Nguyễn Hữu Điển

OLYMPIC TOÁN NĂM 2000
52 ĐỀ THI VÀ LỜI GIẢI
(Tập 1)

NHÀ XUẤT BẢN GIÁO DỤC

Lời nói đầu

Để thử gói lệnh lamdethi.sty tôi biên soạn một số đề toán thi Olympic, mà các học trò của tôi đã làm bài tập khi học tập LaTeX. Để phục vụ các bạn ham học toán tôi thu thập và gom lại thành các sách điện tử, các bạn có thể tham khảo. Mỗi tập tôi sẽ gom khoảng 50 bài với lời giải. Tập này có sự đóng góp của Bùi Thế Anh, Vũ Thị Hồng Hạnh, Cao Thị Mai Len, Tạ Xuân Hòa, Nguyễn Thị Loan, Nguyễn Thị Quý Sửu, Nguyễn Thị Định, Nguyễn ngọc Long.

Rất nhiều bài toán dịch không được chuẩn, nhiều điểm không hoàn toàn chính xác vậy mong bạn đọc tự ngẫm nghĩ và tìm hiểu lấy. Nhưng đây là nguồn tài liệu tiếng Việt về chủ đề này, tôi đã có xem qua và người dịch là chuyên về ngành Toán phổ thông. Bạn có thể tham khảo lại trong [1].

Rất nhiều đoạn vì mới học TeX nên cấu trúc và bố trí còn xấu, tôi không có thời gian sửa lại, mong các bạn thông cảm.

Hà Nội, ngày 2 tháng 1 năm 2010

Nguyễn Hữu Điển

$\frac{51}{\text{GD-05}}$89/176-05 Mã số: 8I092M5

Mục lục

Chương 1

Đề thi olympic Belarus

▷**1.1**. *Hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD cắt nhau ở M. Đường phân giác của góc ACD cắt tia BA ở K . Nếu $MA.MC + MA.CD = MB.MD$ thì $\widehat{BKC} = \widehat{CDB}$.*

Lời giải: Gọi N là giao điểm của CK và BD. Áp dụng định lí về đường phân giác cho tam giác MCD

$$\frac{CD}{ND} = \frac{MC}{MN}$$

Hay

$$CD = \frac{MC.DN}{MN}$$

khi đó có $MB.MD = MA.MC + MA$

$$\frac{MC.DN}{MN} = (MA.MC)\frac{MD}{MN}$$

Hay $MA.MC = MB.MN$

Vì M nằm trong tứ giác $ABCN$, theo định lí về phương tích của một điểm thì A, B, C và N cùng nằm trên một đường tròn.

Từ đó:

$$\widehat{KBD} = \widehat{ABN} = \widehat{ACN} = \widehat{NCD} = \widehat{KCD}$$

Suy ra K, B, C và D cùng nằm trên một đường tròn. Do đó có

$$\widehat{BKC} = \widehat{CDB}.$$

▷**1.2**. *Trong một tam giác đều xếp* $\frac{n.(n+1)}{2}$ *đồng xu và n đồng xu xếp dọc theo mỗi cạnh và luôn có một đồng xu ở ngọn(ở trên cùng) Một phép thế vị xác định bởi cặp đồng xu và tâm A, B và lật mọi đồng xu nằm trên đoạn thẳng AB. Hãy xác định những yếu tố ban đầu- giá trị của n và vị trí ban đầu của đồng xu có mặt trái mà từ đó có thể khiến cho tất cả đồng xu hiện ra mặt trái sau một số phép thế vị.*

Lời giải: Vì mỗi phép thế vị của 0 hoặc 2 đồng xu trong 1 góc, tính chẵn lẻ của số ngọn trong góc là được bảo toàn.
Nếu đồng xu cho thấy mặt trái không ở trong một góc, luôn có 3 đồng xu trong góc là ngọn, thì luôn có số ngọn trong góc là lẻ. Như vậy, sẽ luôn có 3 góc không đồng thời cho mặt trái của đồng xu.
Ngược lại, nếu trong một góc có đồng xu mặt trái, chúng ta sẽ chứng minh rằng ó thể làm cho tất cả các đồng xu hiện mặt trái
Ta hướng tam giác sao cho góc đó đi đến với một cạnh nằm ngang; Trong mỗi (n - 1) đường ngang có hai hoặc nhiều đồng xu. Ta chọn hai đồng xu kề nhau và lật trái tất cả các đồng xu trong đường này. Tất cả các đồng xu sẽ cho thấy mặt trái.
Do đó yếu tố ban đầu cần lựa chọn là có đồng xu có mặt trái nằm trong 1 góc.

▷**1.3**. *Cho tam giác ABC và góc* $\widehat{C} = \frac{\pi}{2}$ *gọi M là trung điểm của cạnh huyền AB, H là chân đường cao CH và P là điểm trong tam giác sao cho AP = AC. Hãy chứng minh rằng PM là phân giác* $\widehat{BPH}$ *khi và chỉ khi* $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.

Lời giải: Lời giải thứ nhất
Điểm P nằm trên đường tròn ω tâm A bán kính AC. đường tròn ω cắt đường CH, MH và PH tại D, N và Q. Vì $MA = MC$, $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$ khi và chỉ khi tam giác ACM đều. Nghĩa là khi và chỉ khi M≡N. Điều đó khẳng định PM là phân giác góc HPB khi và chỉ khi M≡N
Thật vậy, AH là đường cao thuộc đáy của tam giác cân ACD, H là trung điểm của CD, CD là một dây cung của đường tròn ω , theo định lí về phương tích của một điểm có

$$PH.HQ = CH.HD = CH^2.$$

Và vì CH là đường cao thuộc cạnh huyền của tam giác vuông ABC nên $CH^2 = AH.HB$. Vậy $PH.HQ = AH.HB$.
Do H là giao điểm của AB và PQ nên tứ giác $APBQ$ nội tiếp. Xét trên đường tròn ω

$$\widehat{QAB} = \widehat{QAN} = 2.\widehat{QPN} = 2.\widehat{HPN}$$

Như vậy

$$\widehat{HPB} = \widehat{QPB} = \widehat{QAB} = 2.\widehat{HPN}$$

Và vì N là giao điểm của HB và PN phân giác của góc HPB. Do đó PM là phân giác của góc HPB khi và chỉ khi $M \equiv N$

Lời giải thứ hai

Không mất tính tổng quát ta giả sử $AC = 1$. Dựng hệ trục tọa độ vuông góc với C làm gốc, A có tọa độ (0; 1) còn B có tọa độ (n; 0) với n $>$ 0
Nếu n = 1 thì M≡N và PM không thể là phân giác của góc BPH. Trong trường hợp này có $\widehat{A} = \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{3}$ điều này trái với kết quả mong đợi
Chính điều đó cho phép ta chọn $n \neq 1$ Sử dụng công thức khoảng cách để có AP = AC khi và chỉ khi P có tọa độ dạng $(\pm\sqrt{m.(2-m)}; m)$ và m nằm giữa 0 và 2. Tọa độ của M là $(\frac{n}{2}; \frac{1}{2})$ và vì CH có độ đổi n và H trên AB, nên H cần tìm có tọa độ $(\frac{n}{n^2+1}; \frac{n^2}{n^2+1})$. Sử dụng công thức tính khoảng cách ta tính được

$$\frac{BP}{HP} = \sqrt{n^2+1}$$

Sử dụng hệ thức trong tam giác vuông AHC và ACB có AH = $\frac{b^2}{c}$ với $b = CA, c = AB$; từ đó

$$\frac{MB}{MH} = \frac{\frac{c}{2}}{\frac{c}{2} - \frac{b^2}{2}} = \frac{c^2}{c^2 + 2.b^2} = \frac{n^2+1}{n^2-1}$$

Theo định lí đường phân giác PM là phân giác $\widehat{BPH}$ khi và chỉ khi $\frac{BP}{HP} = \frac{MB}{MH}$. Giải phương trình tương ứng ta tính được nghiệm khi và chỉ khi $n^2(n^2-3) = 0$ vì n $>$ 0 nên PM là phân giác góc BPH khi và chỉ khi n = $\sqrt{3}$, nghĩa là khi và chỉ khi $\widehat{A} = \frac{\pi}{3}$.

▷**1.4**. *Có tồn tại một hàm $f : N \longrightarrow N$ sao cho*

$$f(f(n-1)) = f(n+1) - f(n)$$

với mọi $n \geqslant 2$ *?*

Lời giải: Khi khẳng định tồn tại một hàm như vậy sẽ dẫn đến mâu thuẫn. Từ phương trình f(n -1) - f(n) $>$ 0 với $n \geqslant 2$ điều này khẳng định hàm f tăng nghiêm ngặt với $n \geqslant 2$ như vậy, $f(n) \geqslant f(2) + (n-2) \geqslant n-1$ với $n \geqslant 2$ Chúng ta có thể làm nên $f(n)$ như sau: Từ phương trình đã cho mặc nhiên có $f(f(n-1)) < f(n+1)$ với $n \geqslant 2$ hay là $f(f(n)) < f(n+2)$ với $n \geqslant 1$. Vì f là hàm tăng với những biến lớn hơn 1, cho $f(n) = 1$ hoặc $f(n) < n+2$. Từ đó $n-1 \leqslant f(n) \leqslant n+1$ với mọi $n \geqslant 2$. Lấy n nguyên bất kỳ bé hơn 4
Một mặt $f(n) \geqslant 2$ và $(n-1) \geqslant 2$

$$f(f(n-1)) = f(n-1) - f(n) \leqslant (n+2) - (n-1) = 3$$

Như vậy,$(n-3) \leqslant 3$ vì bất kì $n > 4$ là điều vô lý. Điều này cho thấy khẳng định ban đầu là không đúng và cho kết luận không tồn tại một hàm như thế.

▷**1.5**. *Trong một đa diện lồi với m mặt tam giác(còn các mặt khác với hình dạng khác), Ta luôn có 4 cạnh bên gặp tại mỗi đỉnh. Tìm giá trị nhỏ nhất có thể của m.*

Lời giải: Lấy 1 đa diện với m mặt tam giác và 4 cạnh bên gặp nhau tại mỗi đỉnh. Đặt F, E và V là số mặt, cạnh bên và đỉnh của đa diện. với mỗi cạnh bên, đếm hai đỉnh và các đầu mút. Vì mỗi đỉnh là đầu mút của 4 cạnh bên, chúng ta đếm đỉnh 2 lần theo cách này. Như vậy 2E = 4V
Ngoài ra, đêm số cạnh bên trên mỗi mặt và tổng của F cao nhất đạt được là một số ít nhất là 3m + 4(F - m). Mỗi cạnh bên được đếm 2 lần theo cách này, suy ra $2E \geqslant 3m + 4(F-m)$
Qua biểu thức Euler cho biểu đồ phẳng, $F + V - E = 2$.
Kết hợp với $2E = 4V$ đẳng thức này là $2E = 4F - 8$
Như vậy

$$4F - 8 = 2E \geqslant 3m + 4(F-m)$$

Hay m $\geqslant$ 8 sự cân bằng đạt được nếu và chỉ nếu mỗi mặt của đa diện là tam giác hoặc tứ giác, một hình tám mặt đầu có những hình như vậy.

Suy ra $m = 8$ là giá trị đạt được.

▷**1.6**. *a) Chứng minh rằng* $\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{1}{n\sqrt{3}}$ *với tất cả số nguyên dương n, trong đó* $\{x\}$ *được hiểu là phân số của x.*
b) Có tồn tại bất biến $c > 1$ *để mà* $\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ *cho mỗi n nguyên dương?.*

Lời giải: Điều kiện $\left\{n\sqrt{3}\right\} > \frac{c}{n\sqrt{3}}$ có thể áp dụng với n = 1 nếu chỉ nếu $1 > \frac{c}{\sqrt{3}}$ ví dụ $\sqrt{3} > c$. Đặt $1 \leqslant c < \sqrt{3}$ là một bất biến với mỗi n, $\left\{n\sqrt{3}\right\} = n\sqrt{3} - \left[n\sqrt{3}\right]$ lớn hơn $\frac{c}{n\sqrt{3}}$ nếu chỉ nếu $n\sqrt{3} - \frac{c}{n\sqrt{3}}$. Vì $c < \sqrt{3} < 3n^2$, hai vế của bất dẳng thức này là dương, chúng ta chỉ có thể bình phương mỗi vế mà không làm đổi dấu bất đẳng thức.

$$3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > \left[n\sqrt{3}\right]^2 \qquad (*)$$

Với mỗi n, $3n^2 - 1$ không phải là số chính phương vì không có số chính phương nào đồng dư 2 mod3, và $3n^2$ cũng không phải là số chính phương. Như vậy, $\left[n\sqrt{3}\right] = \left[\sqrt{3n^2}\right]$ số nguyên lớn nhất mà bình phương của nó nhỏ hơn hoặc bằng $3n^2$ tối đa 3n với cân bằng nếu và chỉ nếu $3n^2 - 2$ là số chính phương. Chúng ta yêu cầu rằng sự cân bằng áp dụng tùy ý với n.
Xác định $(m_0, n_0) = (1, 1)$ và $(m_{k+1}, n_{k+1}) = (2m_k + 3n_k, m_k, 2n_k)$ với $k \geqslant 1$.
Dễ ràng chứng minh rằng $m_{k+1}^2 - 3n_{k+1}^2 = m^k - 3n_k^2$. Như vậy, do đẳng thức $3n_k^2 - 2 = m_k^2$ áp dụng với k = 0, áp dụng với tất cả $k \geqslant 1$. Do $n_1, n_2, \ldots$ là một chuỗi tăng nó dẫn đến $3n^2 - 2$ là một số chính phương với n tùy ý.
Nếu c = 1 như vậy $3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} > 3n^2 - 2c = 3n^2 - 2c \geqslant \left(n\sqrt{3}\right)^2$ cho tất cả n. Như vậy (*) là bất đẳng thức áp dụng cho tất cả n
Tuy nhiên, nếu $c > 1$ thì $3n^2 - 2c + \frac{c^2}{3n^2} \leqslant 3n^2 - 2$ cho tất cả các số lớn n thỏa mãn. Như vậy, tồn tại một số n với điều kiện thêm là $3n^2 - 2$ phải là số chính phương. Với n này (*) và đẳng thức b) là sai
Vậy câu trả lời đối với phần b) là "không".

▷**1.7**. *Cho tập hợp* $M = \{1, 2, \ldots, 40\}$*. Tìm giá trị n nhỏ nhất(n: số nguyên) mà có thể chia tập M thành n tập con rời nhau để mà bất kì a, b và*

0(không nhất thiết khác biệt) nằm trong cùng tập con, thỏa mãn $a \neq b+c$.

