

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 18

Câu 1: Gọi S là tập hợp tất cả các giá trị thực của tham số m để hàm số $y = \frac{\cos x + m^2}{2 - \cos x}$ có giá trị lớn nhất trên $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$ bằng 1. Số phần tử của S là:

- A. 2. B. 3. C. 1. D. 0.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y = \frac{\cos x + m^2}{2 - \cos x} \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]$

Đặt $t = \cos x$ ($0 \leq t \leq 1$)

Hàm số đã cho trở thành: $f(t) = \frac{t + m^2}{2 - t} \quad \forall t \in [0; 1]$

Ta có: $f'(t) = \frac{2 + m^2}{(2 - t)^2} > 0 \quad \forall t \in [0; 1]$ $\text{Max}_{\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{3}\right]} y = f(1) = m^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow m = 0$

Ta có:

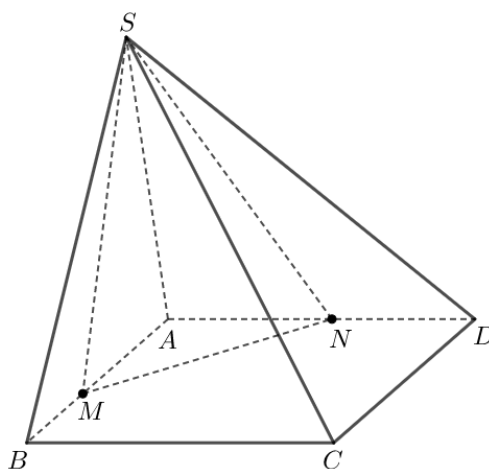
Vậy số phần tử của S là 1.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình bình hành. Gọi M, N là hai điểm lần lượt nằm trên các đoạn thẳng AB và AD (M, N không trùng A) sao cho $\frac{AB}{AM} + 2 \frac{AD}{AN} = 4$. Gọi V và V' lần lượt là thể tích của các khối chóp $S.ABCD$ và $S.MBCDN$. Giá trị nhỏ nhất của $\frac{V'}{V}$ bằng

- A. $\frac{1}{3}$. B. $\frac{1}{2}$. C. $\frac{3}{4}$. D. $\frac{2}{3}$.

Lời giải

Chọn D.



Ta có $\frac{V'}{V} = \frac{V - V_{S.AMN}}{V} = 1 - \frac{V_{S.AMN}}{V} = 1 - \frac{S_{AMN}}{S_{ABCD}} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{AM}{AB} \cdot \frac{AN}{AD}$

Đặt $\frac{AD}{AN} = x \Rightarrow \frac{AB}{AM} = 4 - 2x$ Ta có $\begin{cases} 0 < AN \leq AD \\ 0 < AM \leq AB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ 4 - 2x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \frac{3}{2}$

Khi đó $\frac{V'}{V} = 1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{4-2x} = 1 - \frac{1}{2x(4-2x)} = 1 + \frac{1}{4x^2 - 8x}$

$$f(x) = 1 + \frac{1}{4x^2 - 8x}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right] \Rightarrow f'(x) = -\frac{8x-8}{(4x^2-8)^2} < 0, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]$$

Đặt

$$f(x) \geq f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{2}{3}, \forall x \in \left[1; \frac{3}{2}\right]. \text{ Vậy } \min \frac{V'}{V} = \frac{2}{3}.$$

Suy ra

Câu 3: Xét ba số phức z, z_1, z_2 thỏa mãn $|z-i|=|z+1|$, $|z_1-3\sqrt{5}|=\sqrt{5}$ và $|z_2-4\sqrt{5}i|=2\sqrt{5}$. Giá trị nhỏ nhất của $|\sqrt{5}z-z_1|+|\sqrt{5}z-z_2|$ bằng

A. $4\sqrt{5}$.

B. $10\sqrt{5}$.

C. $7\sqrt{5}$.

D. $2\sqrt{5}$.

Lời giải

Chọn A.

Gọi M, M_1, M_2 lần lượt là điểm biểu diễn các số phức $\sqrt{5}z, z_1$ và z_2 .

