**VÀO 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH – NGHỆ AN**

**MÔN TOÁN CHUYÊN**

**Câu 1:**

a) Giải phương trình $x^{3}-2x^{2}+x-5\left(x-1\right)\sqrt{x}-6=0.$

b) Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}5x+y=x^{2}y^{2}-15\\2x+3y=3x^{2}y^{2}-13xy-6\end{array}\right.$

**Câu 2:**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x, y)$ thoả mãn $x^{2}-y^{2}+2\left(3x+y\right)=23.$

b) Cho đa thức $P\left(x\right)=x^{2}+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $\left|c\right|\leq 16$ và $\left|P(9)\right|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số $b, c$.

**Câu 3:** Xét các số thực không âm $a, b, c$ thoả mãn $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$

**Câu 4:** Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB.* Đường thẳng$Δ$tiếp xúc với *(O)* tại *A,* I là điểm cố định trên đoạn *AB* và *CD* là dây cung thay đổi của *(O)* luôn đi qua *I*. Các đường thẳng *BC, BD* cắt$Δ$lần lượt tại *M, N.*

a) Chứng minh rằng *CDNM* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *K* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMN* với đường thẳng *AB.* Chứng minh rằng *KMCI* là tứ giác nội tiếp và tích$AM.AN$không đổi.

c) Gọi *T* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *CDNM.* Tìm vị trí của *CD* sao cho độ dài đoạnthẳng *BT* nhỏ nhất*.*

**Câu 5:** Gọi *M* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương *k* lớn nhất để tồn tại tập hợp con *A* có *k* phần tử của tập hợp *M* sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp *A* đều chia hết cho 3.

**Đáp án đề thi vào lớp 10 môn Toán chuyên Đại học Vinh Nghệ An năm 2023**

NGUYỄN NHẤT HUY – VÕ TRỌNG KHẢI

NGÀY 12 THÁNG 6 NĂM 2023

LỜI GIẢI ĐỀ THI TOÁN VÀO LỚP 10 CHUYÊN ĐẠI HỌC VINH

**Câu 1:**

a) Giải phương trình $x^{3}-2x^{2}+x-5\left(x-1\right)\sqrt{x}-6=0.$

b) Giải hệ phương trình $\left\{\begin{array}{c}5x+y=x^{2}y^{2}-15\\2x+3y=3x^{2}y^{2}-13xy-6\end{array}\right.$

**Lời giải.**

a) Điều kiện xác định: $x\geq 0$. Đặt $t=\left(x-1\right)\sqrt{x}$ phương trình trở thành

$$x^{3}-2x^{2}+x-5\left(x-1\right)\sqrt{x}-6=0⇔x\left(x-1\right)^{2}-5\left(x-1\right)\sqrt{x}-6=0$$

$⇔t^{2}-5t-6=0$

$⇔\left(t+1\right)\left(t-6\right)=0$

* Trường hợp 1. $t=-1$ suy ra $0\leq x<1$. Đặt $\sqrt{x}=a \left(0\leq a<1\right),$ khi đó ta có

$\left(x-1\right)\sqrt{x}=-1⇔a^{3}-a+1=0$ (vô lí $a^{3}+1-a>0)$.

* Trường hợp 2. $t=6.$ Đăt $\sqrt{x}=a (a\geq 0)$, khi đó ta có

$\left(x-1\right)\sqrt{x}=6⇔a^{3}-a-6=0$

⇔$\left(a-2\right)\left(a^{2}+2a+3\right)=0$

$⇔a=2 $ (vì $a^{2}+2a+3=\left(a+1\right)^{2}+2>2>0)$

$⇔x=4$ (thoả mãn điều kiện).

Vậy tất cả các nghiệm thoả mãn phương trình là $x=4$.

b) Ta đặt phương trình như sau $\left\{\begin{array}{c}5x+y=x^{2}y^{2}-15 \left(1\right)\\2x+3y=3x^{2}y^{2}-13xy-6 \left(2\right)\end{array}\right.$

* Trường hợp 1. Nếu $x=0$ thì $-15=y=-2$ vô lý nên trường hợp này vô nghiệm.
* Trường hợp 2. Nếu $x\ne 0,$ ta có biến đổi như sau

$$\left(1\right).3-\left(2\right)⇔13x=13xy-39$$

$$⇔xy=x+3$$

$$⇔y=1+\frac{3}{x}$$

Thế $y=1+\frac{3}{x}$ vào phương trình (1), ta có:

$$5x+1+\frac{3}{x}=\left(x+3\right)^{2}-15⇔5x^{2}+x+3=x\left(x^{2}+6x+9\right)-15x$$

$$⇔x^{3}+x^{2}-7x-3=0$$

$$⇔\left(x+3\right)\left(x^{2}-2x-1\right)=0$$

$$x\in \left\{-3, 1, +\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}\right\}.$$