Lời giải: Giả sử cho mục đích mâu thuẫn, có thể chia tập M thành 3 tập X, Y và Z. Không mất tính tổng quát ta giả sử rằng $|X| \geqslant |Y| \geqslant |Z|$ cho các $x_1, x_2, \ldots, x_{|X|}$ là các thành phần của X được sắp xếp theo thứ tự tăng dần. Những số này, bên cạnh các chênh lệch $x_i - x_1$ với i = 2, 3, $|X|$, phải là những thành phần khác biệt của M. Có 2$|X|$-1 số như vậy, suy ra 2$|X|$-1$\leqslant$ 40 hay $|X| \leqslant 20$. Ta có $3\left|X\right| \geqslant \left|X\right| + \left|Y\right| + \left|Z\right| = 40$, suy ra $|X| \geqslant 14$. Ta có $\left|X\right|.\left|Y\right| \geqslant \frac{1}{2}\left|X\right|(40 - \left|X\right|)$ đôi trong X.Y. Tổng của các số trong mỗi cặp đôi nhỏ nhất là 2 và lớn nhất là 80 có cả 79 giá trị có thể xảy ra vì $21 \geqslant |X| \geqslant 14$ và hàm $t \longrightarrow \frac{1}{2} + (40 - t)$ là hàm lõm trên đoạn $21 \geqslant t \geqslant 14$ chúng ta có $\frac{1}{2}\left|X\right|.(40 - \left|X\right|) \geqslant min\left\{\frac{1}{2}.14(26), \frac{1}{2}.21(19)\right\}$=182 $>$ 2.79.

Theo nguyên tắc Pigeonhole tồn tại 3 cặp đôi (x_1, y_1), (x_2, y_2),$(x_3, y_3) \in X.Y$ với $(x_1 + y_1) = (x_2 + y_2) = (x_3 + y_3)$

Nếu bất cứ x_i nào bằng nhau thì tương ứng y_i sẽ bằng nhau, điều này là không thể xảy ra vì cặp $(x_i, y - i)$ là khác biệt. Như vậy, chúng ta có thể giả sử, không làm mất tính tổng quát rằng $x_1 < x_2 < x_3$ với $1 \leqslant j < k \leqslant 3$ giá trị $x_k - x_j$ nằm trong M và không thể nằm trong X vì mặt khác $x_j + (x_k - x_j) = x_k$. Tương tự $y_j - y_k \notin Y$ với $1 \leqslant j < k \leqslant 3$

Như vậy, 3 sự chênh lệch bằng nhau $x_2 - x_1 = y_2 - y_1$, $x_3 - x_2 = y_3 - y_2$, $x_3 - x_1 = y_3 - y_1$ nằm trong $M \setminus X \cup Y = Z$. Đặt $a = (x_2 - x_1)$, $b = (x_3 - x_2)$, $a = (x_3 - x_1)$ ta có a = b+ c và $a, b, c \in Z$, suy ra mâu thuẫn

Như vậy giả sử ban đầu của chúng ta sai và không thể phân chia M thành 3 tập thỏa mãn yêu cầu đặt ra.

Bây giờ có thể chứng minh chia M thành 4 tập với yêu cầu đặt ra. Nếu $a_i \in \{0, 1, 2\}$ với tất cả $i \in N$ và nếu $a_i = 0$ với n $>$ N, sau đó đặt $(\ldots a_2 a_1 a_0)$ và $(a_N a_{N-1} \ldots a_0)$ được hiểu là số nguyên $\sum_{i=0}^{n} a_i 3^i$ đương nhiên giá trị nguyên m có thể viết dưới dạng $(\ldots a_2 a_1 a_0)$ theo một cách chính xác với cơ số 3. Ta đặt số nguyên m = $(\ldots a_2 a_1 a_0)$ vào từng $A_0, A_1 \ldots$ nếu $a_0 = 1$ thay m vào A_0. Mặt khác vì $a \neq 0$, $a_{i_1} \neq 0$ với một số i_1, bởi vì chỉ hữu hạn $a_i \neq 0$, $a_{i_2} = 0$, với một vài $i_2 > i_1$, tiếp

đến $a_l \neq 0$, $a_{l+1} = 0$, với một vài l. Chọn l nhỏ nhất với thuộc tính này và thay m tai $A_{l+1} = 0$.
Nếu $m_1, m_2 \in A_1$ và cơ số 3 biểu diễn $m_1 + m_2$ có những đơn vị số 2 như vậy $m_1 + m_2 \notin A_1$. Nếu $m_1 + m_2 \in A_l$ với một số l>1, như vậy: $0\underbrace{11\cdots1}_{l} < m_1, m_2 < 1\underbrace{00\cdots0}_{l}$ suy ra $0\underbrace{22\cdots2}_{l} < m_1 + m_2 < 2\underbrace{00\cdots0}_{l}$
nếu $m_1 + m_2 = (\ldots a_3a_2a_1a_0)$, thì $a_l = 1$ suy ra $m_1 + m_2 \notin A_l$
Bây giờ, đặt k > 1 là một số nguyên dương và đặt $S = \left\{1, 2, \ldots, \frac{1}{2}(3^k - 1)\right\}$ biểu thức cơ số 3 của $\frac{1}{2}(3^k - 1)$ bao gồm tất cả 1's để mọi $\frac{1}{2}(3^k - 1) \in A_1$ cơ số 3 trong tất cả các số khác trong S có 1 số 0 trong 3^{k-1} vị trí để mà mỗi số nguyên trong S nằm chính xác 1 trong các tập hợp $A_0, A_1, \ldots, A_{k-1}$. Như vậy, S có thể là một phần trong k tập hợp. $A_0 \cap S, A_1 \cap S, \ldots, A_{k-1} \cap S$ để mà $a \neq b \neq c$ với bất cứ a, b và c trong cùng một tập. Suy ra kết quả k = 4 cho thấy n = 4 là có thể đạt được như yêu cầu.

Ghi chú Với $n, k \in N$ và sự phân chia của $\{1, 2, \ldots, k\}$ trong n cặp 3 (a,b,c) sao cho a + b = c và a,b,c trong cùng tập gọi là Schur triple với mỗi $n \in N$ tồn tại k nguyên tối đa để mà không có Schur triplec cho sự phân chia nào đó $\{1, 2, \ldots, k\}$ vào n tập hợp. Số nguyên này được biểu thị bởi S(n) và được gọi là n^{th} Schur number. Mặc dù nhỏ hơn và lớn hơn giới hạn tồn tại với tất cả S(n) không có dạng tổng quát nào biết đến, giới hạn nhỏ hơn được tìm thấy trong giải pháp cho n =1,2,3 nhưng S(n)=44.

▷**1.8**. *Một số nguyên dương gọi là monotonic(đều) nếu những chữ số của nó trong cơ số 10, đọc từ trái sang phải theo thứ tự không giảm dần. Chứng minh rằng với mỗi $n \in N$ tồn tại n chữ số monotonic là số bình phương*

Lời giải: Bất kỳ số có 1 chữ số là bình phương(ví dụ 1,4 hoặc 9) là monotonic chứng minh yêu cầu bài với $n = 1$ Chúng ta giả sử $n > 1$
Nếu n là số lẻ, viết n = 2k - 1 cho một số nguyên $k \geq 2$
Đặt $x_k = (10k + 2)/6 = \underbrace{166\cdots67}_{k-2}$

Như vậy

$$x_k^2 = (10k^{2k} + 4.10k + 4)/36 = \frac{10^{2k}}{36} + \frac{10k}{9} + \frac{1}{9} \qquad (*)$$

Quan sát thấy: $\frac{10^{2k}}{36} = 10^{2k-2}.(\frac{72}{36} + \frac{28}{36}) = 2.10^{2k-2} + \frac{7}{9}.10^{2k-2} = 2\underbrace{77\cdots7}_{2k-2}+\frac{7}{9}$

Vậy vế phải của đẳng thức (*) bằng: $2\underbrace{77\cdots7}_{2k-2}+\frac{7}{9} + \underbrace{11\cdots1}_{k}+\frac{1}{9} = 2\underbrace{77\cdots7}_{k-2}9\underbrace{88\cdots8}_{k-1}$ là một số có n chữ số monotonic là số bình phương.

Nếu n là số chẵn, viết n = 2k với số nguyên $k \geq 1$ và

$$y_k = (10^2k + 2)/3 = 4\underbrace{33\cdots3}_{k-1}$$

Như vậy

$$y_k^2 = (10^{2k} + 4.10^k + 4)/9 = \frac{10^{2k}}{9} + 4\frac{10^k}{9} + \frac{4}{9}$$
$$= 1\underbrace{11\cdots1}_{2k}+\frac{1}{9} + 4\underbrace{44\cdots4}_{k}+\frac{4}{9} = \underbrace{11\cdots1}_{k}6\underbrace{55\cdots5}_{k-1}$$

một số gồm n chữ số monotonic chính phương (*Đpcm*)

▷**1.9**. *Cho cặp $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$ vectơ trong một máy bay một dịch chuyển gồm chọn một số nguyên khác không k và sau đó thay đổi $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$ thành hoặc (i) $(\overrightarrow{r} + 2k\overrightarrow{s}, \overrightarrow{s})$ hoặc (ii) $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s} + 2k\overrightarrow{r})$ Trò chơi gồm lấy một hữu hạn các chuỗi dịch chuyển, luân phiên nhau dịch về dạng (i) và dạng (ii) cho một vài cặp vectơ ban đầu.*

a) Có thể đạt được cặp $((1,0),(2,1))$ trong trò chơi với cặp ban đầu $((1,0),(0,1))$ nếu sự dịch chuyển đầu tiên là dạng (i)? b) Tìm tất cả các cặp $((a,b),(c,d))$ có thể đạt được trong trò chơi với cặp ban đầu $((1,0),(0,1))$ trong đó dịch chuyển đầu tiên là một trong hai dạng trên ?

Lời giải: Đặt $||\overrightarrow{z}||$ biểu thị cho chiều dài của vectơ $\overrightarrow{z}$ và đặt |z| biểu thị cho giá trị tuyệt đối cảu số thực z

a) Đặt $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$ là cặp vectơ mà $\overrightarrow{r}$ và $\overrightarrow{s}$ có thể thay đổi qua trò choi quan sát thấy rằng nếu $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}$ là vectơ như là $||\overrightarrow{x}|| > ||\overrightarrow{y}||$

Như vậy:

$$||\overrightarrow{x} + 2k\overrightarrow{y}|| \geqslant ||2k\overrightarrow{y}|| - ||\overrightarrow{x}|| > 2||\overrightarrow{y}|| - ||\overrightarrow{y}|| = ||\overrightarrow{y}||$$

Sau lần dịch chuyển đầu tiên dạng (i) ta có $\overrightarrow{r} = (1, 2)$ và $\overrightarrow{s} = (0, 1)$ cho số $k \neq 0$ để mà $||\overrightarrow{r}|| > ||\overrightarrow{s}||$ áp dụng kết quả trên với $\overrightarrow{x} > \overrightarrow{s}$ và $\overrightarrow{y} > \overrightarrow{r}$ chúng ta có thể thấy trong dịch chuyển tiếp theo (dạng(ii)) độ dài của $\overrightarrow{r}$ không thay đổi trong đó $\overrightarrow{s}$ tăng cao hơn $||\overrightarrow{r}||$, áp dụng kết quả trên lần nữa với $\overrightarrow{x} > \overrightarrow{r}$ và $\overrightarrow{y} > \overrightarrow{s}$ chúng ta có thể thấy trong dịch chuyển tiếp theo (dạng(i)) độ dài của $\overrightarrow{s}$ không thay đổi trong đó $\overrightarrow{r}$ tăng vượt qua $||\overrightarrow{s}||$, tiếp tục như vậy ta thấy rằng $||\overrightarrow{r}||$ và $||\overrightarrow{s}||$ không bao giờ giảm. Bởi vì sau lần dịch chuyển đầu tiên vectơ đầu tiên có độ dài hơn 1, sẽ không bao giờ đạt được $((1, 0), (2, 1))$

b) Chúng ta thay đổi trò chơi bằng cách không yêu cầu dịch chuyển luân phiên giữa dạng (i) và (ii) và bằng cách cho phép sự lựa chọn k = 0. Đương nhiên bất cứ cặp nào có thể đạt được theo quy định ban đầu phải đạt được theo những quy định mới này.

Điều ngược lại đúng vì bằng cách loại bất cứ dịch chuyển nào theo những quy định mới với k = 0 và kết hợp bất cứ dịch chuyển mới nào của cùng dạng vào 1 dịch chuyển ta đạt được chuỗi dịch chuyển theo quy luật ban đầu và được cùng 1 cặp. Để $((\omega, x), (y, z))$ đại diện cặp của những vectơ với ω, x, y và z thay đổi qua trò chơi.

Dễ dàng kiểm tra giá trị của $\omega z - xy$ và tính chẵn lẻ của x và y là không thay đổi theo bất cứ dịc chuyển nào trong trò chơi. Trong một trò chơi mà bắt đầu với $((\omega, x), (y, z)) = ((1, 0), (0, 1))$, ta phải luôn luôn có $\omega z - xy = 1$ và $b \equiv c \equiv 0(mod2)$. Bởi vì x và y luôn luôn chẵn ω và z không đổi mod4, ta phải có $\omega \equiv z \equiv 1(mod4)$ thông qua trò chơi.

Gọi 1 cặp $((a, b), (c, d))$ thỏa mãn khi ad - bc = 1, $a \equiv d \equiv 1(mod4)$ và $b \equiv c \equiv 0(mod2)$ ở trên ta thấy rằng bất cứ cặp đôi đạt được trong trò chơi với cặp ban đầu $((1, 0), (0, 1))$ phải thỏa mãn và bây giờ ta chứng minh điều ngược lại.

Giả sử, nhằm mục đích thấy được sự mâu thuẫn rằng có những cặp đôi $((a, b), (c, d))$ thỏa mãn điều kiện đưa ra. Đặt $((e, f), (g, h))$ là cặp mà

tối thiểu hóa |ac|
Nếu g = 0 thì eh = 1 + fg = 1 bởi vì $e \equiv h \equiv 1(mod4)$ e = h = 1, nếu f = 0 cặp này chắc chắn có được. Mặt khác, bằng cách dịch chuyển dang (i) với $k = \frac{f}{2}$ chúng có thể thay đổi dạng $((1,0),(0,1))$ thành dạng $((e,f),(g,h))$ dẫn tới mâu thuẫn
Như vậy$g \neq 0$ bây giờ g là số chẵn e là số lẻ, |e| > |g| hoặc |e| < |g| ta có $e - 2k_0g$ nằm trong đoạn (-|e|, |e|) cho $k_0 \in \{1, -1\}$. Thực hiện dạng (i) dịch chuyển đến $((e,f),(g,h))$ với $k = -k_0$ thì đạt được một cặp mong muốn khác $((e',f'),(g,h))$. Bởi vì |e'| < |e| và $g \neq 0$, chúng ta có |e'g| < |eg|. Như vậy, bằng khái niệm tối thiểu $((e,f),(g,h))$ cặp đôi mới có thể đạt được từ $((1,0),(1,0))$ với một dãy dịch chuyển S nào đó. Như vậy, chúng ta đạt được $((e,f),(g,h))$ từ $((1,0),(0,1))$ bằng cách áp dụng trước tiên dịch chuyển trong S tới $((1,0),(0,1))$ sau đó áp dụng thêm dịch chuyển dạng (i) với $k = -k_0$. Như vậy cặp đôi cực tiểu đạt được dẫn đến mâu thuẫn.
Một chứng minh tương tự nếu |e| < |g| , khi chúng ta thay lựa chọn r_0 với $g - 2k_0e \in (-|g|,|g|)$ và thực hiện dạng dịch chuyển (ii). Như vậy trong tất cả các trường hợp chúng ta có sự mâu thuẫn. Hay chúng ta có thể kết luận rằng bất cứ cặp đôi đạt được đều thực sự thỏa mãn. Điều này hoàn toàn được chứng minh.