Ta có $|z-i|=|z+1| \Leftrightarrow |\sqrt{5}z-\sqrt{5}i|=|\sqrt{5}z+\sqrt{5}| \Leftrightarrow MA=MB$ với $A(0;\sqrt{5})$ và $B(-\sqrt{5};0)$.

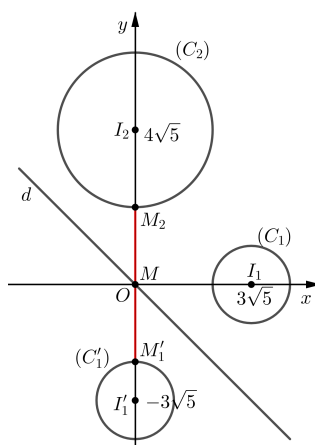
$\Leftrightarrow M \in d$ với d là đường trung trực của AB .

d qua $I\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ là trung điểm AB và nhận $\overrightarrow{AB}=(-\sqrt{5};-\sqrt{5})$ làm VTPT $\Rightarrow d: x+y=0$.

$|z_1-3\sqrt{5}|=\sqrt{5} \Leftrightarrow M_1 \in (C_1)$ với (C_1) là đường tròn tâm $I_1(3\sqrt{5};0)$, bán kính $R_1=\sqrt{5}$.

$|z_2-4\sqrt{5}i|=2\sqrt{5} \Leftrightarrow M_2 \in (C_2)$ với (C_2) là đường tròn tâm $I_2(0;4\sqrt{5})$, bán kính $R_2=2\sqrt{5}$.

Khi đó $T=|\sqrt{5}z-z_1|+|\sqrt{5}z-z_2|=MM_1+MM_2$.



Lấy đối xứng M_1 qua d , ta được $M'_1 \in (C'_1)$ với (C'_1) là đường tròn tâm $I'_1(0;-3\sqrt{5})$, bán kính $R'_1=\sqrt{5}$.

Khi đó $MM'_1+MM_2 \geq M'_1M_2 \geq |I'_1I_2-R'_1-R_2|=4\sqrt{5}$.

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi $M \equiv O(0;0), M_2(0;2\sqrt{5}), M_1(2\sqrt{5};0)$

Hay $z=0, z_2=2\sqrt{5}i, z_1=2\sqrt{5}$.

Câu 4: Cho hình nón có góc ở đỉnh bằng 120° . Một mặt phẳng qua đỉnh hình nón và cắt hình nón theo một thiết diện là một tam giác vuông có diện tích bằng 6. Thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho bằng

A. $9\pi\sqrt{3}$.

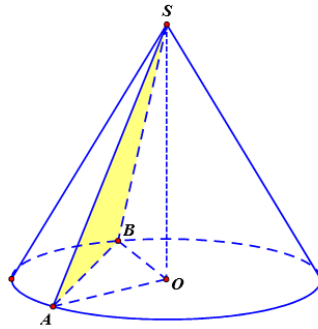
B. 27π .

C. $3\pi\sqrt{3}$.

D. 9π .

Lời giải

Chọn C



Gọi đỉnh của hình nón là S , O là tâm đáy. Mặt phẳng qua đỉnh cắt hình nón theo thiết diện là tam giác SAB và tam giác SAB vuông cân tại S .

Ta có $S_{\Delta SAB} = \frac{1}{2}SA \cdot SB = \frac{1}{2}SA^2 = 6 \Rightarrow SA = 2\sqrt{3}$.

Xét tam giác OSA vuông tại O , góc $\angle OSA = 60^\circ$ nên $SO = \sqrt{3}$, $OA = 3$.

Vậy hình nón đã cho có:

+ Chiều cao $h = SO = \sqrt{3}$.

+ Bán kính đáy $R = OA = 3$.

