



Chương

Bài 5.

PHÉP CHIẾU SONG SONG

A

Lý thuyết

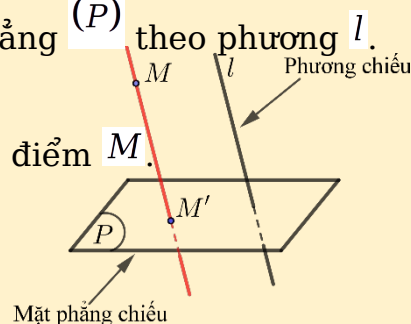
1. Phép chiếu song song.



Định nghĩa:

Cho mặt phẳng (α) và một đường thẳng l cắt (α) .

- » Với mỗi điểm M trong không gian, vẽ đường thẳng qua M và song song hoặc trùng với l .
- » Phép cho tương ứng mỗi điểm M trong không gian với điểm M' trong (α) được gọi là phép chiếu song song lên mặt phẳng (α) theo phương l .
- ✱ **Trong đó:** Trên mặt phẳng (α) theo phương l :
 - ✓ Điểm M' được gọi là hình chiếu song song của điểm M .
 - ✓ Mặt phẳng (α) được gọi là mặt phẳng chiếu.
 - ✓ l gọi là phương chiếu



2. Tính chất của phép chiếu song song.



Tính chất:

- » Phép chiếu song song biến ba điểm thẳng hàng thành ba điểm thẳng hàng và không làm thay đổi thứ tự của ba điểm đó.
- » Phép chiếu song song biến đường thẳng thành đường thẳng, biến tia thành tia, biến đoạn thẳng thành đoạn thẳng.
- » Phép chiếu song song biến hai đường thẳng song song thành đường thẳng song song hoặc trùng nhau.
- » Phép chiếu song song không làm thay đổi tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song hoặc cùng nằm trên một đường thẳng.

3. Hình biểu diễn của một số hình không gian trên mặt phẳng.



Định nghĩa:

- » Hình biểu diễn của một hình H trong không gian là hình chiếu song song của H trên một mặt phẳng theo một phương chiếu nào đó hoặc hình đồng dạng với hình chiếu đó.



Chú ý

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).
– $\rightarrow$ *Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .*
- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:
*Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.
Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.
Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.*



Các dạng bài tập

Dạng 1. Xác định ảnh qua phép chiếu song song



Phương

Dựa theo tính chất của phép chiếu song song, ta tuân theo các quy tắc khi vẽ hình:

- Nếu trên H có hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau) thì chúng được biểu diễn bằng hai đoạn thẳng nằm trên hai đường thẳng song song (hoặc trùng nhau).

— $\rightarrow$ Tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng này phải **bằng** tỉ số độ dài của hai đoạn thẳng tương ứng trên H .

- Nếu hình phẳng nằm trong mặt phẳng không song song với phương chiếu thì:

Hình biểu diễn của một đường tròn thường là một elip.

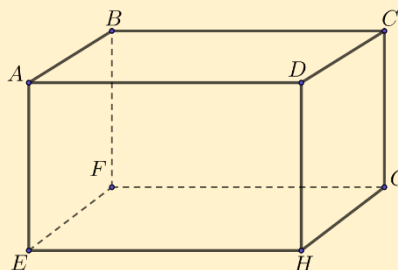
Hình biểu diễn của một tam giác (vuông, cân, đều) là một tam giác.

Hình biểu diễn của hình vuông, hình chữ nhật, hình thoi, hình bình hành là hình bình hành.



Ví dụ 1.1.

Cho hình hộp $ABCD.EFGH$. Xác định hình chiếu của điểm A trên mặt phẳng $(CDHG)$ theo phương BC và theo phương BG .



Lời giải

» Vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp nên $AD // BC$.

» Vì $D \in (CDHG)$ nên D là hình chiếu của điểm A trên $(CDHG)$ theo phương BC .

» Vì $ABCD.EFGH$ là hình hộp nên các mặt của nó đều là các hình bình hành. Do đó, $ABCD$ và $CDHG$ là các hình bình hành.

$\Rightarrow AB // CD, AB = CD$ và $CD // HG, CD = HG$

Nên $AB // HG$ và $AB = HG$,

$\Rightarrow ABGH$ là hình bình hành nên $AH // BG$.