▷**1.10**.*Chứng minh:*
$$\frac{a^3}{x} + \frac{b^3}{y} + \frac{c^3}{z} \geq \frac{(a+b+c)^3}{3(x+y+z)}$$
Với tất cả các dạng số thực a, b, c

Lời giải: Qua chứng minh không cân bằng của Holder
$$\left(\tfrac{a^3}{x} + \tfrac{b^3}{y} + \tfrac{c^3}{z}\right)^{\frac{1}{3}}(1+1+1)^{\frac{1}{3}}(x+y+z)^{\frac{1}{3}} \geq (a+b+c)$$
lũy thừa 3 cả 2 vế và chia cả 2 cho 3(x + y + z) ta được Đpcm

▷**1.11**.*Gọi P là giao điểm của hai đường chéo AC và BD của tứ giác lồi ABCD trong đó AB = AC = BD. Gọi O và I là circumcenter và tâm nội tiếp của 3 phân giác của tam giác ABP. Chứng minh rằng nếu $O \neq I$ thì đường thẳng OI và CD vuông góc.*

Lời giải: Đầu tiên ta chứng minh một luận đề rất hữu ích $\overline{XY}$ và $\overline{UV}$, đặt X' và Y' là chân góc vuông của X và Y, nối đường thẳng UV. Sử dụng khoảng cách trực tiếp, $\overline{XY}\perp\overline{UV}$ nếu chỉ nếu

$$\text{UX' - X'V = UY' - Y'V}$$

vì UX' + X'V =UV = UY' + Y'V, phép tính trên đạt được nếu chỉ nếu $UX'^2 - X'V^2 = UY'^2 - Y'V^2$, hoặc $UX^2 - XV^2 = UY^2 - YV^2$.
Như vậy nó thỏa mãn đẳng thức $DO^2 - CO^2 = DI^2 - CI^2$. Đặt AB= AC=BD = p, PC = a và PD = b như vậy AP = p - a và BP = p - b. Đặt R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABP. ta có pb = DP.DB = $DO^2 - R^2$ ngoài ra pa = $CO^2 - R^2$.
Như vậy $DO^2 - CO^2 = p(b - a)$, vì tam giác ADB là cân với BA = BD và I nằm trên đường phân giác của góc $\widehat{ABD}$, ID = IA ngoài ra IB = IC đặt T là điểm tiếp xúc của vòng tròn nội tiếp tam giác ABC với cạnh AB. Như vậy BT = (p + a - b)/2 vì IT vuông góc với AB, $AI^2 - BI^2 = AT^2 - BT^2$. Đặt các tham số lại với nhau chúng ta thấy rằng.

$$\begin{aligned} DI^2 - CI^2 = AI^2 - BI^2 &= AT^2 - BT^2 \\ &= (AT + BT)(AT - BT) \\ &= p(b - a) \\ &= PO^2 - CO^2 \ \textit{(Đpcm)} \end{aligned}$$

Chương 2

Đề thi olympic Bungari

▷**2.12**.*Một đường thẳng l đi qua trực tâm của tam giác nhọn ABC. CMR các đường thẳng đối xứng với l qua các cạnh của tam giác đồng quy.*

Lời giải: Gọi H là trực tâm của tam giác ABC. Vì tam giác ABC nhọn nên trực tâm H nằm trong tam giác ABC. Không mất tính tổng quát chúng ta giả sử l cắt $\overline{AC}$ và $\overline{BC}$ tại P và Q. Nếu $l \parallel \overline{AB}$, lấy R là điểm tùy ý trên đường thẳng đối xứng với l qua đường thẳng AB. Nếu l không song song với $\overline{AB}$ thì lấy R là giao điểm của đường thẳng l đối xứng với đường thẳng AB và ta có thể giả sử R nằm trên tia BA.
LấyA_1, B_1, C_1, tương ứng là các điểm đối xứng với H qua các đường thẳng BC, CA, AB. Khi đó, A_1,B_1,C_1 nằm trên đường tròn ngoại tiếp w của tam giác ABC (Chú ý:$\widehat{A_1CB} = \widehat{BCH} = \widehat{HAB} = \widehat{A_1AB} =$)
Ta cần chứng minh: A_1P,B_1Q,C_1R đồng quy
Vì hai đường thẳng AC và BC không song song, nên hai đường thẳng B_1Q và A_1P không song song. Lấy S là giao điểm của A_1P và B_1Q Vì $\widehat{SA_1C}+\widehat{SB_1C}=\widehat{PA_1C}+\widehat{QB_1C}=\widehat{PHC}+\widehat{QHC}=\pi$ nên tứ giác SA_1CB_1 là điểm hội tụ đường tròn
Do đó, S là giao điểm của đường thẳng B_1Q và đường tròn w. Tương tự, hai đường thẳng B_1Q và C_1R không song song và giao điểm của chúng cũng chính là giao điểm của B_1Q và đường tròn w. Do vậy, các đường thẳng A_1P, B_1Q, C_1R đồng quy tại mọi điểm nằm trên đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC

▷**2.13**.*Có 2000 quả cầu trắng trong một chiếc hộp. Bên ngoài chiếc hộp cũng có các quả cầu trắng, xanh và đỏ với số lượng không hạn chế. Trong mỗi lần thay đổi , chúng ta có thể thay đổi 2 quả cầu trong hộp bởi 1 hoặc 2 quả cầu theo cách sau:*
2 quả trắng bởi 1 quả xanh, 2 quả đỏ bởi 1 quả xanh, 2 quả xanh bởi 1 quả trắng và 1 quả đỏ, 1 quả trắng và 1 quả xanh, bởi 1 quả đỏ hoặc 1 quả xanh và 1 quả đỏ bởi 1 quả trắng. (a) Sau một số hữu hạn lần thực hiện như trên còn lại 3 quả cầu trong hộp. CMR có ít nhất 1 quả xanh trong 3 quả cầu còn lại. (b) Liệu có thể xảy ra sau một số hữu hạn lần thực hiện như trên trong hộp còn lại đúng một quả cầu.

Lời giải: Ta gắn góc giá trị i cho mỗi quả cầu trắng, $-i$ cho mỗi quả cầu đỏ, và -1 cho mỗi quả cầu xanh. Ta có thể kiểm tra lại rằng các phép thay thế đã cho không làm thay thế các giá trị của các quả cầu trong hộp. Tích các giá trị của các quả cầu ban đầu là $i^{2000} = 1$.
Nếu trong hộp còn lại ba quả cầu không có quả nào màu xanh thì tích các giá trị của chúng sẽ là : $\pm i$, mâu thuẫn. Do đó, nếu trong hộp còn lại ba quả, thì phải có ít nhất 1 quả màu xanh, (a) được chứng minh.
Hơn nữa, vì không có quả nào có giá trị 1 nên trong hộp phải chứa ít nhất hai quả cầu. Do đó, không thể xảy ra trường hợp trong hộp còn lại 1 quả(Để chứng minh (a), chúng ta có thể gán giá trị 1 cho mỗi quả xanh, -1 cho mỗi quả cầu đỏ hoặc trắng.

▷**2.14**.*Đường tròn nội tiếp tam giác cân ABC tiếp xuc với các cạnh AC và BC tương ứng tại M và N. Đường thẳng t tiếp xúc với cung nhỏ MN, t giao với $\overline{NC}$ và $\overline{MC}$ tương ứng tại P và Q. Gọi T là giao điểm của hai đường thẳng AP và BQ.*
(a) Chứng minh T thuộc $\overline{MN}$.
(b) CM: Tổng diện tích các tam giác ATQ và BTP đạt giá trị nhỏ nhất khi $t \parallel AB$

Lời giải: (a) Hình lục giác suy biến $AMQPNP$ được ngoại tiếp bởi các đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Theo định lý Brianchon, các đường chéo $\overline{AD}$, $\overline{MN}$, $\overline{QB}$ là đồng quy. Do đó, T thuộc MN.
Chúng ta có thể sử dụng cách giải sơ cấp hơn. Gọi R và S tương ứng là

các tiếp điểm của đường tròn nội tiếp với các cạnh $\overline{AB}$ và $\overline{PQ}$: Gọi T_1, T_2 tương ứng của tam giac ABC là các giao điểm của $\overline{BQ}$ với $\overline{MN}$ và $\overline{SR}$.

Vì $\widehat{QMN}= \widehat{PNM} = \frac{\widehat{MN}}{2}$ nên ta có: sin $\widehat{QMN} = \sin\widehat{PNM} = \sin\widehat{BNM}$.

áp dụng định lý hàm số sin trong tam giác cho các tam giác MQT_1 và NBT_1.

$\frac{QT_1}{QM}= \frac{\sin\widehat{QMN}}{\sin\widehat{QT_1M}} = \frac{\sin\widehat{BNM}}{\sin\widehat{BT_1N}} = \frac{BT_1}{BN}$.

hay $\frac{QT_1}{BT_1} = \frac{MQ}{BN}$. Tương tự: $\frac{QT_2}{BT_2} = \frac{SQ}{BR}$.

Theo tính chất của tiếp tuyến, $BN= BR$ và $QM= QS$. Do đó: $\frac{QT_1}{BT_1} = \frac{QT_2}{BT_2}$. Vì T_1 và T_2 đều thuộc $\overline{BQ}$ nên ta phải có $T_1 \equiv T_2$. Do đó, $\overline{BQ}$,$\overline{MN}$, $\overline{SR}$ đồng quy

Một cách tương tự, ta chứng minh được $\overline{AP}$, $\overline{MN}$, $\overline{SR}$ đồng quy. Từ đó $T \in \overline{MN}$. Gọi $\alpha = \widehat{CAB} = \widehat{CBA}$ và $B= \widehat{ACB}$.

Gọi $f = [AQT] + [BPT] = [ABQ] + [ABP] - 2.[ABT]$

Vì tam giác ABC cân, $\widehat{MN} \parallel \widehat{AB}$, suy ra $[ABT]$ là hằng số. Do đó, f đạt giá trị nhỏ nhất $\leftrightarrow [ABC] + [ABP]$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Để ý rằng : $2f' = AB.(AQ + PB).\sin\alpha$

$= AB.(AB + PQ).\sin\alpha$

Trong đó: $AQ + PB = AP + QP$ vì tứ giác $ABCD$ có đường tròn nội tiếp.

f' đạt giá trị nhỏ nhất khi PQ đạt giá trị nhỏ nhất. Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp cuả tam giác ABC, do đó I là tâm đường tròn bàng tiếp của tam giác CPQ. Do đó, $PC+CQ+QP = 2.CM$ không đổi. Đặt $\widehat{CPQ}=p$ và $\widehat{CQP}=q$. Thì $p + q=\pi - \beta$ không đổi. áp dụng định lý hàm số sin cho tam giác CPQ ta được : $\frac{CM}{PQ} = 1 + \frac{CP}{PQ} + \frac{CQ}{PQ} = 1 + \frac{\sin p+\sin q}{\sin\beta} = 1 + \frac{2.\sin\frac{p+q}{2}.\cos\frac{p-q}{2}}{\sin\beta}$.

PQ đạt giá trị nhỏ nhất khi $\cos\frac{p-q}{2}$ lớn nhất. Từ đó, $[ATQ] + [BTP]$ nhỏ nhất khi $p = q$, tức là khi $\overline{PQ} \parallel \overline{AB}$.

▷**2.15.***Cho n điểm trên mặt phẳng ($n >= 4$) sao cho khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ trong n điểm đó là một số nguyên. CMR ít nhất $\frac{1}{6}$ trong số các khoảng cách đó chia hết cho 3.*

Lời giải: Trong bài giải này, các đồng dư xét theo modul 3. Trước hết

ta chứng minh nếu $n = 4$, thì ít nhất có hai điểm rời nhau mà khoảng cách giữa chúng chia hết cho 3. Ký hiệu 4 điểm đó làA, B, C, D. Giả sử các khoảng cách AB, BC, CD, DA, AC, BD không chia hết cho 3.
Không mất tính tổng quát, ta giả sử $\widehat{BAD} = \widehat{BAC} = \widehat{CAD}$.
Gọi x=$\widehat{BAC}$ và $y = \widehat{CAD}$.
Gọi $\alpha = 2.AB.AC.\cos x$, $\beta = 2.AD.AC.\cos y$ và $\gamma = 2.AB.AD.\cos(x+y)$. áp dụng định lý hàm số cosin cho các tam giac ABC, ACD, ABD ta được
$BC^2 = AB^2 + AC^2 - \alpha$
$CD^2 = AC^2 + AD^2 - \beta$
$BD^2 = AB^2 + AD^2 - \gamma$
Vì bình phương mẫu khoảng cách là một số nguyên nên $\alpha, \beta v \gamma$ cùng là các số nguyên. Do đó:

$$2.AC^2.\gamma = 4.AC.AB.AD.\cos(x+y)$$

$$= 4.AC^2.AB.AD - (\cos x.\cos y - \sin x.\sin y)$$

$= \alpha.\beta - 4.AB.AD.\sin x.\sin y.$
là số nguyên. Vì vậy: $4.AC^2.AB.AD.\sin x.\sin y$ là một số nguyên chẵn và
$\sin x.\sin y = \sqrt{(1-\cos^2.x).(1-\cos^2.y)}$ là một số hữu tỷ, khi viết dưới dạng tối giản tử số là số không chia hết cho 3. Đặt $p = 2.AB.AC$ và $q = 2.AD.AC$, do đó
$\cos x = \frac{\alpha}{p}$ và $\cos y = \frac{\beta}{q}$
Vì $\sin x.siny = \frac{\sqrt{(p^2-\alpha^2).(q^2-p^2)}}{pq}$
Là số hữu tỷ nên tử số ở vế phải cùng là một số nguyên. Tử số chia hết cho 3 vì $p^2 \equiv 1($ modul 3) và $\alpha^2 \equiv 1$ (modul 3
Nhưng mẫu số không chia hết cho 3. Do đó, khi $\sin x.\sin y$ viết dưới dạng tối giản thì tử của nó chia hết cho 3, điều này mẫu thuẫn. Do đó, điều giả sử ban đầu là sai. Vậy có ít nhất một khoảng cách chia hết cho3

với $n = 4$

Xét trường hợp $n \geq 4$. Từ một tập n điểm, có C_n^4 các tập con chứa 4 điểm có ít nhất hai điểm trong mỗi tập rời nhau đó có khoảng cách chia hết cho 3, và mỗi khoảng cách đó được đếm trong ít nhất C_{n-1}^2 tập con. vậy có ít nhất $\frac{C_n^4}{C_{n-2}^2} = \frac{C_n^2}{6}$ các khoảng cách chia hết cho 3

▷**2.16**.*Trong tam giác ABC, $\overline{CH}$ là đường cao và $\overline{CM}$ và $\overline{CN}$ tương ứng là các đường phân giác của các góc ACH và BCH. Tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác CMN trùng với đường tròn nội tiếp của tam giác ABC. CMR: $[ABC] = \frac{AN.BM}{2}$.*

Lời giải: Gọi I là tâm đường tròn nội tiếp của tam giác ABC, gọi tiếp điểm của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh là $\overline{AC}, \overline{AB}$ lần lượt là E và F. Vì $IM = IN$ và $\overline{IF} \perp IM$, nên ta có $\widehat{FIN} = \frac{1}{2}.\widehat{MIN}$.
Hơn nữa , vì I là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác CMN nên:
$\frac{1}{2}.\widehat{MIN} = \widehat{MCN} = \frac{1}{2}.\widehat{ABC} = \widehat{ECI}$.
Do đó $\widehat{FIN} = \widehat{ECI}$.
ta cũng có $\widehat{NFI} = \frac{\pi}{2} = \widehat{IEC}$. Nên $\Delta NFI \sim \Delta IEC$.
Vì $NI = NC$, nên hai tam giác này là ...(congruent), và $NF = IE = IF$.
Tam giác ΔNFI là tam giác vuông cân, $\widehat{FIN} = \frac{\pi}{4}$ và $\widehat{ACB} = 2.\widehat{FIN} = \frac{\pi}{2}$.
Do đó, $\widehat{HCB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{CBH} = \widehat{BAC}$ và
$\widehat{ACN} = \widehat{ACB} - \frac{1}{2}.\widehat{HCB} = \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2}$
Từ đó suy ra, $\widehat{CNA} = \pi - (\widehat{ACN} + \widehat{NAC})$
$= \frac{\pi}{2} - \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{ACN}$ và $AN = AC$.
Tương tự, $BM = BC$. Do vậy: $\frac{1}{2}AN.BM = \frac{1}{2}.AC.BC = [ABC]$.

