

ĐỀ SỐ 5: ĐỀ TỰ LUYỆN BỒI DƯỠNG HSG CẤP HUYỆN LỚP 8

NĂM HỌC: 2023-2024

Thời gian làm bài 120 phút

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$ là:

A. $A = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$

B. $A = \frac{(x+1)^2}{x^2 - 1}$

C. $A = \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}$

D. $A = \frac{(x-1)^2}{x^2 - 1}$

Câu 2. Cho x; y là hai số khác nhau sao cho $x^2 - y = y^2 - x$; Giá trị của biểu thức $K = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$ là:

A. 4

B. 5

C. 6

D. 7

Câu 3. Cho hệ trục tọa độ Oxy và các điểm M(-2;1), N(1;1). Khi đó độ dài đoạn thẳng MN là bao nhiêu? (đơn vị trên các trục tọa độ là centimet).

A. 3cm

B. -1cm

C. 2cm

D. 3dm

Câu 4. Gọi A, B lần lượt là giao điểm của đường thẳng $y = 2x - 2$ với hai trục Ox; Oy. Khi đó diện tích của tam giác OAB là: (đơn vị trên các trục tọa độ là centimet).

A. 1cm^2

B. -1cm^2

C. 2cm^2

D. -2cm^2

Câu 5. Bạn An gieo một con xúc xắc 50 lần và thống kê kết quả các lần gieo ở bảng sau:

Mặt	1 chấm	2 chấm	3 chấm	4 chấm	5 chấm	6 chấm
Số lần xuất hiện	10	8	6	12	4	10

Xác suất thực nghiệm của biến cố “Gieo được mặt 1 chấm” là bao nhiêu % ?

A. 20%

B. 10%

C. 15%

D. 25%

Câu 6. Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x - 6$ là:

A. $a = 7; b = 6$

B. $a = -7; b = -6$

C. $a = -7; b = 6$

D. $a = 7; b = -6$

Câu 7. Giá trị a để đa thức $x^3 - x^2 - 7x + a$ chia hết cho đa thức $x - 3$ là:

A. 1

B. 2

C. 3

D. Một kết quả khác

Câu 8. các hằng số a và b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x + 1$ dư 7; chia cho $x - 2$ dư 4 là:

A. $a=4; b=4$

B. $a=-4; b=-4$

C. $a=-4; b=4$

D. $a=4; b=-4$

Câu 9. Độ dài chiều cao của hình thang cân ABCD, biết rằng cạnh BC=25cm, các cạnh đáy AB=10cm, CD=24cm là:

A. 22cm

B. 20cm

C. 24cm

D. Một kết quả khác

Câu 10. Cho tam giác đều ABC, có diện tích bằng 12cm^2 . Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm P, Q và R sao cho $QP \perp AB, RQ \perp BC, PR \perp AC$. Diện tích tam giác PQR là:

A. 6

B. 4

C. 3

D. 2

Câu 11. Cho tứ giác ABCD có $\angle B + \angle D = 180^\circ$, hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Vẽ tia phân giác của hai góc $\angle BFC$ và $\angle CED$, chúng cắt nhau tại M. Số đo góc EMF là:

A. 50°

B. 60°

C. 30°

D. 90°

Câu 12. Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 75^\circ$, đường cao AH, H thuộc đoạn BC và $BH = \sqrt{3} CH$. Chứng minh rằng: $AH = BH$. Góc ABC là:

A. 45°

B. 60°

C. 75°

D. 30°

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\angle C = 40^\circ$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3} AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3} AH$. Số đo góc BIK là:

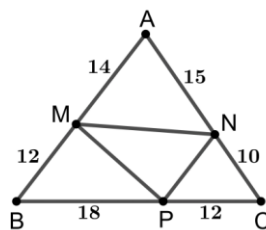
A. 30° ;

B. 40°

C. 45° ;

D. 60°

Câu 14: Cho hình vẽ:



Khẳng định nào sau đây là đúng?