* Nếu $x=-3$ thì $y=1+\frac{3}{x}=0$
* Nếu $x=1+\sqrt{2}$ thì $y=1+\frac{3}{x}=-2+3\sqrt{2}$
* Nếu $x=1-\sqrt{2}$ thì $y=-2-3\sqrt{2}$

Vậy tất cả các nghiệm $(x, y)$ thoả mãn là $\left(-3, 0\right), \left(1+\sqrt{2}, -2+3\sqrt{2}\right), (1-\sqrt{2}, -2-3\sqrt{2})$.

**Câu 2:**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên $(x, y)$ thoả mãn $x^{2}-y^{2}+2\left(3x+y\right)=23.$

b) Cho đa thức $P\left(x\right)=x^{2}+bx+c$ có hai nghiệm nguyên. Biết rằng $\left|c\right|\leq 16$ và $\left|P(9)\right|$ là số nguyên tố. Tìm các hệ số $b, c$.

**Lời giải.**

a) Ta biến đổi phương trình như sau

$$x^{2}-y^{2}+2\left(3x+y\right)=23⇔\left(x^{2}+6x+9\right)-\left(y^{2}-2y+1\right)=31.$$

$$⇔\left(x+3\right)^{2}-\left(y-1\right)^{2}=31$$

$$⇔\left(x-y+4\right)\left(x+y+2\right)=31$$

Từ đây, ta xét bảng sau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| $$x-y+4$$ | 31 | 1 | -31 | -1 |
| $$x+y+2$$ | 1 | 31 | -1 | -31 |
| $$x$$ | 13 | 13 | -19 | -19 |
| $$y$$ | -14 | 16 | 16 | -14 |

Vậy tất cả các nghiệm $(x, y)$ thoả mãn là $\left(13, -14\right), \left(13, 16\right), \left(-19, 16\right), (-19, -14)$.

b) Gọi hai nghiệm nguyên của $P\left(x\right)=x^{2}+bx+c$ là $u, v.$

Theo định lí Viete ta được $u+v=-b, uv=c.$

Vì $\left|P\left(9\right)\right|$ là số nguyên tố nên $\left|\left(9-u\right)\left(9-v\right)\right|$ là số nguyên tố dẫn đến $\left|9-u\right|=1$ hoặc $\left|9-v=1\right|.$ Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\left|9-u\right|=1⇔u\in \left\{8, 10\right\}.$

* Trường hợp 1. $u=10, $vì $\left|c\right|\leq 16$, nên $\left|v\right|\in \left\{0, 1\right\}⇔v\in \left\{-1, 0, 1\right\}.$

Mặt khác $9-1=8, 9-0=9, 9+1=10$ đều không là số nguyên tố nên trường hợp này loại,

* Trường hợp 2. $u=8$, vì $\left|c\right|\leq 16$ nên $\left|v\right|\leq 2$

Mà $v$ phải là số chẵn nên từ đây suy ra $v\in \left\{2, -2\right\}.$ Thử lại cả hai giá trị này thoả mãn và ta nhận được giá trị của $b, c $tương ứng là $-10, 16$ và $-6, -16.$

Vậy tất cả cặp $\left(b,c\right)$ thoả mãn là$\left(b, c\right)\in \left\{\left(-10, 16\right), \left(-6, 16\right)\right\}$

**Câu 3:** Xét các số thực không âm $a, b, c$ thoả mãn $a^{2}+b^{2}+c^{2}=1.$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P=\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}$

**Lời giải.** Ta có nhận xét sau

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\right)^{2}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{2}{\sqrt{(1+a)(1+b)}}=\frac{a+b+2}{ab+a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{ab+a+b+1}}\leq \frac{a+b+2}{a+b+1}+\frac{2}{\sqrt{a+b+1}}=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}\right)^{2}$$

Do đó ta được

$$\frac{1}{\sqrt{a+1}}+\frac{1}{\sqrt{b+1}}\leq 1+\frac{1}{\sqrt{a+b+1}}$$

Mặt khác, ta có $\left(a+b+c\right)^{2}\geq a^{2}+b^{2}+c^{2}=1$ suy ra $a+b\geq 1-c$.