▷**2.17**.*Cho dãy số (a_n):*
$a_1 = 43$, $a_2 = 142$ *và* $a_{n+1} = 3.a_n + a_{n-1}$ *với mọi* $n \geqslant 2$.
CMR
(a) a_n và a_{n-1} là nguyên tố cùng nhau với mọi $n >= 1$.
(b) Với mọi số tự nhiên m, tồn tại vô hạn số tự nhiên n sao cho $a_n - 1$ và $a_{n+1} - 1$ đều chia hết cho m.

Lời giải: (a) Giả sử có $n, g > 1$ sao cho $\frac{g}{a_n}$ và $\frac{g}{a_{n+1}}$.
Khi đó g chia hết $a_{n-1} = a_{n+1} - 3.a_n$

Nếu $n-1>1$ thì g chia hết $a_{n+1}, a_n, ...a_2, a_1$, nhưng điều này không thể xảy ra vì WCLN $(a_2, a_1)=1$. Do đó, a_n và a_{n+1} là nguyên tố cùng nhau với mọi $n \geqslant 1$.

(b) Xét dãy (a'_n) được xác định như sau: a'_1, a'_2 $a'_{n+1}=3.a'_n+a_{n-1}$ với mọi $n \geqslant 2$.

Dễ thấy: $a'_3=4$, $a'_4=13$, $a'_5=43$, $a'_6=142$

Tức là $a_1=a'_5$, $a_2=a'_6$. Mà hai dãy (a_n) và dãy (a'_n) có cùng công thức truy hồi nên ta có:

$a_n=a'_{n+4}$, với mọi $n \geqslant 1$.

Gọi b_n là số dư khi chia a'_n cho m, và xét cặp số (b_n, b_{n+1}) với $n \geqslant 1$. Vì có một số vô hạn các cặp số như vậy nhưng chỉ là m^2 cặp các số nguyên (r,s) với $0 \leqslant r, s < m$ do đó phải có hai trong số các cặp đó trùng nhau, chẳng hạn $(b_i, b_{i+1})=(b_{i+t}, b_{j+t})$ với $t>0$.

Sử dụng công thức truy hồi, ta dễ dàng chứng minh được bằng qui nạp theo n: $b_{i+n}=b_{i+n+t}$ với mọi n thỏa mãn $(i+n)>1$. Do đó, $(b_{1+kt}, b_{2+kt})=(b_1,b_2)=(1,1)$ với mọi $k \geqslant 1$. Do đó, $a_{kt-3}-1$ và $a_{kt-2}-1$ đều chia hết cho m với mọi $k \geqslant 4$.

▷**2.18**.*Cho tứ giác lồi $ABCD$ có $\widehat{BCD}=\widehat{CDA}$, đường phân giác của góc ABC cắt $\overline{CD}$ tại điểm E.*

CMR: $\widehat{AEB}=\frac{\pi}{2}$ khi và chỉ khi $AB=AD+BC$.

Lời giải: Nếu $\widehat{AEB}=\frac{\pi}{2}$ thì $\widehat{CEB}<\frac{\pi}{2}$. Từ đó suy ra có điểm F nằm trên cạnh $\overline{AB}$ sao cho $\widehat{BEF}=\widehat{BEC}$. Khi đó, có hai tam giác BEC và BEF bằng nhau, suy ra $BC=BF$ và $\widehat{BFE}=\widehat{BCE}=\widehat{EDA}$. Do đó, tứ giác $ADEF$ là tứ giác nội tiếp đường tròn. Vì $\widehat{AEB}=\frac{\pi}{2}$ và $\widehat{CEB}=\widehat{BEF}$ nên ta có $\widehat{FEA}=\widehat{AED}$.

Từ đó suy ra $\widehat{FDA}=\widehat{FEA}=\widehat{AED}=\widehat{AFD}$. Do đó:

$AF=AD$ và $AB=AF+BF=AD+BC$

Nếu $AB=BC+AD$ thì có điểm F thuộc $\overline{AB}$ sao cho $AF=AD$ và $BF=BC$. Khi đó hai tam giác BCE và BFE là bằng nhau và tứ giác $ADEF$ là tứ giác nội tiếp được đường tròn.

Cũng có $\widehat{FDA}=\widehat{AFD}$. Do đó, $\widehat{FEA}=\widehat{FDA}=\widehat{AFD}=\widehat{AED}$, do đó đường thẳng AE là phân giác của góc $\widehat{FED}$.

Vì $\Delta BCE=\Delta BFE$ nên EB là phân giác của góc $\widehat{CEF}$ do vậy $\overline{AE} \perp$

$\overline{BE}$ và $\widehat{AEB} = \pi/2$.

▷**2.19.** *Trong hệ tọa độ Oxy, một tập gồm 2000 điểm* $(x_1, y_1), (x_2, y_2), ...(x_{2000}, y_{2000})$ *được gọi là tốt nếu* $0 \leqslant x_i \leqslant 83$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ *với* $i = 1, 2, .., 2000$ *và* $x_i \neq x_j$ *khi* $i \neq j$ *.Tìm số nguyên dương n lớn nhất sao cho với mọi tập tốt phần trong và biên của hình vuông đơn vị nào đó chưa đúng n điểm trong tập là phần trong và phần biên của tập tốt đó;*

Lời giải: Trước hết ta chứng minh rằng với mọi tập tốt, một hình vuông đơn vị nào đó chứa đựng 25 điểm của tập tốt đó.

Ta gọi một hình vuông đơn vị là proper (riêng) nếu 2 cạnh của nó nằm trên các đường thẳng $y = 0$ và $y = 1$.

Mỗi điểm cho trước đều nằm trong miền

$R = (x, y)|0 \leqslant ex \leqslant 83, 0 \leqslant y \leqslant 1$

Miền R có thể được chia thành các hình vuông đơn vị proper mà các cạnh bên trái nằm trên các đường thẳng có phương trình : $x = i$ với $i = 0, 1, .., 8$.

Vì $83.24 < 2000$, nên một trong các hình vuông đó phải chứa nhiều hơn 25 điểm. Vì $83.26 - 82 > 2000$ nên một trong các hình vuông đó chứa ít hươn 26 điểm. Hơn nữa trong 83 hình vuông đơn vị đó, xét các hình vuông đơn vị proper mà các cạnh bên trái nằm trên các đường thẳng dạng $x = x_i$ hay $x = x_i - 1$.

Thứ tự các hình vuông đơn vị đó từ trái qua phải giả sử là: $S_1, S_2, ...S_k$, trong đó cạnh bên trái của S_i nằm trên đường $x = t_i$ với $i = 1, 2..., k-1$, có nhiều nhất một trong các điểm cho trước nằm trong miền được xác định bởi $z_i \leqslant x < z_{i+1}$, có nhiều nhất 1 trong các điểm cho trước nằm trong miền được xác định bởi $z_{i+1} < x \leqslant z_{i+1} = 1$.

Do đó, với mọi i số các điểm trong S_i khác với các điểm trong S_{i+1} hoặc là $-1, 0$ hay -1. Vì có S_{i_1} chứa ít nhất 25 điểm và có S_{i_2} chứa nhiều nhất 25 điểm , từ đó suy ra có S_{i_3} (i_3 nằm giữai_1 và i_2) chứa đúng 25 điểm. Bây giờ ta chứng minh rằng

Đặt $d = 2.\frac{83}{1999}, x_i = (i-1).\frac{1}{2}.d$ với $i = 1, 2, ..., 2000$ và $y_{2k-1} = 0, y_{2k} = 1$ với $k = 1, 2, ..., 2000$.

Với 2 điểm phân biệt bất kỳ (x_1, y_1) mà cùng nằm trên đường nằm ngang

$(y = 0hocy = 1)$ thì khoảng cách giữa chúng thấp nhất là $d > \frac{2}{25}$
Gọi $XYZW$ là 1 hình vuông đơn vị. Với $j = 0, 1$ miền R_o bị chặn bởi hình vuông đó giao với mỗi đường thẳng $y = j$ trong một khoảng đóng có độ dài r_i. Nếu ít nhất một trong các số r_o, r_1 là 0 thì khoảng tương ứng chứa nhiều nhất một điểm (x_i, y_i). Khoảng khác có chiều dài nhiều nhất $\sqrt{2}$, và do đó có thể chưưa nhiều nhất $[\frac{\sqrt{2}}{d}] + 1 \leqslant 18$ các điểm như vậy nói chung không vượt quá 19. Ta cũng có, nếu $XYZW$ có một cặp cạnh nằm trên các đường nằm ngang thì R_o chứa nhiều nhất $[\frac{1}{\frac{d}{2}}] + 1 \leqslant 25$ các điểm như vậy/
Mặt khác, R_o giao với đường $y = 0$ và $y = 1$ tại các điểm P, Q và R, S, trong đó P và R nằm bên trái Q và S. Ta cũng có $\overline{PQ}$ và $\overline{RS}$ chứa nhiều nhất $[\frac{PQ}{d}] + 1$ và $[\frac{RS}{d}] + 1$ các điểm đã chọn.
Dịch chuyển R_o theo hướng song song với các cạnh của hình vuông đơn vị mà tâm của nó nằm trên đường thẳng $y = \frac{1}{2}$. Gọi R_1 là ảnh của R_o và gọi P', Q', R' và S' là giao của nó với các đường $y = 0$ và $y = 1$ được xác định tương tự như trên. Khi đó: $P'Q' + R'S' = PQ + RS$. Ta cũng có $P'Q' = R'S'$ do tính đối xứng. Gọi R_2 là miền thu được bởi phép quay R_1 quanh tâm của nó.
Khi đó miền $R_1 \cup R_2 - R_1 \cap R_2$ là hợp của 8 miền tam giác bằng nhau. Gọi T và U là các đỉnh bên trái và bên phải của miền R_2 tròn đường $y = 1$ và gọi V là đỉnh của R_1 trên đường $y = 1$.
Gọi K và L là các đỉnh trên cùng của các cạnh thẳng đứng của R_2 (và cùng thuộc miền bị chặn R_1). Ta có: $\Delta KTR' \cong \Delta S'VR' \cong S'VL$ Ta cũng có:
$TR' + R'S' + S'V = TU = 1$
Mặt khác, theo bất đẳng thức tam giác $TR' + S'V = R'V + S'V > R'S'$
Từ đó suy ra $R'S' < \frac{1}{2}$.
Vì $P'Q' = R'S'$, số các điểm (x_i, y_i) nằm trong $XYZW$ nhiều nhất: $[\frac{PQ}{d}] + [\frac{RS}{d}] + 2 \leqslant \frac{P'Q'+R'S'}{d} + 2 < \frac{1}{d} + 2 < 15$ Bài toán được chứng minh.

▷**2.20**.*Cho tam giác nhọn ABC*

(a) CMR có duy nhất ba điểm A_1, B_1, C_1 *tương ứng nằm trên* $\overline{BC}, \overline{CA}, \overline{AB}$ *thỏưa mãn:nếu ta chiếu hai trong ba điểm đó lên cạnh tương ứng (còn lại), thì trung điểm của hình chiếu là điểm còn lại.*

(b) CMR tam giác $A_1B_1C_1$ đồng dạng với tam giác có các đỉnh là trung điểm của ΔABC

Lời giải: (a) Trước hết ta xem xét ngược lại, giả sử có tam giác A_1B1C1 có tính chất như vậy.
Gọi T là trung điểm của A_1B_1 theo định nghĩa $\overline{C_1T} \perp \overline{AB}$
Gọi P là trọng tâm của $\Delta A_1B_1C_1$. Vì $\overline{PA_1} \perp \overline{BC}$, $\overline{PB_1} \perp \overline{CA}$ và $\overline{PC_1} \perp \overline{AB}$, P xác định duy nhất $A_1B_1C_1$.
Rõ ràng các tứ giác AB_1PC, BC_1PA_1, CA_1PB_1 là các tứ giác nội tiếp được đường tròn.
Đặt $\alpha = \widehat{CAB}, \beta = \widehat{ABC}, x = \widehat{A_1B_1P}$ và $y = \widehat{B_1A_1P}$
$\widehat{B_1CD} = y$
Vì các tứ giác AB_1PC_1 và CA_1PB_1 là nội tiếp được $\widehat{JPB_1} = \alpha, \widehat{JPA_1} = \beta, \widehat{A_1CP} = x$,
áp dụng định lý hàm số sin cho các tam giác
A_1TP và B_1TP ta được:
$\frac{\sin y}{\sin \beta} = \frac{TP}{TA_1} = \frac{TP}{TB_1} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$
hay $\frac{\sin y}{\sin \beta} = \frac{\sin x}{\sin \alpha}$
Một cách tương tự ta CM được :
$\frac{\sin \widehat{ACE}}{\sin \widehat{BCF}} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta}$
Trong đó, F là trung điểm của cạnh $\overline{AB}$
Vì tam giác ABC nhọn nên ta suy ra:
$\widehat{A_1CP} = x = \widehat{ACF}$ và $\widehat{B_1CD} = y = \widehat{BCF}$
Do đó các đường CP và CF đối xứng qua đường phân giác của góc ACB. Ta có kết quả tương tự cho các đường AP và AD, BP và BE, trong đó D và E là các trung điểm của các cạnh $\overline{BC}$ và $\overline{CA}$
Từ đó suy ra P là "isognal cọnugate" của G, G là trọng tâm của ΔABC. Do đó, P là duy nhất và bước ngược lại chỉ ra rằng P xác định duy nhất $\Delta A_1B_1C_1$ thỏa mãn điều kiện của bài toán.
(b) Kéo dài $\overline{AG}$ về phía G đến K sao cho $GD = DK$. Khi đó, $BGCK$ là hình bình hành và
$CK = BG = \frac{2}{3}.BE$, $CG = \frac{2}{3}.CF$

$GK = AG = \frac{2}{3}.AD$

Do đó, tam giác CGK đông dạng với tam giác tạo bởi các đường trung bình của ΔABC. Ta cần chứng minh $A_1B_1C_1$ và CGK là đồng dạng
Thật vậy:
$\widehat{B_1C_1A_1} = \widehat{B_1C_1P} + \widehat{A_1C_1P} = \widehat{B_1AP} + \widehat{A_1BP}$
$= \widehat{BAG} + \widehat{GBA} = \widehat{KGB} + \widehat{GKC}$
Chứng minh tương tự ta được:
$\widehat{C_1A_1B_1} = \widehat{KCG}$

▷**2.21**.*Cho $p \geqslant 3$ là một số nguyên tố và $a_1, a_2, ..., a_{p-2}$ là một dãy các số nguyên dương sao cho p không chia hết cho a_k hoặc $a_k^k - 1$ với mọi $k = 1, 2, ..., p-2$.*
CMR tích của một số phần tử của dãy đồng dư với modulo p.