A. $NP \parallel AB$

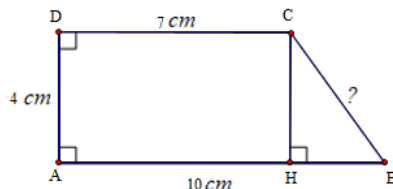
B. $MN \parallel BC$

C. $MP \parallel AC$

D. $MP \parallel AN$

Câu 15: Cho hình vẽ bên. Độ dài BC bằng

A. $5cm$; B. $6cm$; C. $7cm$; D. $10cm$



Câu 16: Áp suất khí quyển tại mặt đất là $760mmHg$. Biết rằng cứ lên cao $12(m)$ thì áp suất khí quyển giảm $1mmHg$. Tại đỉnh núi cao $504(m)$ thì áp suất khí quyển là bao nhiêu?

A. $718mmHg$

B. $42mmHg$

C. $256mmHg$

D. $802mmHg$

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm): a. Cho 3 số tự nhiên a, b, c . Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 3c^2a + 3ca^2$ chia hết cho 6.

b. Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp.

Chứng rằng: $ab - a - b + 1$ chia hết cho 192

Câu 2 (3,0 điểm): 1. Cho đa thức $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ (trong đó x là biến số a, b, c là các hệ số). Biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x - 2$ và khi đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $x^2 - 1$ thì được phần dư là x . Tính giá trị biểu thức $T = 6a + 3b + 3c$.

2. Giải phương trình sau:

$$a) (x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$$

$$b) 6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$$

Câu 3 (4,5 điểm): Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$.

a. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác vuông cân.

b. Gọi E là giao điểm của AD với BN , F là giao điểm của AM với BD . Chứng minh rằng $EF \parallel DM$.

c. Gọi K là giao điểm của MN với BD , AK cắt DC ở H . Lấy các điểm P, Q, I lần lượt là trung điểm của BH, BE, EH ; AQ cắt CP tại J . Chứng minh D, I, J thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$G = |x + 2y + 3z| \text{ biết rằng ba số } x, y, z \text{ thỏa mãn điều kiện } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

---Hết---

ĐÁP ÁN VÀ HƯỚNG DẪN CHẤM

I. Phần trắc nghiệm (8,0 điểm) Chọn một phương án đúng

Câu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Đáp án	C	A	A	A	A	C	C	C	C	B
Câu	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
Đáp án	D	A	B	A	A	A				

HƯỚNG DẪN

Câu 1. Sau khi rút gọn biểu thức $A = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1}$. Rút gọn biểu thức A.

Giải:

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1} = \frac{x^4 + x^3 + x + 1}{x^4 - x^3 + x^2 + x^2 - x + 1} \\
 &= \frac{x^3(x+1) + (x+1)}{x^2(x^2 - x + 1) + (x^2 - x + 1)} = \frac{(x+1)(x^3 + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x+1)^2(x^2 - x + 1)}{(x^2 - x + 1)(x^2 + 1)} = \frac{(x+1)^2}{(x^2 + 1)} \\
 A &= \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Câu 2: Cho x; y là hai số khác nhau sao cho $x^2 - y = y^2 - x$; Giá trị của biểu thức $K = x^2 + 2xy + y^2 - 3x - 3y$ là: 4

Câu 3. Cho $a + b + c = 0$ và $abc \neq 0$, tính giá trị của biểu thức:

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} \\
 P &= \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - b^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - c^2} = \frac{1}{b^2 + c^2 - (b+c)^2} + \frac{1}{a^2 + c^2 - (a+c)^2} + \frac{1}{a^2 + b^2 - (a+b)^2} \\
 &= \frac{1}{-2bc} + \frac{1}{-2ac} + \frac{1}{-2ab} = \frac{a+b+c}{-2abc} = 0
 \end{aligned}$$

Câu 4. Tìm giá trị của x thỏa mãn cả hai bất phương trình

$$\begin{aligned}
 \frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} &\geq \frac{3x+2}{2} \\
 * \quad \frac{2x}{5} + \frac{3-2x}{3} &\geq \frac{3x+2}{2} \Leftrightarrow 12x + 30 - 20x \geq 45x + 30 \\
 &\Leftrightarrow 12x - 20x - 45x \geq 0 \Leftrightarrow -53x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0
 \end{aligned} \tag{1}$$

Câu 5. Giải phương trình $|x-1| + |x+2| - 2|x-3| = 2005$ (2).