Vậy thể tích của khối nón được giới hạn bởi hình nón đã cho là $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h = \frac{1}{3}\pi \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = 3\pi\sqrt{3}$

Câu 5: Cho hàm số $f(x)$ thỏa mãn $2xf(x) + x^2 f'(x) = 1$ với mọi $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ và $f(1) = 0$. Giá trị của $f\left(\frac{1}{2}\right)$ bằng

A. -2.

B. 1.

C. 6.

D. -1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $2xf(x) + x^2 f'(x) = 1 \Leftrightarrow [x^2 \cdot f(x)]' = 1$

$\Rightarrow x^2 \cdot f(x) = x + C$

Vì $f(1) = 0 \Rightarrow C = -1$. Suy ra $x^2 \cdot f(x) = x - 1 \Rightarrow f(x) = \frac{x-1}{x^2}$.

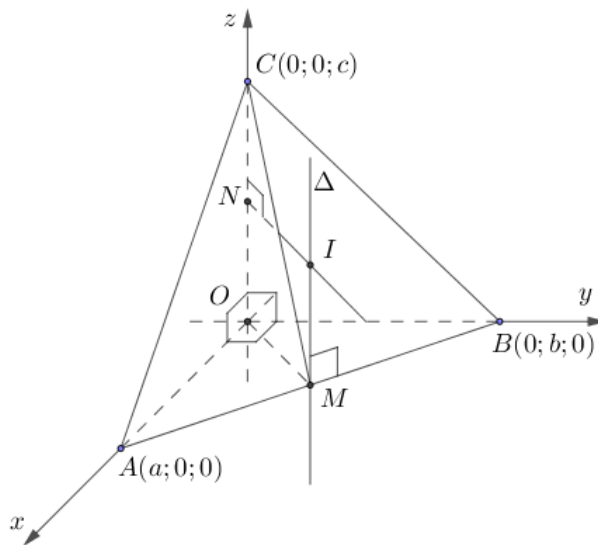
Vậy $f\left(\frac{1}{2}\right) = -2$.

Câu 6: Trong không gian $Oxyz$, cho ba điểm $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ với a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a+b+c=4$. Biết khi a, b, c thay đổi thì tâm I của mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ thuộc một mặt phẳng (P) cố định. Khoảng cách từ điểm $M(1;2;3)$ đến mặt phẳng (P) bằng

- A. $\sqrt{3}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$. C. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. D. $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Chọn D



Ta có $A(a;0;0) \in Ox, B(0;b;0) \in Oy, C(0;0;c) \in Oz$ nên tứ diện $OABC$ vuông tại O do đó tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện $OABC$ là $I\left(\frac{a}{2}; \frac{b}{2}; \frac{c}{2}\right)$.

Vì $a+b+c=4 \Leftrightarrow \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = 2$ hay I thuộc mặt phẳng $(P): x+y+z-2=0$

Vậy $d(M, (P)) = \frac{4\sqrt{3}}{3}$.

Câu 7: Cho các số thực a, b thỏa mãn $a > \frac{1}{5}, b > 1$. Giá trị nhỏ nhất của $\log_{5a} b + \log_b (a^4 - 25a^2 + 625)$ bằng

- A. $2\sqrt{3}$. B. $\sqrt{3}$. C. $\sqrt{2}$. D. $2\sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $(a^2 - 25)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 50a^2 + 625 \geq 0 \Leftrightarrow a^4 - 25a^2 + 625 \geq 25a^2$ với mọi a .

Xét biểu thức $P = \log_{5a} b + \log_b (a^4 - 25a^2 + 625)$

Khi đó: $P \geq \log_{5a} b + \log_b (25a^2)$

$$\Leftrightarrow P \geq \log_{5a} b + 2 \log_b (5a)$$

$$\Leftrightarrow P \geq \log_{5a} b + \frac{2}{\log_{5a} b} \geq 2\sqrt{2} \quad \text{với mọi } a > \frac{1}{5}, b > 1. \quad (\text{bất đẳng thức Cauchy})$$

Cuối cùng, giá trị nhỏ nhất của P là $2\sqrt{2}$.