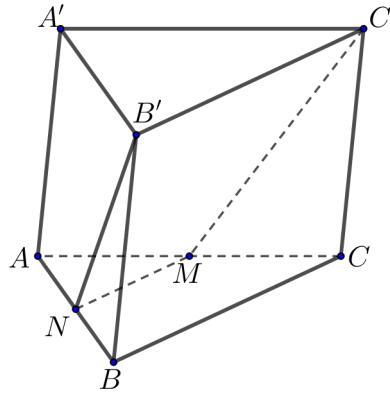
» Vì $H \in (CDHG)$ nên H là hình chiếu của điểm A trên $(CDHG)$ theo phương BG .



Ví dụ 1.2.

Cho lăng trụ $ABCA'B'C'$. Gọi M là trung điểm của AC . Tìm hình chiếu song song của điểm CM lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB ?

Lời giải



Ta có: $C'B' \parallel CB$

Nên hình chiếu song song của điểm C' lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là điểm B' .

Gọi N là trung điểm của AB .

Ta có: $MN \parallel CB$

Nên hình chiếu song song của điểm M lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là điểm N .

Vậy hình chiếu song song của điểm CM lên $(AA'B')$ theo phương chiếu CB là $B'N$



Dạng 2. Xác định hình biểu diễn qua phép chiếu song song



Phương

Cho hình H trong không gian.

- Ta gọi tập hợp P' các ảnh M' của tất cả những điểm M thuộc H qua phép chiếu song song theo phương l là hình chiếu song song của H lên mặt phẳng (P) .
- Để tìm hình chiếu của một đường thẳng ta tìm hình chiếu của 2 điểm phân biệt trên đường thẳng, hình chiếu là đường thẳng đi qua hai điểm vừa tìm được.



Ví dụ 2.1.

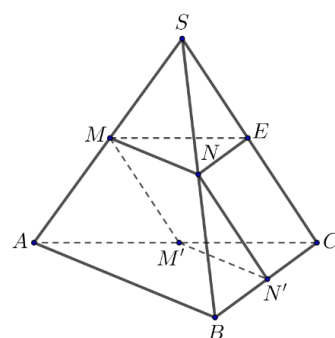
Cho hình chóp $S.ABC$. I là trung điểm AB .

- (1) Gọi M, N, E lần lượt là trung điểm của SA, SB, SC . Tìm ảnh của $DMNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC .
- (2) Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI của $DSAB$.

Lời giải

- (1) Tìm ảnh của $DMNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC .

Gọi $M'; N'$ lần lượt là trung điểm của CA và CB .
 $\Rightarrow$ Ảnh của $DMNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương SC là $DM'N'C$.

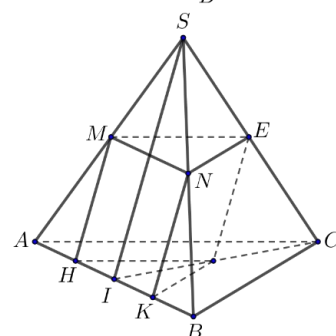


- (2) Tìm ảnh của tam giác MNE trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI của $DSAB$

Từ M, N, E ta dựng các đường thẳng song song với SI cắt AB tại H, K cắt CI tại F .

Suy ra H, K, F lần lượt là trung điểm của AI, BI, CI .

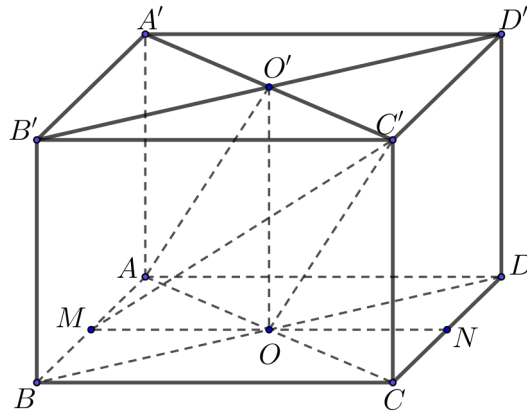
Ảnh của $DMNE$ trong phép chiếu song song trên (ABC) theo phương trung tuyến SI là $DHKF$.



Ví dụ 2.2.

Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi $O = AC \cap BD$ và $O' = A'C' \cap B'D'$. Điểm M, N lần lượt là trung điểm của AB và CD . Qua phép chiếu song song theo phương AO' lên mặt phẳng $(ABCD)$ Xác định hình chiếu của tam giác

Lời giải



Ta có: $O'C' = AO$ và $O'C' \parallel AO$ nên tứ giác $O'C'OA$ là hình bình hành
 $\Rightarrow O'A \parallel C'O$.