Giải:

Ta lập bảng xét dấu về trái của (2) ta được:

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$
$ x-1 $	$1-x$	$1-x$	0	$x-1$	$x-1$
$ x+2 $	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$	$x+2$
$-2 x-3 $	$2x-6$	$2x-6$	$2x-6$	0	$-2x-6$
VT	-7	$2x-3$	$4x-5$	7	

Theo bảng trên ta có:

- Nếu $x \leq -2$, do $-7 \neq 2005$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

- Nếu $-2 < x < 1$ phương trình (2) $\Leftrightarrow 2x - 3 = 2005$

$$\Leftrightarrow 2x = 2008$$

$$\Leftrightarrow x = 1004 \text{ (không thỏa mãn).}$$

- Nếu $1 \leq x < 3$ phương trình (2) $\Leftrightarrow 4x - 5 = 2005$

$$\Leftrightarrow 4x = 2010$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1005}{2} \text{ (không thỏa mãn).}$$

- Nếu $x \geq 3$, do $7 \neq 2005$ nên phương trình (2) vô nghiệm.

Tóm lại: Phương trình (2) vô nghiệm.

Câu 6: Xác định các hệ số a, b để đa thức $f(x) = x^3 + ax + b$ chia hết cho đa thức $x^2 + x - 6$
 $f(x)$ chia hết cho $x^2 + x - 6 \Rightarrow f(x)$ chia hết cho $(x+3)(x-2)$

$$\Rightarrow f(-3) = 0 \Leftrightarrow -3a + b = 27 \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta có } f(2) = 0 \Leftrightarrow 2a + b = -8 \quad (2)$$

$$\text{Trừ hai vế của (1) cho (2) ta được: } -5a = 35 \Leftrightarrow a = -7$$

Thay $a = -7$ vào (1) tìm được $b = 6$

Câu 7. Tìm a để đa thức $x^3 - x^2 - 7x + a$ chia hết cho đa thức $x - 3$

Để đa thức $x^3 - x^2 - 7x + a$ chia hết cho đa thức $x - 3$

$$\text{thì dư } a - 3 = 0 \text{ hay } a = 3.$$

**Câu 8. Các hằng số a và b sao cho $x^3 + ax + b$ chia cho $x+1$ dư 7;
 chia cho $x-2$ dư 4.**

$$\text{c/ Vì } x^3 + ax + b \text{ chia cho } x+1 \text{ dư 7 nên ta có: } x^3 + ax + b = (x+1)Q(x) + 7$$

$$\text{do đó với } x = -1 \text{ thì } -1 - a + b = 7, \text{ tức là } a - b = -8 \quad (1).$$

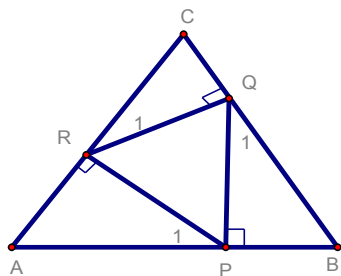
$$\text{Vì } x^3 + ax + b \text{ chia cho } x-2 \text{ dư 4 nên ta có: } x^3 + ax + b = (x-2)P(x) + 4$$

$$\text{do đó với } x = 2 \text{ thì } 8 + 2a + b = 4, \text{ tức là } 2a + b = -4 \quad (2).$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra } a = -4; b = 4.$$

Câu 9. Tính chiều cao của hình thang cân ABCD, biết rằng cạnh BC=25cm, các cạnh đáy AB=10cm, CD=24cm là: 24cm (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 119)

Câu 10. Cho tam giác đều ABC, có diện tích bằng 12 cm^2 . Trên các cạnh AB, BC, CA lấy lần lượt các điểm P, Q và R sao cho $QP \perp AB, RQ \perp BC, PR \perp AC$. Tính diện tích tam giác PQR.



