**VÀO 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH – NGHỆ AN**

**MÔN TOÁN CHUYÊN**

**Câu 1:**

a) Giải phương trình

b) Giải hệ phương trình

**Câu 2:**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên thoả mãn

b) Cho đa thức có hai nghiệm nguyên. Biết rằng và là số nguyên tố. Tìm các hệ số .

**Câu 3:** Xét các số thực không âm thoả mãn

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

**Câu 4:** Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB.* Đường thẳngtiếp xúc với *(O)* tại *A,* I là điểm cố định trên đoạn *AB* và *CD* là dây cung thay đổi của *(O)* luôn đi qua *I*. Các đường thẳng *BC, BD* cắtlần lượt tại *M, N.*

a) Chứng minh rằng *CDNM* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *K* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMN* với đường thẳng *AB.* Chứng minh rằng *KMCI* là tứ giác nội tiếp và tíchkhông đổi.

c) Gọi *T* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *CDNM.* Tìm vị trí của *CD* sao cho độ dài đoạnthẳng *BT* nhỏ nhất*.*

**Câu 5:** Gọi *M* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương *k* lớn nhất để tồn tại tập hợp con *A* có *k* phần tử của tập hợp *M* sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp *A* đều chia hết cho 3.

**Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Đại học Vinh Nghệ An năm 2023**

NGUYỄN NHẤT HUY – VÕ TRỌNG KHẢI

NGÀY 12 THÁNG 6 NĂM 2023

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

**Câu 1:**

a) Giải phương trình

b) Giải hệ phương trình

**Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: . Đặt phương trình trở thành

* Trường hợp 1. suy ra . Đặt khi đó ta có

(vô lí .

* Trường hợp 2. Đăt , khi đó ta có

⇔

(vì

(thoả mãn điều kiện).

Vậy tất cả các nghiệm thoả mãn phương trình là .

b) Ta đặt phương trình như sau

* Trường hợp 1. Nếu thì vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.
* Trường hợp 2. Nếu ta có biến đổi như sau

Thế vào phương trình (1), ta có:

* Nếu thì
* Nếu thì
* Nếu thì

Vậy tất cả các nghiệm thoả mãn là .

**Câu 2:**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên thoả mãn

b) Cho đa thức có hai nghiệm nguyên. Biết rằng và là số nguyên tố. Tìm các hệ số .

**Lời giải.**

a) Ta biến đổi phương trình như sau

Từ đây, ta xét bảng sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
|  | 31 | 1 | -31 | -1 |
|  | 1 | 31 | -1 | -31 |
|  | 13 | 13 | -19 | -19 |
|  | -14 | 16 | 16 | -14 |

Vậy tất cả các nghiệm thoả mãn là .

b) Gọi hai nghiệm nguyên của là

Theo định lí Viete ta được

Vì là số nguyên tố nên là số nguyên tố dẫn đến hoặc Không mất tính tổng quát, ta giả sử

* Trường hợp 1. vì , nên

Mặt khác đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại,

* Trường hợp 2. , vì nên

Mà phải là số chẵn nên từ đây suy ra Thử lại cả hai giá trị này thoả mãn và ta nhận được giá trị của tương ứng là và

Vậy tất cả cặp thoả mãn là

**Câu 3:** Xét các số thực không âm thoả mãn

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

**Lời giải.** Ta có nhận xét sau

Do đó ta được

Mặt khác, ta có suy ra .

Từ đây kết hợp với (Vì và ), ta suy ra

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi Vậy giá trị lớn nhất của là .

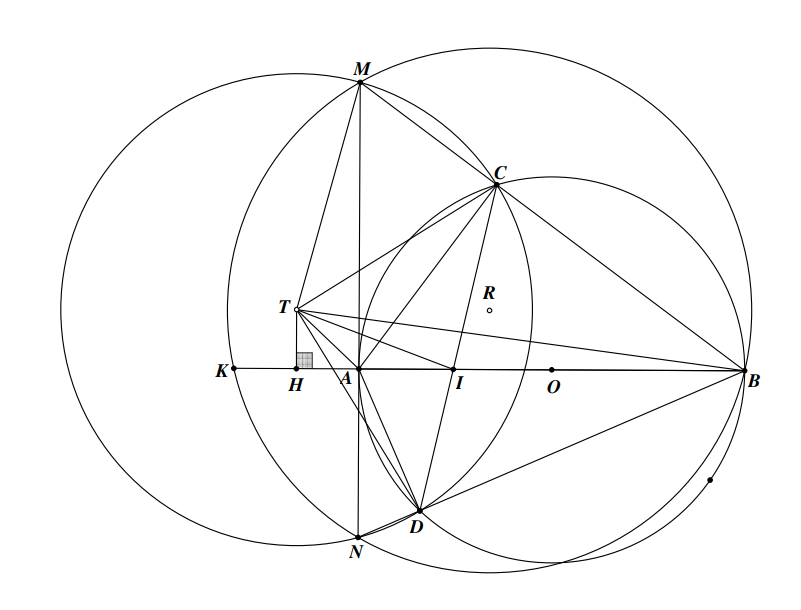
**Câu 4:** Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB.* Đường thẳngtiếp xúc với *(O)* tại *A,* I là điểm cố định trên đoạn *AB* và *CD* là dây cung thay đổi của *(O)* luôn đi qua *I*. Các đường thẳng *BC, BD* cắtlần lượt tại *M, N.*

a) Chứng minh rằng *CDNM* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *K* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMN* với đường thẳng *AB.* Chứng minh rằng *KMCI* là tứ giác nội tiếp và tíchkhông đổi.

c) Gọi *T* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *CDNM.* Tìm vị trí của *CD* sao cho độ dài đoạnthẳng *BT* nhỏ nhất*.*

**Lời giải.**

**

a) Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác *BAM* và *BAN* với hai đường cao tương ứng là *AC, AD* ta có Vì vậy tứ giác *CDNM* nội tiếp.

b) Ta có biến đổi góc , vì vậy tứ giác *CIKM* nội tiếp.

Do đó từ đây suy ra *K* là điểm cố định.

c) Gọi *r* là bán kính *(T)* thì không đổi. *TA* cũng có không đổi, đặt suy ra

Gọi *H* là hình chiếu của *K* lên *AB* theo định lý Pythagore ta có

Từ đây kết hợp với *AI* không đổi (*A* và *I* cố định) suy ra *H* cố định do đó *BH* không đổi.

Khi đó, theo định lý Pythagore ta có

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *T* trùng *H* tức là *BA* là trung trực của *CD* suy ra *CD* vuông góc *AB* tại *I.* Vậy khi *CD* vuông góc *AB* tại *I* thì độ dài đoạn thẳng *BT* nhỏ nhất.

**Câu 5:** Gọi *M* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương *k* lớn nhất để tồn tại tập hợp con *A* có *k* phần tử của tập hợp *M* sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp *A* đều chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Trước hết, ta đếm số phần tử thuộc *M* mà chia hết cho 3

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 1, 4, 7 có 9 số thoả mãn

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 2, 5, 8 có 9 số thoả mãn

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 3, 6, 9 có 9 số thoả mãn

Vì vậy số phần tử chia hết cho 3 thuộc *M* là 27, ta chứng minh thật vậy.

Trước hết, *A* không thể chứa quá 4 phần tử không chia hết cho 3 bởi vì tích của chúng sẽ không chia hết cho 3. Do đó

Xây dựng dấu bằng. Xét *A* là tập hợp các số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 3 và 3 phần tử bất kì thuộc các số còn lại.

Vậy số nguyên dương *k* lớn nhất thoả mãn yêu cầu đề bài là 30.