Do đó hình chiếu của điểm O' qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên $(ABCD)$ là điểm O .

Mặt khác điểm M và N thuộc $(ABCD)$

Nên hình chiếu của M và N qua phép chiếu song song theo phương $O'A$ lên mặt phẳng $(ABCD)$ lần lượt là điểm M và N .

Vậy qua phép chiếu song song theo phương AO' lên $(ABCD)$ thì hình chiếu của $DCMN$ là đoạn thẳng MN .



Dạng 3. Bài toán tổng hợp



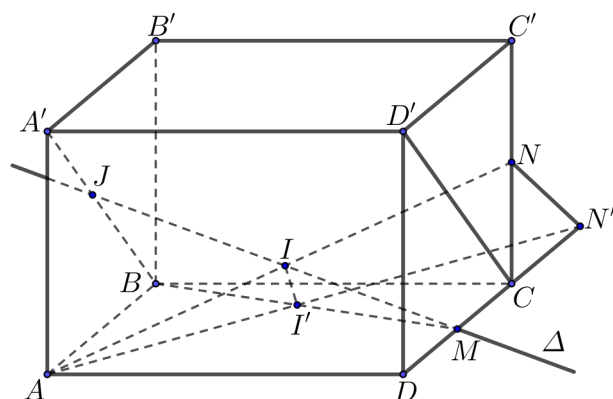
Ví dụ 3.1.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của CD và CC' . Gọi D là đường thẳng đi qua M đồng thời cắt AN và $A'B$. Gọi I, J lần lượt là giao điểm của D với AN và $A'B$. Hãy tính tỉ số $\frac{IM}{IJ}$.

Lời giải

($ABCD$)

- » Xét phép chiếu song song lên theo phương chiếu $A'B$.
- » Khi đó J, I, M lần lượt có hình chiếu là B, I', M .
- » Do J, I, M thẳng hàng.
- Nên B, I', M cũng thẳng hàng.
- » Gọi N' là hình chiếu của N thì AN' là hình chiếu của AN .
- » Vì $I \in AN \Rightarrow I' \in AN' \Rightarrow I' = BM \cap AN'$.
- » Ta có $MC = CN'$ suy ra $MN' = CD = AB$.
- » Do đó I' là trung điểm của BM .



- » Mặt khác $II' \parallel JB$ nên II' là đường trung bình của $DMBJ \Rightarrow IM = IJ \Rightarrow \frac{IM}{IJ} = 1$.



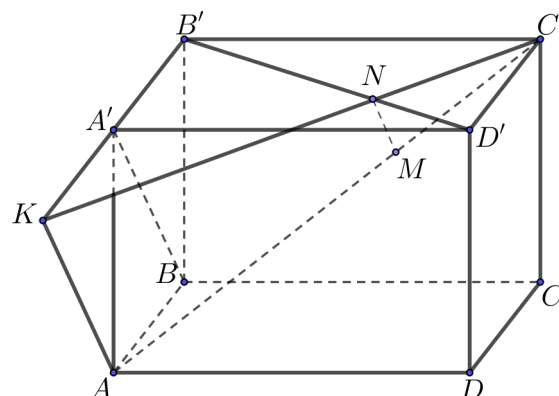
Ví dụ 3.2.

Cho hình hộp $ABCD.A'B'C'D'$. Xác định các điểm M, N tương ứng trên các đoạn AC', BD' sao cho MN song song với BA' và tính tỉ số $\frac{MA}{MC'}$.

Lời giải

($A'B'C'D'$)

- » Xét phép chiếu song song lên theo phương chiếu BA' .
- » Ta có N là ảnh của M hay M chính là giao điểm của BD' và ảnh AC' qua phép chiếu này.
- » Do đó ta xác định M, N như sau:
- » Trên $A'B$ kéo dài lấy điểm K sao cho $A'K = BA'$ thì $ABA'K$ là hình bình hành nên $AK \parallel BA'$ suy ra K là ảnh của A trên AC' qua phép chiếu song song.
- » Gọi $N = BD' \cap KC'$.
- Đường thẳng qua N và song song với AK cắt AC' tại M .
- Ta có M, N là các điểm cần xác định.



- » Theo định lí Thales, ta có $\frac{MA}{MC'} = \frac{NK}{NC'} = \frac{KB'}{CD'} = 2$.