- Chứng minh được $\triangle RPQ$ đều

$\Rightarrow PQ = QR = RP = b, R_1 = P_1 = Q_1 = 30^\circ$. Do đó $\triangle APR = \triangle BPQ = \triangle CQR$ (cgc)

$$\Rightarrow AR = CQ = BP = \frac{b\sqrt{3}}{3}, AP = CR = BQ = \frac{2b\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{Mặt khác: } AB = AP + PB = \frac{b\sqrt{3}}{3} + \frac{2b\sqrt{3}}{3} = b\sqrt{3}$$

$$\text{Ta có } \frac{S_{PQR}}{S_{ABC}} = \left(\frac{PQ}{AB}\right)^2 = \left(\frac{b}{b\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow S_{PQR} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4 \text{ cm}^2$$

Câu 11. Cho tứ giác ABCD có $\angle B + \angle D = 180^\circ$, hai đường thẳng AD và BC cắt nhau tại E, hai đường thẳng AB và DC cắt nhau tại F. Vẽ tia phân giác của hai góc $\angle BFC$ và $\angle CED$, chúng cắt nhau tại M. Số đo góc EMF là: 90° (Bồi dưỡng HSG toán Hình học 8 Trang 128)

Câu 12. Cho tam giác ABC có $\angle BAC = 75^\circ$, đường cao AH, H thuộc đoạn BC và $BH = \sqrt{3} CH$. Chứng minh rằng: $AH = BH$. Góc ABC, ACB.

Trên tia HA lấy A' sao cho $HA' = HB$

Tam giác A'HB vuông cân tại H $\Rightarrow$ góc $HA'B = 45^\circ$

Xét tam giác vuông A'HC

Tính được góc $CA'H = 30^\circ$

Do đó góc $CA'B = 75^\circ$

$\Rightarrow A, A'$ cùng thuộc một cung chứa góc 75°

dựng trên đoạn BC

mà A, A' cùng nằm trên tia HA

$\Rightarrow A \equiv A'$

$\Rightarrow AH = BH$

Từ đó tính được góc $ACB = 60^\circ$, góc $ABC = 45^\circ$

Câu 13. Cho tam giác ABC vuông tại A, $\angle C = 40^\circ$, đường cao AH, điểm I thuộc cạnh AC sao cho $AI = \frac{1}{3} AC$, điểm K thuộc tia đối của tia HA sao cho $HK = \frac{1}{3} AH$. Số đo góc BIK là:

$\angle C = 40^\circ$ (Bồi dưỡng HSG hình học 9 Trang 15)

Câu 14. Cho hình vuông ABCD; Trên tia đối tia BA lấy E, trên tia đối tia CB lấy F sao cho $AE = CF$

Chứng minh $\triangle EDF$ vuông cân

Ta có $\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \triangle EDF$ cân tại D

Mặt khác: $\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow \hat{E}_1 = \hat{F}_2$

Mà $\hat{E}_1 + \hat{E}_2 + \hat{F}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{F}_2 + \hat{E}_2 + \hat{F}_1 = 90^\circ$

$\Rightarrow EDF = 90^\circ$. Vậy $\triangle EDF$ vuông cân

Câu 15. Cho tam giác ABC, kẻ đường cao AH. Gọi E, F, G lần lượt là trung điểm của AB; AC; BC. Chứng minh EFGH là hình thang cân

Chứng minh được EFGH là hình thang

- Chứng minh được hai đường chéo $EG = HF$, từ đó suy ra EFGH là hình thang cân

Câu 16. Tham gia SEA Games 22 môn bóng đá nam vòng loại ở bảng B có bốn đội thi đấu theo thể thức đấu vòng tròn một lượt và tính điểm theo quy định hiện hành. Kết thúc vòng loại, tổng số điểm các đội ở bảng B là 17 điểm. Hỏi ở bảng B môn bóng đá nam có mấy trận hòa?