Lời giải: Ta chứng minh bằng qui nạp theo $k = 2, ..., p-2$ có các số nguyên $b_{k,1}...b_{k,i}$ sao cho:
(i) mỗi $b_{k,i}$ hoặc bằng 1 hoặc là tích của một số phần tử của dãy $a_1, a_2, ..., a_{p-2}$ và
(ii) $b_{k,m} \neq b_{k,n}$(modp) với $m \neq n$
Với $k = 2$, ta có thể chọn $b_{1,1} = 1$ và $b_{1,2} = a_1 \equiv 1$ (modp)
Giả sử chúng ta đã chọn được $b_{k,1}, ..b_{k,k}$.
Vì $a_k \not\equiv 1$ (mod p), ta có:
$(a_kb_{k,1})(a_kb_{k,2})...(a_kb_{k,i}) \not\equiv b_{k,1}b_{k,2}, ...b_{k,i}$ (modp)
Do đó, chúng ta không thể hoán vị $(a_kb_{k,1}...a_kb_{k,k})$ sao cho mỗi phần tử là đồng dư theo modulop với phần tử tương ứng trong $(b_{k,1}..., b_{k,k})$.
Vì các số $a_kb_{k,i}$ là khác nhau theo modulop nên phải k_o sao cho các số $b_{k,1}, ..., b_{k,k}, a_k.b_{k,1}$ không có hai số nào *đồng dư thep modul p. Đặt $b_{k+1,1}, b_{k+1,2}, ..., b_{k+1,k+1}$ là các số trên. Mỗi bộ $k+1$ số này đều bằng 1 hoặc là tích của một số phần tử của dãy $a_1, a_2, ..., a_{p-2}$. Phép quy nạp được chứng minh hoàn toàn.
Xét các số $b_{p-1,1}, ..., b_{p-1,p-1}$. Chắc chắn một trong các số này đồng dư với 2 theo modul p vì số đó khác 1 và đồng dư với tích của một số số a_k

▷**2.22**.*Cho tam giác nhọn ABC cân tại A. Gọi D là trung điểm của AB. Chọn E trên AB, và lấy O là tâm đường tròn ngoại tiếp của ΔACE. Chứng minh rằng đường thẳng qua D vuông góc với D_o, đường thẳng qua E*

vuông góc với $\overline{BC}$ và đường thẳng qua B song song với $\overline{AC}$ là đồng quy.

Lời giải: Gọi l là đường thẳng đi qua B và song song với đường thẳng AC, gọi F_1 và F_2 là các điểm trên đường thẳng l sao cho $\overline{OD} \perp \overline{DF_1}$ và $\overline{BC} \perp \overline{EF_2}$

Gọi $H_1 v H_2$ lần lượt là hình chiếu vuông góc của F_1 và F_2 là đường thẳng AB. Vì góc CAB nhọn nên điểm 0 nằm trong ΔABC. Từ đó, suy ra F_1 nằm giữa hai tia AB và AC.

Vì góc ABC nhọn nên F_2 cũng nằm giữa hai tia AB và AC.

Ta cần chứng minh $F_1H_1 = H_2F_2$.

Gọi G là tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC và gọi O_1, G_1 lần lượt là hình chiếu vuông góc của 0 lên AB và G lên 00_1.

Vì $\overline{OD} \perp \overline{DF_1}$, $\Delta OO_1D \sim \Delta DH_1F$ nên

$\frac{DH_1}{F_1H_1} = \frac{OO_1}{O_1D}$ (1)

Đặt $\widehat{BAC} = \widehat{CBA} = x$. Vì $AG = GC$ và $AO = OC$, GO là phân giác của góc AGC nên $\widehat{CGO} = x$.

Vì $\overline{CG} \parallel \overline{OO_1}$, $\widehat{G_1OG} = \widehat{CGO} = x$

Do đó, các tam giác vuông GOG_1 và F_1BH_1 đồng dạng và:

$\frac{BH_1}{BF_1} = \frac{OG_1}{OG}$ (2)

Từ (1) và (2) ta suy ra:

$$F_1H_1 = \frac{BH_1.O_1D}{OG_1} = \frac{DH_1.O_1D}{OO_1}$$

.

$$= \frac{DH_1.O_1D - BH_1.O_1D}{OO_1 - OG_1}$$

$$= \frac{BD.O_1D}{G_1O_1} = \frac{BD.O_1D}{GD}$$

.

Vì $\widehat{DGB} = \widehat{ACB} = \pi - 2.x$, ta thu được

$$F_1H_1 = -tan2x.O_1D$$

Gọi I là giao điểm của $\overline{BC}$ và $\overline{EF_2}$
Vì $\overline{BF_2} \parallel \overline{AC}$, $\widehat{F_2BI} = \widehat{ACB} = \pi - 2x$ và $\widehat{H_2BF_2} = x$
Để ý rằng $BE = AB - AE$
$= 2.(AD - AO_1) = 2O_1D$
Từ đó suy ra:

$$F_2H_2 = BF_2. \sin H_2BF_2 = BF_2. \sin x$$

$$= \frac{BI}{\cos \widehat{F_2BI}}. \sin x = \frac{BI. \sin x}{-\cos 2x}$$

$$= -\frac{BE. \cos x \sin x}{\cos 2x} = -O_1D.tan2x = F_1H_1$$

Ta có điều phải chứng minh.

▷**2.23**.*Cho n là một số nguyên dương. Một dãy số được gọi là dãy nhị phân nếu các phần tử của nó là 0 hoặc 1. Gọi A là tập tất cả các dãy nhị phân có n phần tử , và gọi* $0 \in A$ *là dãy mà các phần tử đều là 0. Dãy* $c = (c_12, ..., c_n)$ *được gọi là tổng* $a + b$ *của các dãy* $a = (a_1, a_2, ..., a_n)$ *và* $b = (b_1, b_2, ..., b_n)$ *nếu* $c_i = 0$ *khi* $a_i = b_i$ *và* $c_i = 1$ *khi* $a_i \neq b_i$
Gọi $f : A \to \mathcal{A}$ *là ánh xạ với* $f(0) = 0$ *sao cho nếu a và b có đúng n phần tử khác nhau thì* $f(a)$ *và* $f(b)$ *cũng có đúng n phần tử khác nhau. CMR: nếu* $a, b, c \in \mathcal{A}$ *sao cho* $a + b + c = 0$ *thì* $f(a) + f(b) + f(c) = 0$

Lời giải: Xét dãy $e_1 = (1, 0, 0, ..., 0), e_2 = (0, 1, 0, ..., 0), ..., e_n = (0, 0, ..., 0, 1)$. Với mỗi $i, 0$ và e_i khác nhau do phần tử 1, nên $f(0)$ và $f(e_i)$ cùng khác nhau. Như vậy tức là $f(e_i = e_j)$ với j nào đó.
Xét mỗi dãy tùy ý $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ với $f(x) = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Nếu x có tham số 1 thì $f(x)$ cũng có tham số 1. Nếu $f(e_1) = e_j$ và $x_i = 1$ thì e_i và x có $t - 1$ phần tử khác nhau . Điều này chỉ xảy ra nếu $y_j = 1$, vì nếu không e_j và $f(x)$ sẽ có $t + 1$ phần tử khác nhau. Một cách tương tự , nếu $x_i = 0$ thì $y_j = 0$

Nếu $a = (a_1, a_2, ..., a_n), b = (b_1, b_2, ..., b_n), c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ và $a+b+c = 0$ thì $a_i + b_i + c_i$ là chẵn với $i = 1, 2, ...n$

Với mỗi e_j ta có thể chọn e_j sao cho $f(e_i) = e_j$

Các phần tử thứ j của $f(a), f(b), f(c)$ tương ứng là a_i, b_i, c_i nên tổng của chúng là một số chẵn . Do đó, $f(a) + f(b) + f(c)$ có phần tử thứ j là 0 với $\forall j$ và $f(a) + f(b) + f(c) = 0$.

Chương 3

Đề thi olympic Canada

▷**3.24**.*Cho* $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ *là một dãy số nguyên liên tiếp trong khoảng* $[-1000, 1000]$. *Giả sử* $\sum\limits_{i=1}^{2000} a_i = 1$
Chứng minh rằng điều kiện xác định là có dãy con của $a_1, a_2, ..., a_{2000}$ *có tổng bằng 0*

Lời giải: Ta thấy rằng có thể sắp xếp lại dãy

$$a_1, a_2, ..., a_{2000}$$

thành dãy

$$b_1, b_2, ..., b_{2000}$$

sao cho $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i \in [-999, 1000]$ với $n = 1, 2, 3, ..., 2000$
Chúng ta giới hạn b_i. Không phải tất cả các $a_i = -1000$ do vậy chúng ta có thể đặt b_1 bằng a_i nào đó thuộc $[-999, 1000]$.
Ấn định chỉ số i này. Giả sử chúng ta đã xây dựng dãy $b_1, b_2, ..., b_k (1 \leq k < 2000)$ với k đã được ấn định.
Nếu $\sum\limits_{i=1}^{k} b_i \in [-999, 0]$ hoặc $[1, 1000]$ thì tổng của các
a_i có thể không xác định hoặc xác định.
Vì vậy ít nhất một a_i là xác định (hoặc không xác định). Đặt $b_{k+1} \in [1, 1000]$ hoặc $[-1000, 0]$, có nghĩa là $\sum\limits_{i=1}^{k+1} b_i \in [-999, 1000]$

Cứ lặp lại quá trình trên ta xây dựng được dãy $b_1, b_2, ..., b_{2000}$. Bằng cách xây dựng trên ta xây dựng được dãy tổng riêng $\sigma_n = \sum\limits_{i=1}^{n} b_i\,(1 \leq n \leq 2000)$ bằng 1 của 2000 số nguyên thuộc $[-999, 1000]$.

Bởi vậy nếu $\sigma_i \neq \sigma_j$ với i<j hoặc trái lại $\sigma_i = 0$ với một vài i.

Trong trường hợp đầu tiên ta có dãy con $b_{i+1}, b_{i+2}, ..., b_j$ có tổng bằng 0.

Trong trường hợp thứ 2 có dãy con $b_1, b_2, ..., b_i$ có tổng bằng 0.

Vậy ta có đpcm.

▷**3.25**.*Cho tứ giác ABCD có* $\widehat{CBD} = 2\widehat{ADB}, \widehat{ABD} = 2\widehat{CDB}, \mathrm{AB} = \mathrm{CD}$. *Chứng minh rằng AB=CD.*

Lời giải: Đặt $x = \widehat{ADB}$, y $=\widehat{CDB}$, $\rightarrow \widehat{CBD} = 2\mathrm{x}, \widehat{ABD} = 2y$

Áp dụng định lý Sin trong tam giác ABD và tam giác CBD ta có:

$\frac{\sin(\pi-(2y+x))}{\sin \mathrm{x}} = \frac{BD}{BA} = \frac{BD}{BC} = \frac{\sin(\pi-(2x+y))}{\sin \mathrm{y}}$

$\Leftrightarrow \sin(2y + x)\sin y = \sin(2\mathrm{x} + y)\sin x$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(\cos(y + x) - \cos(3y + x)) = \frac{1}{2}(\cos(x + y) - \cos(3x + y))$

$\Leftrightarrow \cos(3y + x) = \cos(3x + y)$

Do $0 < x + y = \frac{1}{2}\widehat{ABC} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < 3y + x + (3\mathrm{x} + y) < 2\pi$

$\Rightarrow 3y + x = 3\mathrm{x} + y$

$\Rightarrow x = y \Rightarrow \widehat{ABD} = \widehat{CBD} \Rightarrow AD = CD$

▷**3.26**.*Cho dãy số thực* $a_1, a_2, ..., a_{100}$ *thỏa mãn* $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_{100} \geq 0(1)$ *và* $a_1 + a_2 \leq 100(2)$, $a_3 + a_4 + ... + a_{100} \leq 100(3)$

Tìm max của $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{100}^2$ *và chỉ ra các* a_i *đạt được.*

Lời giải: Với $i \geq 3$ ta có $0 \leq a_i \leq a_2$ và suy ra $a_i(a_i - a_2) \leq 0$

Dấu "=" xảy ra nếu $a_i \in \{0, a_2\}$

Suy ra

$$\sum_{i=3}^{100} a_i^2 \leq a_2 \sum_{i=3}^{100} a_i$$

Theo (3) dấu "=" chỉ xảy ra nếu $\sum\limits_{i=3}^{100} a_i = 100$ hoặc $a_2 = 0$

Từ (1) và (2) suy ra $0 \leq a_2 \leq 100 - a_1 \leq 100 - a_2$ hoặc $0 \leq a_2 \leq 50$

$$\Rightarrow 2\mathrm{a}_2(a_2 - 50) \geq 0$$

Dấu "=" xảy ra nếu $a_2 = 0$ hoặc $a_2 = 50$

$\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{100} a_i^2 = a_1^2 + a_2^2 + \sum\limits_{i=3}^{100} a_i^2 \leq (100 - a_2)^2 + a_2^2 + 100\mathrm{a}_2$

$= 10000 + 2\mathrm{a}_2(a_2 - 50) \leq 10000$

Dấu "=" chỉ xảy ra nếu :

$(a)\,\{a_3, a_4, ..., a_{100}\} \subseteq \{0, a_2\}$

$(b)\,\sum\limits_{i=3}^{100} a_i = 100$ hoặc $a_2 = 0$

$(c) a_1 = 100 - a_2$

$(d) a_2 \in \{0, 50\}$

Từ điều kiện trên dãy $a_1, a_2, ..., a_{100}$ có thể là:

