của n . Ký hiệu b_i là số các số tự nhiên j nằm bên trái của i trong hoán vị và $j > i$ (số các nghịch thế của i). Khi đó bảng $(b_1, \dots, b_n)$ được gọi là Bảng nghịch đảo của a .

Định lý 6.1 Đặt $J_n = [0, n-1] * [0, n-2] * \dots * [0, 0]$ Ánh xạ I đi từ S_n vào J_n biến mỗi hoán vị của n vào bảng nghịch đảo của nó là một song ánh. ■

Phép sinh ngẫu nhiên với xác suất đều.

Để sinh ngẫu nhiên một hoán vị, nếu chỉ dùng định nghĩa thì rất khó. Phương pháp là ta sinh ngẫu nhiên một bảng nghịch đảo (với xác suất đều, và rất dễ dàng), sau đó áp dụng ánh xạ ngược của ánh xạ I để tìm ra một hoán vị.

7 Bài tập minh họa

7.1 Bài tập lý thuyết

Chứng minh các định lý trong bài giảng

7.2 Bài tập áp dụng

1. Gọi $f(n, k)$ là số các hoán vị của n có đúng k nghịch thế. Chứng minh rằng với $k \leq n$, ta có

$$f(n+1, k) = f(n, k) + f(n+1, k-1).$$

2. Gọi D_n là số các hoán vị bậc n không có điểm cố định. Khi đó D_n là số nguyên gần nhất với số $n!/e$.
3. Trong một buổi dạ hội, có một số cặp vợ chồng trẻ tham gia một điệu nhảy đôi (mỗi đôi gồm một nam và một nữ). Trong điệu nhảy này các đôi sẽ chơi trò đổi bạn: hai đôi nhảy đổi bạn nhảy cho nhau. Chứng minh rằng dù lúc ban đầu các đôi nhảy được ghép thế nào thì luôn có cách chọn để sau một số lần đổi bạn, chàng trai nào cũng được nhảy với vợ mình (nghĩa là cô gái nào cũng phải nhảy với chồng mình :-)).
4. Trong một giải thi đấu bóng bàn, có n cán bộ Viện toán đấu với n học sinh cấp 3. Ở vòng 1, họ thi đấu n trận, mỗi trận do một cán bộ đấu với một học sinh. Đến vòng đấu 2, các trận cũng được tổ chức như vậy, với điều kiện không ai phải gặp lại đối thủ trong vòng 1 của mình. Tìm số cách tổ chức ghép cặp đấu cho vòng 2 sau khi vòng 1 đã kết thúc (có thể sử dụng tính toán xấp xỉ).
5. Một lớp học có 10 học sinh có điểm tổng kết đôi một khác nhau. Họ quyết định giúp nhau học tập. Mỗi bạn có thể có một người giúp mình môn văn, hoặc một người giúp mình môn toán, hoặc cả hai người, hoặc không có ai giúp. Biết rằng một người có thể giúp được người khác nếu điểm tổng kết của họ cao hơn của người kia, và chỉ có bạn thấp điểm nhất là không giúp đỡ ai. Hỏi có bao nhiêu cách phân công giúp nhau học tập ?

6. (Shortlist 2002) Cho n là một số nguyên dương. Một dãy S gồm n số được gọi là đầy đủ nếu nó thỏa mãn hai điều kiện: với mọi k nguyên lớn hơn hoặc bằng 2, nếu k thuộc S thì $k - 1$ thuộc S ; lần xuất hiện đầu tiên của k trong S ở trước lần xuất hiện cuối cùng của k . Hỏi có bao nhiêu dãy đầy đủ ?

8 Tìm hiểu thêm

- **Tổ hợp:** Rất nhiều bài toán tổ hợp, nhiều đối tượng tổ hợp được đưa về các bài toán về các hoán vị. Đặc biệt các bài toán về sắp xếp.
- **Đại số:** Tập hợp S_n gồm tất cả các hoán vị của n có rất nhiều tính chất, đặc biệt các nghiên cứu về cấu trúc nhóm của S_n đóng vai trò quan trọng trong Đại số.
- **Xác suất và thuật toán:** Một trong những vấn đề cơ bản của việc sinh ngẫu nhiên các phần tử của một tập hợp là làm sao để xác suất sinh ra các phần tử đều như nhau. Nhờ có bảng nghịch đảo, ta đã sinh được các hoán vị với xác suất đều rất hữu hiệu. Tương tự, rất nhiều bài toán sinh ngẫu nhiên các phần tử của một tập A rất phức tạp đã được đơn giản hóa bằng cách tìm một song ánh giữa A và một tập B và một thuật toán sinh ngẫu nhiên đơn giản trên B .
- **Khoa học máy tính:** Tập các hoán vị liên quan mật thiết đến bài toán sắp xếp - một bài toán điển hình trong Khoa học máy tính: "Cho một dãy số (các số khác nhau), hãy tìm thuật toán để sắp xếp dãy số đó theo thứ tự tăng dần". Có rất nhiều thuật toán được đề xuất bằng các phương pháp khác nhau, thể hiện bản chất của các phương pháp thuật toán. Quan trọng hơn hết, người ta chứng minh rằng dù thuật toán nào, thì độ phức tạp tính toán của thuật toán (được tính bằng số các phép so sánh hai phần tử với nhau) luôn lớn hơn hay bằng $O(n \log n)$.

9 Tài liệu tham khảo

1. **Enumerative Combinatorics.** Richard Stanley. *Cambridge University Press* 1997.
2. **Combinatorics.** R. Merris. *Wiley-Intersciences*. 2003
3. **Introduction to algorithm.** Thomas H. Cormen, Dartmouth College Charles E. Leiserson, Massachusetts Institute of Technology Ronald L. Rivest, *Massachusetts Institute of Technology Clifford Stein, Columbia University*.
4. Shortlist 2002.
5. Đề thi chọn đội tuyển Đà Nẵng 2010.