Bài giải:

Bảng B có 4 đội thi đấu vòng tròn nên số trận đấu là : $4 \times 3 : 2 = 6$ (trận)

Mỗi trận thắng thì đội thắng được 3 điểm đội thua thì được 0 điểm nên tổng số điểm là : $3 + 0 = 3$ (điểm). Mỗi trận hòa thì mỗi đội được 1 điểm nên tổng số điểm là : $1 + 1 = 2$ (điểm).

Cách 1: Giả sử 6 trận đều thắng thì tổng số điểm là : $6 \times 3 = 18$ (điểm). Số điểm dôi ra là : $18 - 17 = 1$ (điểm). Sở dĩ dôi ra 1 điểm là vì một trận thắng hơn một trận hòa là : $3 - 2 = 1$ (điểm). Vậy số trận hòa là : $1 : 1 = 1$ (trận)

Cách 2: Giả sử 6 trận đều hòa thì số điểm ở bảng B là : $6 \times 2 = 12$ (điểm). Số điểm ở bảng B bị hụt đi : $17 - 12 = 5$ (điểm). Sở dĩ bị hụt đi 5 điểm là vì mỗi trận hòa kém mỗi trận thắng là : $3 - 2 = 1$ (điểm). Vậy số trận thắng là : $5 : 1 = 5$ (trận). Số trận hòa là : $6 - 5 = 1$ (trận).

II. Phần tự luận (12,0 điểm)

Câu 1 (3,5 điểm): a. Cho 3 số tự nhiên a, b, c . Chứng minh rằng nếu $a + b + c$ chia hết cho 3 thì $a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$ chia hết cho 6. (3 điểm)

$$A = a + b + c : 3 \Rightarrow 2A : 6; \quad B = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2 + 3b^2 + 3c^2$$

$$C = B + 2A = a^3 + 3a^2 + 2a + b^3 + 3b^2 + 2b + c^3 + 3c^2 + 2c$$

$$= a(a+1)(a+2) + b(b+1)(b+2) + c(c+1)(c+2)$$

$a(a+1)(a+2)$, $b(b+1)(b+2)$, $c(c+1)(c+2)$ là tích của 3 số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 $\Rightarrow C : 6 \Rightarrow B : 6$

b. Cho a, b là bình phương của hai số nguyên lẻ liên tiếp. Chứng rằng: ab

$- a - b + 1$ chia hết cho 192

Vì a, b là hai số chính phương liên tiếp nên giả sử $a < b$, ta có:

$$a = (2k - 1)^2; b = (2k + 1)^2 \text{ với } k \in \mathbb{Z}; k \neq 0$$

$$ab - a - b + 1 = (a - 1)(b - 1) = 16k^2(k - 1)(k + 1)$$

Vì $k(k + 1)(k - 1)$ luôn chia hết cho 3 với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$.

Và $k^2(k + 1)(k - 1)$ luôn chia hết cho 4, với mọi k thuộc $\mathbb{Z}$.

Kết hợp với $(3, 4) = 1$

nên $ab - a - b + 1$ chia hết cho $16.12 = 192$ (đpcm)

Câu 2 (3,0 điểm):1.

Cho đa thức $f(x) = 2x^4 + ax^2 + bx + c$ (trong đó x là biến số a, b, c là các hệ số). Biết đa thức $f(x)$ chia hết cho đa thức $x - 2$ và khi đa thức $f(x)$ chia cho đa thức $x^2 - 1$ thì được phần dư là x . Tính giá trị biểu thức $T = 6a + 3b + 3c$.