100, 0, 0, ..., 0

hoặc 50, 50, 50, 50, 0, 0,...,0

Vậy tổng lớn nhất là 10.000

Chương 4

Đề thi olympic Trung Quốc

▷**4.27**.*Cho tam giác ABC thỏa mãn* $BC \leq CA \leq AB$.*Gọi R và r lần lượt là bán kính các đường tròn ngoại tiếp và nội tiếp tam giác ABC.Tìm theo góc C của tam giác để* $BC + CA - 2R - 2r$ *là dương ?,âm hoặc bằng 0 ?.*

Lời giải: Đặt AB = c,BC = a,CA = b, góc A = 2x, góc B = 2y, góc C = 2z.
Ta có :$0 < x \leq y \leq z$ và $x + y + z = \frac{\pi}{2}$ Đặt s =BC + CA – 2R – 2r = a + b – 2R – 2r.
Áp dụng công thức sau :

$$2R = \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a}{sin2x} = \frac{b}{\sin 2y} = \frac{c}{\sin 2z}$$

và

$$r = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = 4R \sin x \sin y \sin z$$

Ta suy ra được s = 2R(sin2x + sin2y -1 – 4sinxxinyxinz).
+) nếu ∆ABC là tam giác vuông tại C với $C = \frac{\pi}{2}$.Ta có : 2R = c và 2r = a + b – c ⇒ s=0.
Do đó,chúng ta nhóm thừa số chung cos2z trong biểu thức s :

$$\frac{s}{2R} = 2\sin(x+y)\cos(x-y) - 1 + 2(\cos(x+y) - cos(x-y))\sin z$$
$$= 2\cos z\cos(x-y) - 1 + 2(\sin z - cos(x-y))\sin z$$

$$= 2\cos(x-y)(\cos z - \sin z) - \cos 2z$$
$$= 2\cos(y-x).\frac{\cos^2 z - \sin^2 z}{\cos z + \sin z} - \cos 2z$$
$$= \left[\frac{2\cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - 1\right]\cos 2z$$

Từ đó chúng ta có thể đưa vào giá trị cosz + sinz bởi nó là dương khi $0 < z < \frac{\pi}{2}$.
Chú ý rằng $:\leq y - x < \min\{y, x+y\} \leq \min\{z, \frac{\pi}{2} - z\}$.
Vì $z \leq \frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{2} - z \leq \frac{\pi}{2}$ nên ta có:

$$\cos(y-x) > \max\left\{\cos z, \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right\} = \max\{\cos z, \sin z\}$$

Từ đó suy ra :
$$\frac{2\cos(y-x)}{\cos z + \sin z} - 1 > 0$$

Vì vậy s = pcos2z đối với p > 0 hay s = BC + CA - 2R - 2r có thể dương,bằng 0 hoặc âm nếu góc C tương ứng là nhọn,vuông,tù.

▷**4.28**.*Dãy số vô hạn*

$$a_1, a_2, ...$$

được xác định 1 cách đệ quy như sau :

$$\mathrm{a}_1 = 0, \mathrm{a}_2 = 1$$

và $a_n = \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n(n-1)a_{n-2} + (-1)^n\left(1 - \frac{n}{2}\right)$
Với $\mathrm{n} \geq 3$,*tìm một công thức định nghĩa cho hàm :*
$f_n = a_n + 2\binom{n}{1}a_{n-1} + 3\binom{n}{2}a_{n-2} + ... + n\binom{n}{n-1}a_1$

Lời giải: *Cách giải 1:* Viết lại mối quan hệ đệ quy thành :

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}n((-1)^{n-1} + (n-1)a_{n-2})$$

Nếu
$$(-1)^{n-1} + (n-1)a_{n-2} = a_{n-1}$$

Ta có:
$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{2}na_{n-1} + \frac{1}{2}na_{n-1} = (-1)^n + na_{n-1}$$

Do đó dùng phương pháp quy nạp từ biểu thức

$$\mathrm{a_n = (-1)^n + na_{n-1}}$$

ta dễ dàng tìm ra được:

$$a_n = n! - \frac{n!}{1!} + \frac{n!}{2!} - \frac{n!}{3!} + ... + (-1)^n \frac{n!}{n!}$$

Vì thế,theo công thức nổi tiếng Euler
a_n là chuỗi số của sự xáo trộn của bộ số (1, 2, . . . , n), nghĩa là số hoán vị của bộ n số mà không có điểm cố định.Để mỗi cặp (π, j)của hoán vị π phân biệt từ 1 phần tử hay 1 số nguyên j trong dãy 1, 2, . . . , n,ta xác định 1 điểm chú ý nếu j là 1 điểm cố định của π
Với k xác định k = 1, 2, . . . , n, có $\binom{n}{n-k} a_k$ hoán vị π với n-k điểm xác định, có $\binom{n}{n-k}$ cách chọn các điểm cố định này,và chuỗi $\mathrm{a_k}$ của k điểm còn lại.Với mỗi hoán vị π như vậy,có n-k cặp (π, j) được xác định.
Xét tổng các hoán vị,ta có tổng số điểm chú ý được xác định:

$$\sum_{k=1}^{n} (n-k) \binom{n}{n-k} a_k = f_n - \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k} a_k = f_n - (n! - 1)$$

Khi tổng $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{n-k} a_k$ đếm được n! − 1 hoán vị ít hơn n điểm cố định.
Mặt khác:
Với mỗi j, $j \in \{1, 2, ..., n\}$ có (n − 1)! − 1 hoán vị phân biệt từ phần tử xác định j.
Vì vậy,xét toàn bộ tổng,ta có tổng số điểm xác định chú ý được chỉ ra là:
$\sum_{j=1}^{n} ((n-1)! - 1) = n(n-1)! - n$
Cho 2 tổng trên bằng nhau,ta được:

$$f_n = 2.n! - n - 1$$

Lưu ý: sau khi chỉ ra được $f_n = 2.n! - n - 1$ đối với các giá trị nhỏ của n,ta có thể sử dụng mối quan hệ đệ quy và đồng nhất đẳng thức các phần tử để chứng minh công thức là đúng với mọi n.

Cách giải 2: Chúng tôi giới thiệu 1 phương pháp chứng tỏ rằng $\mathrm{a_n}$ là chuỗi số của hoán vị (1, 2, . . . , n).Với n $\geq$ 3, ta có :

$$\mathrm{a_n = na_{n-1} + (-1)^n = a_{n-1} + \ (n-1)\, a_{n-1} + (-1)^n}$$

$$= \left[(\mathrm{n}-1)\,\mathrm{a_{n-2}} + (-1)^{n-1}\right] + (n-1)\, a_{n-1} + (-1)^n$$

$$= (n-1)\,(a_{n-1} + a_{n-2})$$

Gọi $\mathrm{b_n}$ là chuỗi số của hoán vị của (1, 2, . . . , n).Mỗi hoán vị là một trong số những dạng sau đây:

a)Với k $\neq$ 1 1 ánh xạ tới k và k ánh xạ tới 1.Như thế sẽ có n-1 giá trị cho k và với mỗi k có b_{n-2}hoán vị cho n-2 phần tử còn lại .Do vậy,có $(n-1)\, b_{n-2}$ hoán vị như trên.

b) 1 ánh xạ tới k nhưng k không ánh xạ tới 1.giá trị k cố định. Như vậy tồn tại 1 song ánh giữa các hoán vị π và các hoán vị có chỉ số 1 là cố định,thông qua ánh xạ

$$\pi \mapsto t\pi$$

ở đây t là sự chuyển đổi giữa 1 và k.Bởi có b_{n-1} ánh xạ trong đó chỉ số 1 là cố định ,nên có b_{n-1} phép hoán vị π.

Cho k biến thiên từ 2 đến n,ta thấy có $(n-1)\, b_{n-2}$ hoán vị của dạng (b).

Vì vậy $b_n = (n-1)\,(b_{n-1} + b_{n-2})$

Từ $a_1 = b_1 = 0$ và $a_2 = b_2 = 1$, $a_n = b_n$ với $n \geq 1$ như yêu cầu chứng minh.

▷**4.29**.*Một câu lạc bộ bóng bàn muốn tổ chức 1 giải đấu đôi,một loạt những trận đấu mà trong mỗi trận đấu một cặp người chơi sẽ thi đấu với một cặp khác.Gọi số trận đấu của một người chơi trong một giải đấu là số trận đấu mà anh(cô) ta tham gia.*

Cho dãy số

$$\mathrm{A} = \{\mathrm{a_1, a_2, ..., a_k}\}$$

phân biệt,nguyên dương,chia hết cho 6.

Xác định số lượng người chơi tối thiểu để có thể thiết lập một giải đấu đôi mà :

(i) mỗi người tham gia nhiều nhất là 2 cặp đấu.

(ii) bất kì 2 cặp khác nhau có nhiều nhất 1 trận đấu gặp nhau.

(iii) nếu 2 người chơi cùng một cặp,họ không bao giờ phải thi đấu với nhau.

(iv) Số lượng các trận đấu của người tham gia được thiết lập là A.

Lời giải: ***Bổ đề.***

Giả sử rằng :$\mathrm{k} \geq 1$ và $1 \leq \mathrm{b}_1 < \mathrm{b}_2 < \cdot\cdot\cdot < \mathrm{b}_\mathrm{k}$.Như thế tồn tại một đồ thị có $b_k + 1$ đỉnh trong đó bộ số $\{b_1, b_2, ..., b_k\}$ là số độ của các đỉnh trong $b_k + 1$ đỉnh.

Chứng minh:

Ta chứng minh bổ đề bằng phương pháp quy nạp theo k.

Nếu $\mathrm{k} = 1$,toàn bộ đồ thị gồm những đỉnh b_1 thỏa mãn.

Nếu $\mathrm{k} = 2$,lấy $b_2 + 1$ đỉnh, phân biệt các đỉnh này với đỉnh b_1 và nối 2 đỉnh bằng một đường thẳng khi và chỉ khi một trong số các đỉnh là phân biệt.

Ta cần chứng minh bổ đề đúng với $k = i \geq 3$ và giả sử nó đúng khi $k < i$ .Ta dựng đồ thị G của $b_i + 1$ đỉnh,tạo thành các đường thẳng giữa hai điểm và từ đó thay đổi độ của các đỉnh trong mỗi đỉnh.Chọn những điểm có độ $b_i + 1$ đỉnh,và chia chúng ,và chia chúng thành 3 bộ giá trị S_1, S_2, S_3 với $|\mathrm{S}_1| = \mathrm{b}_1, |S_2| = b_{i-1} - b_1 + 1$, và $|\mathrm{S}_3| = \mathrm{b}_\mathrm{i} - (\mathrm{b}_{\mathrm{i}-1} + 1)$.

Theo giả thiết quy nạp,ta có thể dựng các đường thẳng giữa các đỉnh trong S_1 trong đó độ của các đỉnh được xác định từ tập hợp $\{\mathrm{b}_2 - \mathrm{b}_1, ..., \mathrm{b}_{\mathrm{i}-1} - \mathrm{b}_1\}$

Ngoài ra dựng các đường thẳng có đỉnh trong S_1 là điểm cuối.Mỗi đỉnh trong S_1 bây giờ có độ b_i, mỗi đỉnh trong S_3 có độ b_1, và độ của các đỉnh trong S_2được xác định từ tập hợp $\{\mathrm{b}_2, ..., \mathrm{b}_{\mathrm{i}-1}\}$.

Từ đó kết hợp lại tất cả các độ của $b_i + 1$ đỉnh trong đồ thị G được xác định từ tập $\{b_1, b_2, ..., b_i\}$.

Điều này hoàn tất bước quy nạp và có điều phải chứng minh.

• Giả sử rằng ta có 1 giải đấu đôi trong đó n người chơi thỏa mãn điều kiện đưa ra.Có 1 nhất 1 người chơi,ta gọi là X,có số trận đấu là max(A).

Gọi m là số cặp khác anh(cô) ấy phải thi đấu.Mỗi cặp này có 2 người chơi và được tính là 2m.Bất kì người chơi nào được tính nhiều nhất 2 lần theo cách cấu thành này bởi vì mỗi người chơi thuộc nhiều nhất 2 cặp .

Do đó,người chơi X sẽ phải đấu với ít nhất m người chơi khác.Nếu X ở trong j cặp (với j = 1 hoặc 2),sẽ có nhiều nhất tổng số m + j + 1 người chơi.

Ngoài ra X chơi nhiều nhất jm trận,kéo theo $\mathrm{jm} \geq \max(\mathrm{A})$.

Do đó $\mathrm{n} \geq \mathrm{m} + \mathrm{j} + 1 \geq \max(\mathrm{A})/\mathrm{j} + \mathrm{j} + 1 \geq \min\{\max(\mathrm{A}) + 2, \max(\mathrm{A})/2 + 3\}$.

Vì $max(A) \geq 6$,ta có $\max(\mathrm{A}) + 2 > \max(\mathrm{A})/2 + 3$,kéo theo $\mathrm{n} \geq \max(\mathrm{A})/2 + 3$

• Ta cần chứng minh $\mathrm{n} = \max(\mathrm{A})/2 + 3$ là số trận nhiều nhất có thể đạt được.

Từ bổ đề,ta có thể dựng đồ thị của $\frac{\max(A)}{6} + 1$ đỉnh trong đó độ được xác định từ tập hợp $\{\frac{a_1}{6}, \frac{a_2}{6}, ..., \frac{a_k}{6}\}$.

• Chia n người chơi trong $\frac{\max(A)}{6} + 1$ thành ba phần ,và để 2 người chơi cùng trong 1 đội khi và chỉ khi họ cùng nằm trong một phần của ba phần trên .Gán cho mỗi phần (và cùng một thời điểm,hình thành 3 cặp người chơi với những cầu thủ chơi tương ứng) ứng với các đỉnh của đồ thị G,và 2 đội được xác định thi đấu khi và chỉ khi các đỉnh tương ứng là liền kề.

Giả sử rằng ta có 1 đội được sắp xếp ở đỉnh v độ $\frac{a_i}{6}$.Với mỗi độ $\frac{a_i}{6}$ có đỉnh w liền kề với v,đó là đội phải đấu trong một phần ba được sắp xếp cho đỉnh w tổng cộng $\frac{a_i}{2}$ trận.

Mỗi người chơi được xếp trong v là trong 2 đội,từ đó có số trận đấu là $2.\frac{a_i}{2} = a_i$.

Vì vậy số lượng các trận đấu của người tham gia chơi là $\{\mathrm{a_1}, \mathrm{a_2}, ..., \mathrm{a_k}\}$,khi cần thiết.