Câu 8: Biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$ và $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$. Khi đó $\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x} dx$ bằng

A. 2.

B. 4.

C. 6.

D. 3.

Lời giải

Chọn B

Xét tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = 1$

$$x = \frac{\pi}{4} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$$

Đặt $t = \cos^2 x \Rightarrow dt = -2 \sin x \cos x dx$. Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x \cdot f(\cos^2 x) dx = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{f(t)}{-2t} dt = 1 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(t)}{t} dt = 2 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{f(x)}{x} dx = 2 \quad (1)$$

Khi đó

Xét tích phân $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = 2$

Đặt $t = \ln^2 x \Rightarrow dt = 2 \cdot \frac{\ln x}{x} dx$. Đổi cận: $x = e^2 \Rightarrow t = 4$
 $x = e \Rightarrow t = 1$

Khi đó $\int_e^{e^2} \frac{f(\ln^2 x)}{x \ln x} dx = \int_1^4 \frac{f(t)}{2t} dt = 2 \Leftrightarrow \int_1^4 \frac{f(x)}{x} dx = 4 \quad (2)$

Cuối cùng lấy $(1) + (2)$ ta được $\int_{\frac{1}{2}}^4 \frac{f(x)}{x} dx = 2 + 4 = 6.$

Câu 9: Xét các số a, b là các số nguyên dương nhỏ hơn 2022. Biết rằng với mỗi giá trị của b luôn có ít nhất 1000 giá trị của a thỏa mãn $(2^{a+b+2} - 2^{b-a}) \cdot \log_{a+1} \sqrt{b} > 4^b - 1$. Số giá trị b là

A. 1019.

B. 1020.

C. 1021.

D. 1022.

Lời giải

Đặt $c = a + 1, c \geq 2$, khi đó $(2^{a+b+2} - 2^{b-a}) \cdot \log_{a+1} \sqrt{b} > 4^b - 1 \Leftrightarrow (2^c - 2^{-c}) \cdot \log_c b > 2^b - 2^{-b} \quad (1)$

+) $b = 1$, không thỏa mãn.

$$+) \quad b=2 \Rightarrow \frac{2^c - 2^{-c}}{\log_2 c} > \frac{15}{4}$$

•) $c=2$, không thỏa mãn.

$$•) \quad \forall c \geq 3, \text{ hàm } f(c) = \frac{2^c - 2^{-c}}{\log_2 c}, f'(c) = \frac{2^c(c \cdot \ln 2 \cdot \ln c - 1) + c \cdot 2^{-c} \cdot \ln 2 \cdot \ln c + 2^{-c}}{c \cdot \ln 2 (\log_2 c)^2} > 0$$

Suy ra $f(c) \geq f(3) > \frac{15}{4}, \forall c \geq 3 \Rightarrow 2 \leq a \leq 2021$. Do đó $b=2$ thỏa mãn.

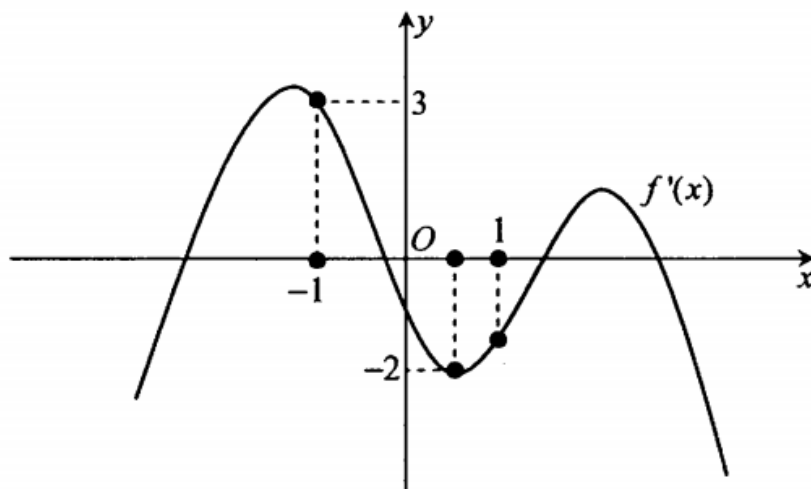
$$+) \quad b \geq 3, (1) \Leftrightarrow \frac{2^c - 2^{-c}}{\ln c} > \frac{2^b - 2^{-b}}{\ln b} \quad (3)$$