Lời giải

Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho đa thức $x - 2$ là $g(x)$

$$\text{Vì } f(x) \text{ chia hết cho } x - 2 \text{ nên } f(x) = (x - 2)g(x) \forall x \Leftrightarrow 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x - 2)g(x)$$

$$\text{Với } x = 2 \text{ ta có } 32 + 4a + 2b + c = 0 \Leftrightarrow 4a + 2b + c = -32 \quad (1)$$

Gọi thương của phép chia $f(x)$ cho đa thức $x^2 - 1$ là $h(x)$

$$\text{Vì } f(x) \text{ chia cho } x^2 - 1 \text{ dư là } x \text{ nên } f(x) = (x^2 - 1)h(x) + x \Leftrightarrow 2x^4 + ax^2 + bx + c = (x^2 - 1)h(x) + x$$

$$\text{Với } x = 1 \text{ ta có } 2 + a + b + c = 1 \Leftrightarrow a + b + c = -1 \quad (2)$$

$$\text{Với } x = -1 \text{ ta có } 2 + a + b + c = -1 \Leftrightarrow a - b + c = -3 \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2) và (3) ta có } \begin{cases} 4a + 2b + c = -32 \\ a + b + c = -1 \\ a - b + c = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-32}{3} \\ b = 1 \\ c = \frac{26}{3} \end{cases}$$

$$\text{Khi đó } T = 6a + 3b + 3c = -64 + 3 + 26 = -45.$$

2. Giải phương trình sau:

$$\text{a) } (x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$$

$$\text{b) } 6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$\text{a) } (x - 7)^4 + (x - 8)^4 = (15 - 2x)^4$$

Đặt $x - 7 = a$; $x - 8 = b$; $15 - 2x = c$ thì $-c = 2x - 15 \Rightarrow a + b = -c$, Nên

$$(x-7)^4 + (x-8)^4 = (15-2x)^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 = c^4 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - c^4 = 0 \Leftrightarrow a^4 + b^4 - (a+b)^4 = 0$$

$$\Leftrightarrow 4ab(a^2 + \frac{3}{2}ab + b^2) = 0 \Leftrightarrow 4ab \left[\left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \right] = 0 \Leftrightarrow 4ab = 0$$

$$(\forall i \left(a + \frac{3}{4}b\right)^2 + \frac{7}{16}b^2 \geq 0 \text{ nhưng không xảy ra dấu bằng}) \Leftrightarrow ab = 0 \Leftrightarrow x = 7; x = 8$$

$$b) 6x^4 + 7x^3 - 36x^2 - 7x + 6 = 0 \Leftrightarrow 6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0$$

$$(\forall x \neq 0 \text{ không là nghiệm}). \text{ Đặt } x - \frac{1}{x} = y \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 + 2, \text{ thì}$$

$$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 7\left(x - \frac{1}{x}\right) - 36 = 0 \Leftrightarrow 6(y^2 + 2) + 7y - 36 = 0 \Leftrightarrow 6y^2 + 7y - 24 = 0$$

$$\Leftrightarrow (6y^2 - 9y) + (16y - 24) = 0 \Leftrightarrow (3y + 8)(2y - 3) = 0$$

$$+) 3y + 8 = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = -\frac{8}{3} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (x+3)(3x-1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+3=0 \\ 3x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-3 \\ x=\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$+) 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{3}{2} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (2x+1)(x-2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ 2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=-\frac{1}{2} \end{cases}$$

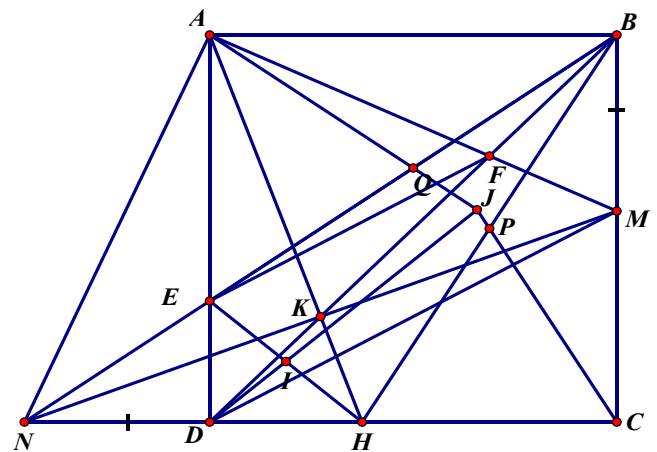
Câu 3 (4,0 điểm):

Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy điểm M , trên tia đối của tia DC lấy điểm N sao cho $BM = DN$.