▷**4.30**.*Cho số nguyên* $\mathrm{n} \geq 2$. *Đối với bất kì tập hợp n số của dãy số thực*

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a_1}, \mathrm{a_2}, ..., \mathrm{a_n})$$

Cho lợi điểm của A là số $k \in \{1, 2, ..., n\}$ *trong đó* $\mathrm{a_k} > \mathrm{a_j}$ *với mọi giá trị* $1 \leq \mathrm{j} < \mathrm{k}$ *.*

Xét tất cả các hoán vị $\mathrm{A} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n})$ *của (1, 2, . . . , n) với điểm lợi điểm là 2.Xác định và chứng minh ý nghĩa số học của phần tử đầu tiên a_1 trong hoán vị này?.*

Lời giải: Với mỗi tập hợp n số của dãy số thực

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n})$$

Nếu $a_k > a_j$ với mọi giá trị $1 \leq \mathrm{j} < \mathrm{k}$, ta gọi a_k là 1 lợi điểm.
Nếu một hoán vị

$$\mathrm{A} = (\mathrm{a}_1, \mathrm{a}_2, ..., \mathrm{a}_\mathrm{n})$$

của (1, 2, . . . , n) có số lợi điểm là 2 thì 2 lợi điểm này phải là a_1 và n,trong đó $\mathrm{n} = a_k$ đối với những giá trị k thỏa mãn $2 \leq \mathrm{k} \leq \mathrm{n}$.
Cố định m trong dãy số $\{1, 2, ..., \mathrm{n} - 1\}$.Ta gọi các số $m + 1, m + 2, ...n$ là các số lớn, và $1, 2, ..., m - 1$ là các số bé.Trong một hoán vị với 2 lợi điểm $a_k = m$, n sẽ phải xuất hiện trong hoán vị trước tất cả các số lớn khác.Vì vậy,để xác định tất cả các hoán vị này, ta chọn n – m vị trí đầu tiên là các số lớn,đặt n tại vị trí đầu và sắp xếp n – m – 1 các số lớn khác vào phần còn lại của các vị trí đã chọn.Sau đó sắp xếp tất cả các số bé vào m – 1 vị trí còn lại.
• Vì thế,ta có $x_m = \binom{n-1}{n-m}(n-m-1)!\,(m-1)! = \frac{(n-1)!}{n-m}$ hoán vị
Vì vậy ý nghĩa số học của phần tử đầu tiên a_1 có trung bình cộng mong muốn là:

$$\frac{\sum_{m=1}^{n-1} m\,x_m}{\sum_{m=1}^{n-1} x_m} = \frac{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{n-m}}{(n-1)!\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n-m}} = \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{n-m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{n-m}}$$

$$= \frac{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{n}{m} - \sum_{m=1}^{n-1}\frac{m}{m}}{\sum_{m=1}^{n-1}\frac{1}{m}} = n - \frac{n-1}{1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}}$$

▷**4.31**.*Tìm tất cả các số nguyên dương n trong đó*

$$\mathrm{n}_1, \mathrm{n}_2, ..., \mathrm{n}_\mathrm{k} > 3$$

với

$$n = n_1 n_2 ... n_k = 2^{\frac{1}{2^k}(n_1-1)(n_2-1)...(n_k-1)} - 1$$

Lời giải: Nếu một số nguyên dương n thỏa mãn điều kiện đưa ra,thì $n = 2^m - 1$ với m là số nguyên dương.Dễ dàng kiểm tra thấy 3 là số nguyên m duy nhất nhỏ hơn 10 làm cho $n = 2^m - 1$ thỏa mãn điều kiện đưa ra.

Cho $m \geq 10$,ta phải chứng minh $2^m - 1$ không thỏa mãn điều kiện đưa ra.

Giả sử,để chỉ ra sự mâu thuẫn, lập phương trình biểu diễn một số k và $\mathrm{n_1, n_2, ..., n_k}$:

$$m = \frac{1}{2^k}(n_1 - 1)(n_2 - 1)...(n_k - 1) \geq 10$$

Với $\ell \geq 10$,ta có $\left(\frac{\ell+1}{\ell}\right)^3 < \left(\frac{5}{4}\right)^3 < 2$

Sử dụng kết quả này,ta dễ dàng chứng minh được bằng phương pháp quy nạp $2^\ell - 1 > \ell^3$ với các số ngyên $\ell \geq 10$

Vì vậy

$$2^m - 1 > m^3 = \left(\frac{n_1 - 1}{2}\right)^3\left(\frac{n_2 - 1}{2}\right)^3 ... \left(\frac{n_k - 1}{2}\right)^3 . (1)$$

Vì $n = 2^m - 1$ là lẻ, n_i là chẵn,và với mỗi $n_i > 3$, n_i nhỏ nhất phải là 5.Do đó

$$\left(\frac{n_i - 1}{2}\right)^3 \geq 4\frac{n_i - 1}{2} > n_i \, (2)$$

Cho i = 1, 2, . . . , k. Đặt (1) và (2) cùng nhau,ta thu được

$$n = 2^m - 1 > n_1 n_2 ... n_k = n$$

điều này mâu thuẫn.

Như vậy giả thiết đưa ra là sai và n = $2^3 - 1 = 7$ là đáp án duy nhất.

▷**4.32**.*Một bài thi bao gồm 5 câu hỏi nhiều lựa chọn,mỗi câu có 4 lựa chọn khác nhau.Có 2000 sinh viên làm bài thi,và mỗi sinh viên chỉ được chọn đúng 1 đáp án trong mỗi câu hỏi.*

Tìm giá trị nhỏ nhất của n về những bài thi của sinh viên thỏa mãn điều kiện: trong bất kì n bài thi,tồn tại 4 bài thi trong đó bất kì 2 bài nào có nhiều nhất 3 đáp án giống nhau.

Lời giải: Trước tiên,ta chứng minh $n \geq 25$ .Gọi 1,2,3,4 là các lựa chọn của từng câu hỏi. Thể hiện mỗi câu trả lời của sinh viên bằng một chuỗi có trật tự bao gồm 5 phần tử

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5), a_i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Trong đó đáp án của sinh viên trong câu hỏi i là a_i.Ta nói rằng 2 bài thi là cùng loại nếu chuỗi số 5 phần tử của nó thuộc vào một bộ của dạng sau

$$\{\,(\mathrm{k}, \mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4, \mathrm{a}_5)\,|\mathrm{k} \in \{1, 2, 3, 4\}\,\},$$

Trong đó

$$\mathrm{a}_2, \mathrm{a}_3, \mathrm{a}_4, \mathrm{a}_5 \in \{1, 2, 3, 4\}\,.$$

Và vì có 256 bộ,và $2000 = 256x7 + 208$,nên có ít nhất 8 câu bài thi là cùng loại theo nguyên lý Dirichlet. Trong 1992 bài thi còn lại,có 8 bài nữa cùng loại.Cuối cùng,trong 1984 bài còn lại,thêm 8 bài cùng loại nữa. Xét tập A của 24 bài thi này.Cho 2 bài thi bất kì trong tập A,chúng phải cùng loại,nghĩa là,đáp án cho 4 bài thi cuối cùng là giống nhau.Điều này mâu thuẫn với giả thiết có 4 bài thi trong tập A,trong đó có 2 bài bất kỳ có nhiều nhất là 3 câu trả lời giống nhau.
Do đó $n \geq 25$
Bây giờ chúng ta chỉ ra rằng n=25 là kết quả chấp nhận được.Xác định bộ số

$$S = \{\,(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)\,|\,\sum\nolimits_{i=1}^{5} a_i \equiv 0\,(\mathrm{mod} 4)\,, a_i \in \{1, 2, 3, 4\}\}.$$

Khi đó $|\mathrm{S}| = 4^4 = 256$ và bất kì 2 bài thi có nhiều nhất 3 đáp án giống nhau nếu 5 chuỗi phần tử tương ứng của chúng là các yếu tố phân biệt của S.
Chọn bất kì 250 yếu tố của S,và giả định rằng chính xác có 8 bài thi tương ứng với mỗi chuỗi 5 phần tử trong 250 yếu tố này.Vì $25 > 3$ nên có 8 bài thi,có 4 bài và có 5 chuỗi tương ứng là các yếu phân biệt của S,và thỏa mãn điều kiện đưa ra.
Vì vậy, n = 25.

Chương 5

Đề thi olympic Tiệp khắc

▷**5.33**.*Chứng minh rằng:*

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}}+\sqrt[3]{\frac{b}{a}}\leq\sqrt[3]{2(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)}$$

với mọi số thực a, b. Dấu "=" xảy ra khi nào ?

Lời giải: Nhân 2 vế của bất đẳng thức với $\sqrt[3]{ab}$ ta được bất đẳng thức tương đương

$$\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}\leq\sqrt[3]{2(a+b)^2}$$

Đặt $\sqrt[3]{a}=x, \sqrt[3]{b}=y$, chúng ta thấy rằng điều đó thỏa mãn chứng tỏ rằng

$$x^2+y^2\leq\sqrt[3]{2(x^3+y^3)^2}(*)$$

với x, y >0.

Áp dụng bất đẳng thức trung bình ta được

$$3x^4y^2\leq x^6+x^3y^3+x^3y^3$$

Dấu "=" xảy ra nếu và chỉ nếu $x^6=x^3y^3=y^6$ hoặc x=y.

Cộng 2 vế của 2 bất đẳng thức với nhau và cộng x^6+y^6 vào 2 vế của bất đẳng thức ta có:

$$x^6+y^6+3x^2y^2(x^2+y^2)\leq 2(x^6+y^6+2x^3y^3)$$

Bất đẳng thức (*) xảy ra khi x=y hoặc a=b.

▷**5.34**.*Tìm tất cả tứ giác lồi ABCD mà tồn tại một điểm E nằm bên trong tứ giác thỏa mãn điều kiện sau đây:*
Bất kỳ đường thẳng nào qua E và cắt các cạnh AB và CD đều chia tứ giác lồi ABCD thành 2 phần bằng nhau.

Lời giải: Giả sử rằng tứ giác lồi ABCD có tính chất đó. Lấy $X_1, \mathrm{X}_2, \mathrm{X}_3$ là 3 điểm nằm trên cạnh AB
với $AX_1 < \mathrm{AX}_2 < \mathrm{AX}_3$. Như vậy cạnh X_kE cặt đoạn CD tại Y_k với k=1,2,3.
Do tứ giác ABCD lồi và $CY_1 < CY_2 < CY_3$ nên ta có:
$0 = \frac{1}{2}[ABC\mathrm{D}] - \frac{1}{2}[ABC\mathrm{D}] = [\mathrm{AX}_1Y_1D] - [\mathrm{AX}_2Y_2D]$
$= [EY_1Y_2] - [\mathrm{EX}_1X_2] = \frac{1}{2}\sin\widehat{Y_1EY_2}(EY_1.EY_2 - \mathrm{EX}_1.\mathrm{EX}_2)$
Suy ra $EX_1.EX_2 = \mathrm{EY}_1.\mathrm{EY}_2$
Tương tự có $EX_2.EX_3 = \mathrm{EY}_2.\mathrm{EY}_3$
Do đó $EX_1/EY_1 = \mathrm{EX}_3.\mathrm{EY}_3$ và $\Delta Y_1EY_3 \sim \Delta X_1\mathrm{EX}_3$
Cho nên $X_1X_3 \parallel Y_1Y_3$. Điều đó có nghĩa là $AB \parallel C\mathrm{D}$
Mặt khác ta có ABCD là tứ giác lồi với $AB \parallel C\mathrm{D}$. Có E là trung điểm của đoạn M_1M_2. Điểm M_1 và M_2 tương ứng là trung điểm của đoạn AB và CD.
Giả sử một cạnh đó đi qua E và cắt cạnh AB tại X và cắt cạnh CD tại Y. Kết quả là nó đi qua M là giao điểm của AB và CD.
Và XM_1 với YM_2
Điều đó ta có $XM_1 = YM_2$ và $\mathrm{AX} + DY = B\mathrm{X} + CY$
Khi đó mỗi tứ giác AXYD và BXYD là hình thang hoặc hình bình hành có cùng đường cao và cùng chiều dài cạnh đáy.
Bởi vậy chúng có diện tích bằng nhau.(Đpcm)

▷**5.35**.*Bài 3: Cho tam giác đều ABC với cạnh đáy AB và đường cao CD. Điểm P nằm trên cạnh CD. Điểm E là giao điểm của AP với BC và F là giao điểm của BP với AC. Giả sử rằng đường tròn nội tiếp tam giác ABP và tứ giác PECF bằng nhau. CMR đường tròn nội tiếp tam giác ADP và BCP cũng bằng nhau.*

Lời giải: Cho ω_1 và ω_2 là đường tròn nội tiếp tứ giác CEPF và tam giác ABP, và hai điểm I_1 và I_2 lần lượt là tâm của của 2 đường tròn ω_1 và

ω_2.

Bởi vì chúng đối xứng qua CD, I_1 và I_2 là 2 điểm trên đoạn CD với P nằm giữa 2 điểm đó.

Bởi vì ω_1 và ω_2 là hai đường tròn bằng nhau và vẽ nội tiếp trong góc đối đỉnh, chúng đối xứng qua mỗi điểm P.

Do đó $PI_1 = PI_2$

Do tứ giác ADBP và BDP đồng dạng, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng bán kính đường tròn nội tiếp r_1 của tam giác BCD bằng bán kính đường tròn nội tiếp BDP.

Gọi X và Y tương ứng là giao điểm của 3 đường phân giác trong của tam giác BCP và BDP.

Nhận xét rằng I_1 nằm trong tam giác CBF, như vậy I_1 nằm trên đường phân giác của góc CBF, tức là góc CBP.

Như vậy X nằm trên đoạn BI_1 và tương tự Y nằm trên BI_2

Do $PI_1 = PI_2$, $[BI_1P] = [BI_2P]$ nên

$r_1(PI_1 + BP) = 2([I_1P\mathrm{X}] + [XPB]) = 2[I_1BP] = 2[PI_2B] = 2([PI_2Y] + [PIB])$

$= r_2(PI_2 + BP)$

Do đó $r_1 = r_2$

▷**5.36**.*Cho 2000 điểm trong tam giác của một bề mặt thuộc một mặt phẳng. Với mỗi ảnh của hình tam giác qua một phép tịnh tiến là 1 tam giác bao gồm trọng tâm.*

Chứng minh diện tích của các tam giác này nhỏ hơn $\frac{22}{9}$.

Lời giải: Định hướng của mỗi hình trong bài toán của 2000 điểm đã cho trong một tam giác có 1 cạnh cùng với đỉnh đối diện ở trên.

Để cho tam giác ABC có 1 tam giác với AB nằm ngang và A nằm bên trái B. Như vậy không có 1 điểm nào khác trong 1999 hình tam giác có bề mặt nằm ngang bên dưới cạnh AB.

Chúng ta bắt đầu bởi khái niệm về khoảng cách từ khoảng cách Oclit và chúng ta định nghĩa chính thức mô tả một vài mối liên hệ giữa 2000 tam giác.