Từ đây kết hợp với $c\leq 1$ (Vì $c\geq 0$ và $c^{2}\leq 1$), ta suy ra

$$P\leq 1 1+\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}=1+\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2-c}}+\frac{1}{\sqrt{c+2}}\right)^{2}}=1+\sqrt{\frac{1}{2-c}+\frac{1}{2+c}+\frac{2}{\sqrt{4-c^{2}}}}$$

$$=1+\sqrt{\frac{4}{4-c^{2}}+\frac{2}{4-c^{2}} }\leq 1+\sqrt{\frac{4}{4-1}+\frac{2}{\sqrt{4-1}}}=2+\frac{1}{\sqrt{3}}$$

Dấu bằng xảy ra chẳng hạn khi $a=b=0, c=1.$ Vậy giá trị lớn nhất của $P$ là $2+\frac{1}{\sqrt{3}}$.

**Câu 4:** Cho đường tròn *(O)* đường kính *AB.* Đường thẳng$Δ$tiếp xúc với *(O)* tại *A,* I là điểm cố định trên đoạn *AB* và *CD* là dây cung thay đổi của *(O)* luôn đi qua *I*. Các đường thẳng *BC, BD* cắt$Δ$lần lượt tại *M, N.*

a) Chứng minh rằng *CDNM* là tứ giác nội tiếp.

b) Gọi *K* là giao điểm thứ hai của đường tròn ngoại tiếp tam giác *BMN* với đường thẳng *AB.* Chứng minh rằng *KMCI* là tứ giác nội tiếp và tích$AM.AN$không đổi.

c) Gọi *T* là tâm đường tròn ngoại tiếp tứ giác *CDNM.* Tìm vị trí của *CD* sao cho độ dài đoạnthẳng *BT* nhỏ nhất*.*

**Lời giải.**

**

a) Áp dụng hệ thức lượng cho hai tam giác *BAM* và *BAN* với hai đường cao tương ứng là *AC, AD* ta có $BA^{2}=BC.BM=BD.BN.$ Vì vậy tứ giác *CDNM* nội tiếp.

b) Ta có biến đổi góc $\hat{MKB}=\hat{MNB}=\hat{DCB}$, vì vậy tứ giác *CIKM* nội tiếp.

Do đó $BC.BM=BI.BK=BA^{2},$ từ đây suy ra *K* là điểm cố định.

c) Gọi *r* là bán kính *(T)* thì $r^{2}-TA^{2}=AM.AN=a$ không đổi. *TA* cũng có $ID.IC$ không đổi, đặt $b=ID.IC=r^{2}-TI^{2}$ suy ra $TI^{2}-TA^{2}=a-b.$

Gọi *H* là hình chiếu của *K* lên *AB* theo định lý Pythagore ta có

$$\left(AI+2AH\right).AI=HI^{2}-HA^{2}=\left(TI^{2}-TH^{2}\right)-\left(TA^{2}-TH^{2}\right)=TI^{2}-TA^{2}=a-b.$$

Từ đây kết hợp với *AI* không đổi (*A* và *I* cố định) suy ra *H* cố định do đó *BH* không đổi.

Khi đó, theo định lý Pythagore ta có

$$BT^{2}=TH^{2}+BH^{2}\geq BH^{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi *T* trùng *H* tức là *BA* là trung trực của *CD* suy ra *CD* vuông góc *AB* tại *I.* Vậy khi *CD* vuông góc *AB* tại *I* thì độ dài đoạn thẳng *BT* nhỏ nhất.

**Câu 5:** Gọi *M* là tập hợp tất cả các số tự nhiên có 2 chữ số khác nhau. Tìm số nguyên dương *k* lớn nhất để tồn tại tập hợp con *A* có *k* phần tử của tập hợp *M* sao cho tích của 4 số bất kì thuộc tập hợp *A* đều chia hết cho 3.

**Lời giải.**

Trước hết, ta đếm số phần tử thuộc *M* mà chia hết cho 3

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 1, 4, 7 có 9 số thoả mãn

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 2, 5, 8 có 9 số thoả mãn

Ứng với các số có chữ số hàng chục là 3, 6, 9 có 9 số thoả mãn

Vì vậy số phần tử chia hết cho 3 thuộc *M* là 27, ta chứng minh $\left|A\right|\_{max}=30,$ thật vậy.

Trước hết, *A* không thể chứa quá 4 phần tử không chia hết cho 3 bởi vì tích của chúng sẽ không chia hết cho 3. Do đó $\left|A\right|\leq 30.$

Xây dựng dấu bằng. Xét *A* là tập hợp các số có 2 chữ số khác nhau chia hết cho 3 và 3 phần tử bất kì thuộc các số còn lại.

Vậy số nguyên dương *k* lớn nhất thoả mãn yêu cầu đề bài là 30.