Hàm số $f(t) = \frac{2^t - 2^{-t}}{\log_2 t}$ đồng biến với mọi $t \geq 3$ và $c=2$ không thỏa mãn nên $c \geq 3$.

$$\text{Do đó } (3) \Leftrightarrow c > b, (b \geq 3) \Rightarrow 3 \leq b \leq a \leq 2021 \Rightarrow \begin{cases} b \geq 3 \\ 2021 - b + 1 \geq 1000 \end{cases} \Rightarrow 3 \leq b \leq 1022$$

Vậy $2 \leq b \leq 1022$.

Câu 10: Cho hàm số $y = f(x)$ có đồ thị đạo hàm được cho như hình vẽ bên dưới và có $f(1) = 1$.



Gọi S là tập chứa tất cả các giá trị nguyên của tham số $m \in [-2020; 2020]$ để hàm số $y = |2f(2-x) - x^2 + 2mx + 12|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$. Số phần tử của tập S tương ứng bằng

A. 4029 **B.** 4028 **C.** 4027 **D.** 4033

Lời giải

Chọn A

$$\text{Đặt } y = |g(x)| = |2f(2-x) - x^2 + 2mx + 12| \Rightarrow g'(x) = 2[-f(2-x) - x + m]$$

Để hàm số $y = |g(x)|$ đồng biến trên khoảng $(1; 3)$ thì xảy ra 2 trường hợp sau:

Trường hợp 1: Hàm số $y = g(x)$ phải đồng biến trên khoảng $(1;3)$ và $g(1) \geq 0$. Suy ra $g(x) \geq 0, \forall x \in (1;3)$

$$\Rightarrow |g(x)| = g(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1;3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) = 2(-f'(2-x) - x + m) \geq 0, \forall x \in (1;3) \\ g(1) = 2f(1) + 2m + 11 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq f'(2-x) + x, \forall x \in (1;3) \\ 2m + 13 \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq f'(u) - u + 2, \forall u = 2 - x, u \in (-1;1) \\ m \geq -\frac{13}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq \max_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) = f'(-1) - (-1) + 2 = 6 \\ m \geq -\frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 6$$

Chú ý rằng trên $[-1;1]$ thì $\begin{cases} f'(u) \leq f'(-1) = 3 \\ -u \leq -(-1) = 1 \end{cases}$

Suy ra $\max_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) = f'(-1) - (-1) + 2 = 6$

Trường hợp 2: Hàm số $y = g(x)$ phải nghịch biến trên khoảng $(1;3)$ và $g(1) \leq 0$. Suy ra $g(x) \leq 0, \forall x \in (1;3)$

$$\Rightarrow y = |g(x)| = -g(x) \text{ đồng biến trên } (1;3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} g'(x) = 2(-f'(2-x) - x + m) \leq 0, \forall x \in (1;3) \\ g(1) = 2f(1) + 2m + 11 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f'(2-x) + x, \forall x \in (1;3) \\ 2m + 13 \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \leq f'(u) - u + 2, \forall u = 2 - x, u \in (-1;1) \\ m \leq -\frac{13}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \min_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \\ m \leq -\frac{13}{2} \end{cases}$$

Mà $\min_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \geq -2 - (+1) + 2 = -1$

$$\Rightarrow m \leq -\frac{13}{2}$$

Chú ý rằng trên $[-1;1]$ thì $\begin{cases} f'(u) \geq -2 \\ -u \geq -1 \end{cases}$

Suy ra $\min_{[-1;1]} (f'(u) - u + 2) \geq -2 - (1) + 2 = -1$

Kết hợp với điều kiện $m \in [-2020; 2020] \Rightarrow \begin{cases} 6 \leq m \leq 2020 \\ -2020 \leq m \leq -7 \end{cases}$. Suy ra có 4029 giá trị nguyên của m thỏa mãn.