

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN QUỐC GIA
DỰ THI IMO 1999

Ngày thi thứ nhất.

Bài 1.

Cho số nguyên tố lẻ p thỏa $2^h \not\equiv 1 \pmod{p}$ với mọi $h < p-1, h \in \mathbb{N}^*$ và một số chẵn $a \in (\frac{p}{2}; p)$.

Xét dãy số (a_n) xác định bởi: $a_0 = a, a_{n+1} = p - b_n, n = 0, 1, 2, \dots$ với b_n là ước số lẻ lớn nhất của a_n . Chứng minh rằng (a_n) là dãy số tuần hoàn và tìm chu kì dương nhỏ nhất của nó.

Bài 2.

Hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$ có hệ số thực được gọi là “đồng dạng” nếu tồn tại một số thực q thỏa mãn $f(x) = q \cdot g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

1. Chứng minh rằng tồn tại đa thức $P(x)$ có bậc 1999 với hệ số thực và thỏa mãn $P^2(x) - 4$ và $(P'(x))^2(x^2 - 4)$ “đồng dạng”.
2. Hỏi có bao nhiêu đa thức bậc 1999 thỏa mãn điều kiện trên?

Bài 3.

Cho một đa giác lồi (H). Chứng minh rằng với mỗi số thực $a \in (0, 1)$, tồn tại 6 điểm phân biệt nằm trên các cạnh của (H), kí hiệu là $A_1, A_2, \dots, A_6$ theo chiều kim đồng hồ, thỏa đồng thời hai điều kiện sau:

1. $\overline{A_1 A_2} = \overline{A_5 A_4} = a \cdot \overline{A_6 A_3}$.
2. Các đường thẳng $A_1 A_2, A_5 A_4$ cách đều đường thẳng $A_6 A_3$.

Ngày thi thứ hai.

Bài 4.

Cho dãy số thực dương (u_n) . Với mỗi số nguyên dương n , kí hiệu k_n là số nguyên dương nhỏ nhất thỏa mãn $\sum_{i=1}^{k_n} \frac{1}{i} \geq \sum_{i=1}^n u_i$.

Chứng minh rằng dãy $\left(\frac{k_{n+1}}{k_n} \right)$ có giới hạn hữu hạn khi và chỉ khi (u_n) có giới hạn hữu hạn.

Bài 5.

Cho tam giác $A_1 A_2 A_3$ nội tiếp trong đường tròn (O). Một đường tròn (K_1) tiếp xúc với các cạnh $A_1 A_2, A_1 A_3$ và tiếp xúc trong với đường tròn (O) lần lượt tại các điểm M_1, N_1, P_1 . Các điểm M_1, N_2, P_2 và M_3, N_3, P_3 xác định một cách tương tự.

Chứng minh rằng các đoạn thẳng M_1N_1, M_2N_2, M_3N_3 cắt nhau tại trung điểm mỗi đoạn.

Bài 6.

Cho $p > 2$ là một số nguyên tố. Xét đa giác có p cạnh với một con khỉ tại mỗi đỉnh. Người ta cho p hạt đậu cho mỗi con khỉ với quy tắc như sau:

Cho hạt đậu đầu tiên cho một con khỉ nào đó, hạt đậu tiếp theo cho con khỉ ở đỉnh thứ ba tính từ vị trí của con khỉ nhận được hạt đậu đầu tiên theo chiều kim đồng hồ, hạt đậu thứ ba được cho con khỉ thứ năm tính từ vị trí con khỉ được nhận hạt đậu thứ hai theo chiều kim đồng hồ và cứ như thế...Tức là hạt đậu thứ $k + 1$ được cho con khỉ tại đỉnh thứ $2k + 1$ tính từ vị trí của con khỉ được nhận hạt đậu thứ k .

1. Hỏi có bao nhiêu con khỉ không được nhận hạt đậu nào?
2. Có bao nhiêu cạnh của đa giác có tính chất cả hai con khỉ ở đầu và cuối của cạnh đó đều nhận được các hạt đậu?