1. Chứng minh rằng tam giác AMN là tam giác vuông cân.

2. Gọi E là giao điểm của AD với BN , F là giao điểm của AM với BD . Chứng minh rằng $EF \parallel DM$.

3. Gọi K là giao điểm của MN với BD , AK cắt DC ở H . Lấy các điểm P, Q, I lần lượt là trung điểm của BH, BE, EH ; AQ cắt CP tại J . Chứng minh D, I, J thẳng hàng.



Lời giải

1) Chứng minh được $\triangle ABM = \triangle ADN$ (c.g.c)

$\Rightarrow AM = AN$ và $\angle BAM = \angle DAN$ (2 góc tương ứng) (1)

Mà $BAM + MAD = 90^\circ$ (vì $ABCD$ là hình vuông)

$$\Rightarrow DAN + MAD = 90^\circ \Rightarrow MAN = 90^\circ \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle AMN$ vuông cân

$$2) \triangle END \text{ có } AB \parallel CD \Rightarrow \frac{ED}{EA} = \frac{DN}{AB} \text{ (hệ quả talet)} \quad (3)$$

$$\triangle BFM \text{ có } BM \parallel AD \Rightarrow \frac{FM}{FA} = \frac{BM}{DA} \text{ (hệ quả talet)} \quad (4)$$

Mà $DN = BM$ (gt); $DN = BM$ (gt) và $AB = AD$ (cạnh hình vuông $ABCD$)

$$\text{Nên từ (3) và (4), ta có: } \frac{ED}{EA} = \frac{FM}{FA}$$

$$\text{Xét } \triangle ADM \text{ có: } E \in AD, F \in AM. \text{ Mà } \frac{ED}{EA} = \frac{FM}{FA} \text{ (cmt)}$$

Nên : $EF \parallel DM$ (talet đảo)

3) Chứng minh được $S_{JAB} + S_{JDC} = S_{JBC} + S_{JAD}$

$$S_{JAB} + S_{JDH} + S_{JHC} = S_{JEA} + S_{JED} + S_{JBC} \quad (1)$$

Mà Q là trung điểm của BE . Chứng minh được $S_{JAB} = S_{JEA}$

$$P \text{ là trung điểm của } BH. \text{ Chứng minh được } S_{JHC} = S_{JBC} \quad (2)$$

Từ (1) và (2), ta có: $S_{JDH} = S_{JED}$

Mà E và H nằm trên hai nửa mặt phẳng bờ JD .

Gọi EH giao với JD là I' , h_1, h_2 là khoảng cách từ E và H đến JD

Vì $S_{JDH} = S_{JED}$ nên $h_1 = h_2$

Từ đó chứng minh I' là trung điểm của EH . Vậy I' trùng I

Vậy D, I, J thẳng hàng.

Câu 4 (1,0 điểm): Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức:

$$G = |x + 2y + 3z| \text{ biết rằng ba số } x, y, z \text{ thoả mãn điều kiện } x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

Lời giải:

Áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpski, ta có:

$$(x + 2y + 3z)^2 \leq (1^2 + 2^2 + 3^2)(x^2 + y^2 + z^2) = 14$$

$\Rightarrow |x + 2y + 3z| \leq \sqrt{14}$, dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3} \Rightarrow y = 2x, z = 3x$.

Vậy $\max G = \sqrt{14}$ khi và chỉ khi $y = 2x, z = 3x$.

Hết