Xác định một điểm hay kẻ một đường thẳng song song với BC. Để cho khoảng cách d_α từ một điểm α khác tồn tại khoảng cách giữa hai đường

thẳng song song đến BC đi qua tam giác đó.
Chọn $a' = d_\alpha(\overline{BC}, A)$
Định nghĩa tương tự với β, γ và khoảng cách giữa CA và AB với :
$b' = d_\beta(\overline{CA}, B) > 0, c' = d_\gamma(\overline{AB}, C) > 0$.
Chúng ta biết rằng sự tịnh tiến ảnh qua 1 khoảng cách nào đó cho ảnh giống nhau với khoảng cách giữa β và γ.
Giả sử rằng $\Delta XY\mathrm{Z}$ và $\Delta X_0Y_0\mathrm{Z}_0$ là 2 hình tam giác trong số 2000 tam giác đó với $\overline{XY} \parallel \overline{X'Y'} \parallel \overline{AB}$ và $\overline{Y\mathrm{Z}} \parallel \overline{Y'Z'} \parallel \overline{BC}$.
Phép tịnh tiến biến $\Delta XY\mathrm{Z}$ thành $\Delta X_0Y_0\mathrm{Z}_0$.
Bởi vì trọng tâm của $\Delta XY\mathrm{Z}$ là điểm ở trên phía trái của $Y'Z' = T(Y\mathrm{Z})$, $d_\alpha(\overline{Y\mathrm{Z}}, T(\overline{Y\mathrm{Z}})) \leq \frac{1}{3}a'$ do đó:
$d_\alpha(X, X') = d_\alpha(X, T(X)) \leq \frac{1}{3}a'$ suy ra

$$d_\alpha(\overline{Y\mathrm{Z}}, X') \leq \frac{4}{3}a'$$

Tương tự $d_\beta(\overline{Z\mathrm{X}}, Y') \leq \frac{4}{3}b'$, $d_\gamma(\overline{\mathrm{XY}}, Z') \leq \frac{4}{3}c'$.
Phép tịnh tiến biến ảnh tam giác ABC ở dưới mặt phẳng chứa C với tỉ số $\frac{1}{3}$. Như thế $[T] = \frac{1}{9}$. Phép tịnh tiến T của u_1 và v_1 của hai điểm tương ứng C, A và phép tịnh tiến u_1 và v_2 của 2 điểm tương ứng C và B.
Với T_1, T_2 là 2 phép tịnh tiến với $T_1[u_1] = v_1, T_2[u_2] = v_2$.
Để cho bao lồi của 4 tam giác chứa F bị chặn bởi l_1 bên phải và l_2 bên trái, l_3 ở trên đỉnh và ở dưới đáy AB. Quan sát rằng F là 1 đỉnh của hình thang với diện tích $\frac{24}{9}$.
Bởi vì $d_\alpha(\overline{AB}, l_3) = \frac{4}{3}c'$, những điểm bao gồm trọng tâm của tam giác ABC nằm ở trên hay ở dưới l_3. Tương tự $d_\beta(l_2, B) = \frac{4}{3}b'$, $d_\gamma(l_3, C) = \frac{4}{3}c'$ theo thứ tự trong tam giác ABC bao gồm trọng tâm của 1 tam giác những điểm của tam giác phải nằm trên hoặc ở bên trái l_2 hoặc nằm bên trái của l_1.
Tổ hợp với cực trị được xác định của tam giác ABC kéo theo hệ quả là miền $\Re$ bị phủ bởi 2000 tam giác là sai với hình thang F được xác định của đường kẻ qua mặt song song của 2000 tam giác.
Do đó:

$$[\Re] \leq [F] - \frac{1}{9} - \frac{1}{9} - k = \frac{22}{9} - k < \frac{22}{9}$$

(đpcm)

Chương 6

Đề thi olympic Estonia

▷**6.37**.*Cho 5 số thực, chọn 3 số bất kì thì hiệu của tổng 3 số đó và tổng hai số còn lại sẽ là một số dương. Chứng minh rằng tích của tất cả 10 hiệu số (tùy theo số khả năng 3 số được chọn) nhỏ hơn hoặc bằng tích của bình phương 5 số đó.*

Lời giải: Cho 5 số là x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 ta có 5 hiệu số tương ứng là a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 và b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, Ở đây:

$$a_i = -x_{i-2} + x_{i-1} + x_i + x_{i+1} - x_{i+2}$$
$$b_i = x_{i-2} - x_{i-1} + x_i - x_{i+1} + x_{i+2}$$

với i = 1, 2, 3, 4, 5. Với mỗi i, chúng ta có

$$x_i^2 - a_ib_i = (\tfrac{a_i+b_i}{2})^2 - a_ib_i = (\tfrac{a_i-b_i}{2})^2 \geqslant 0$$

hoặc $x_i^2 \geqslant a_ib_i$ vì $a_ib_i \geqslant 0$ cho mỗi i, chúng ta có thể nhân 5 bất đẳng thức $a_ib_i \geqslant x_i^2$ với $1 \leqslant i \leqslant 5$ thì thu được

$$\prod_{i=1}^5 x_i^2 \geqslant \prod_{i=1}^5 a_ib_i$$

▷**6.38**.*Chứng minh rằng không thể chia một tập bất kì gồm 18 số nguyên dương liên tiếp thành hai tập A và B, với tích của các phần tử trong A bằng tích của các phần tử trong B.*

Lời giải: Chứng minh phản chứng. Giả sử, chúng ta chia được một tập $S = n, n+1, \cdots, n+17$ của 18 số nguyên dương liên tiếp thành tập A, B sao cho$\prod_{a\in A} a = \prod_{b\in B} b$ vì tích của các phần tử trong A bằng tích của các phần tử trong B, nếu 1 tập chứa một bội số của 19, thì tập còn lại cũng phải như vậy. Do vậy, S không chứa bội số nào của 19 hoặc chứa ít nhất hai bội số của 19. Vì có duy nhất 1 trong 18 số nguyên dương liên tiếp có thể là bội số của 19, S phải không chứa bội số nào. Bởi vậy, $n, n+1, \cdots, n+17$ lần lượt đồng dư với $1, 2, 3, \cdots, 18$ mod 19(chia lấy dư). Do vậy, theo qui tắc Wilson

$\prod_{a \in A} a \times \prod_{b \in B} b = n(n+1)\cdots(n+17) \equiv 18! \equiv -1 \pmod{19}$

Tuy nhiên, hai tích của bên trái là bằng nhau, điều này không có khả năng vì -1 không là bình phương của phép mod 19. Bởi vậy, không tồn tại hai tập A và B.

▷**6.39**.*Cho M, N và K là các điểm tiếp xúc của đường tròn nội tiếp tam giác ABC với các cạnh của tam giác, gọi Q là tâm đường tròn đi qua trung các đoạn thẳng MN, NK, KM. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC thẳng hàng với Q.*

Lời giải: Để chứng minh, giả sử M, N và K nằm trên các cạnh BC, CA, AB và X, Y, Z là trung điểm các đoạn thẳng NK, KM, MN. Theo đề bài, Q là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác XYZ. Đường thẳng AX là trung tuyến đoạn thẳng KN của tam giác cân AKN, vừa là đường phân giác và là đường cao của tam giác. Do vậy, A, X và I là thẳng hàng, và $\widehat{AXZ} = \frac{\pi}{2}$. Do đó, Tam giác vuông AXK và AKI là đồng dạng, và $IA.IX = IK^2$. Bởi vậy, X la hình chiếu của A dưới phép nghịch đảo qua đường tròn nộ tiếp của tam giác ABC. Tương tự, Y là hình chiếu của B và Z là hình chiếu của C với cùng phép nghịch đảo. Dẫn đến, nghịch đảo ánh xạ đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC đến đường tròn ngoại tiếp XYZ, nên tâm của của các đường tròn này là thẳng hàng với I. Nói một cách khác, Q, I và tâm đường tròn ngoại tiếp của tam giác ABC là thẳng hàng.

▷**6.40**.*Tìm tất cả các hàm f: $N \longrightarrow N$ sao cho:*

$$f(f(f(n))) + (f(f(n)) + f(n) = 3n \text{ với } \forall x \in N .$$

Lời giải: Nhận xét rằng nếu f(a) = f(b), thì với n = a và n = b cho biểu thức 3a = 3b hay a = b. Bởi vậy, f là duy nhất. Chúng ta chứng minh bởi qui nạp với $n \in Z^*$ thì f(n) = n. Giả thiết rằng với $\forall n < n_0$, f(n) = n Chúng ta chứng minh rằng $f(n_0) = n_0$(Mệnh đề áp dụng với n = 1). Vì f là duy nhất, nếu$n \geqslant n_0 > k$ thì $f(n) \neq f(k) = k$, vì vậy

$f(n) \geqslant n_0$ (*) với $\forall n \geqslant n_0$.Đặc biệt, (*) áp dụng với $n = f(n_0$ và tương tự với $f(f(n_0))$ Thay $n = n_0$ trong hàm đã cho, chúng ta thấy:

$$3n_0 = f(f(f(n_0))) + f(f(n_0)) + f(n_0) \geqslant n_0 + n_0 + n_0$$

Dấu = xảy ra khi $f(n_0) = n_0$

▷**6.41**.*Trong tam giác ABC chúng ta có $AC \neq BC$. Lấy điểm X bên trong tam giác và gọi $\alpha = \widehat{A}$, $\beta = \widehat{B}$, $\gamma = \widehat{C}$ và $\psi = \widehat{BCX}$. Chứng tỏ rằng:*

$$\frac{sin\alpha sin\beta}{sin(\alpha-\beta)} = \frac{sin\gamma sin\psi}{sin(\gamma-\psi)}$$

Nếu và chỉ nếu X nằm trên trung tuyến của tam giác ABC kẻ từ điểm C.

Lời giải: Lấy M là trung điểm của AB đặt $\gamma' = \widehat{ACM}$ và $\psi' = \widehat{MCB}$. Không giảm tính tổng quát, giả sử$\alpha > \beta$ và BC $>$ AC, theo quy tắc đường phân giác, phân giác góc ACB gặp cạnh AB tại điểm gần A hơn B, ví dụ tại một điểm trên AM . Do đó $\gamma' > \psi'$.

Chiếu B qua đoạn CX được điểm B' và đặt điểm D trên đoạn CB', trên phía đối diện đoạn thẳng AB tại C, rõ ràng $\psi' = \widehat{BAD}$. Áp dụng định lý Ceva trong tam giác ABC đối với các đoạn thẳng đồng qui AD, XD và B'D $\triangle BCB'$ là tam giác cân với BC = B'C và $2\psi' = \widehat{B'CB}$ như vậy $\widehat{CBB'} = \frac{\pi}{2} - \psi'$. Do đó $\widehat{ABB'} = \widehat{CBB'} - \widehat{CBA} = \frac{\pi}{2} - \psi' - \beta$

vì MA = MB = MB', $\widehat{ABB'} = \frac{\pi}{2}$ và tam giác MAB' là tam giác cân, vì vậy, các góc của tam giác này là:

$$\widehat{B'AM} = \widehat{B'AB} = \frac{\pi}{2} - \widehat{ABB'} = \psi' - \beta$$

$$\widehat{MB'A} = \psi' + \beta$$

$$\widehat{AMB'} = \pi - 2(\psi' + \beta) = (\alpha - \beta) + (\gamma' - \psi')$$

Đẳng thức cuối cùng đúng vì $\alpha + \beta + \gamma' + \psi' = \pi$

vì $\widehat{MAB'} > \psi' = \widehat{MAD}$, D nằm giữa bán kính AM và AB' và do đó nằm trong tam giác AXB'. Tương tự $\widehat{MAD} = \psi' = \widehat{BCM} = \widehat{MCB'} = \widehat{MCD}$ dẫn đến tứ giác MCAD là ngoại tiếp. Chúng ta tính các góc các đoạn AD,MD và B'D tạo với các cạnh của tam giác AMB'. Đầu tiên chúng ta có $\widehat{MAD} = \psi'$, $\widehat{DMA} = \widehat{DCA} = \gamma' - \psi'$ và $\widehat{DB'M} = \widehat{CB'M} = \widehat{DB'M} = \alpha$ Kết hợp các biểu thức của các góc tam giác AM'B, ta có biểu thức

$$\widehat{DAB'} = \widehat{MAB'} - \widehat{MAD} = \beta$$

$$\widehat{B'MD} = \widehat{B'MA} - \widehat{DMA} = \alpha - \beta$$
$$\text{và } \widehat{AB'D} = \widehat{AB'M} - \widehat{DB'M} = \psi'$$

Áp dụng định lí Ceva và định lí sin, chúng ta thấy:

$$1 = \frac{sin\widehat{MAD}sin\widehat{AB'D}sin\widehat{B'MD}}{sin\widehat{DAB'}sin\widehat{DB'M}sin\widehat{DMA}}$$
$$= \frac{sin\psi'}{sin\beta} \times \frac{sin\psi'}{sin\beta} \times \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\gamma'-\psi')}$$
$$= \frac{MB}{MC} \times \frac{sin\psi'}{sin\beta} \times \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\gamma'-\psi')}$$
$$= \frac{MA}{MC} \times \frac{sin\psi'}{sin\beta} \times \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\gamma'-\psi')}$$
$$= \frac{sin\gamma'}{sin\alpha} \times \frac{sin\psi'}{sin\beta} \times \frac{sin(\alpha-\beta)}{sin(\gamma'-\psi')}$$

Nếu X nằm trên đoạn CM, thì $(\gamma, \psi) = (\gamma', \psi')$ và biểu thức bằng nhau ở trên dẫn đến biểu thức đã cho. Ngược lại, giả sử có biểu thức đã cho. Đặt $\varphi = \widehat{BCA}$ và đặt $f(\theta) = \frac{sin\theta.sin(\varphi-\theta)}{sin(\theta-(\varphi-\theta))}$. Chúng được cho rằng $f(\gamma) = f(\gamma')$, giá tri chung này $\neq 0$ (nonzero) vì $0 < \gamma, \gamma' < \varphi$ vì vậy $\frac{1}{f(\theta)}$ được định nghĩa và nhận giá trị tại $\theta = \gamma$ và $\theta = \gamma'$. Tuy nhiên:

$$\frac{1}{f(\theta)} = \frac{sin\theta.cos(\varphi-\theta) - cos\theta.sin(\varphi-\theta)}{sin\theta.sin(\varphi-\theta)} = cot\theta - cot(\varphi-\theta)$$

đây là một hàm đồng biến nghịch với $0 \in (0, \varphi)$. Bởi vậy $\gamma = gamma'$ và X phải nằm trên đoạn thẳng CM. Mệnh đề đã được chứng minh.

▷**6.42**.*Chúng ta gọi một tập vô hạn dãy các số nguyên dương là F - sequence nếu mọi số hạng của tập(Bắt đầu từ số hạng thứ 3) bằng tổng của 2 số hạng trước đó. Có thể tách tập tất cả các số nguyên dương thành*

a) Hữu hạn

b) Vô hạn

số lượng của F - sequence không có các phần tử chung?

Lời giải: a) Giả sử để chứng minh phản chứng tồn tại m tập F được phân chia từ các số nguyên dương. Đặt dãy i^{th} là $F_1^{(i)}, F_2^{(i)}, \cdots,$, vì $F_{n+2}^{(i)}, F_{n+1}^{(i)}$ tăng với $n \geqslant 2$ nên tồn tại N_i sao cho $F_{n+2}^{(i)}, F_{n+1}^{(i)} > m$ với mọi n $> N_i$.

Đặt N = max$\{N_1, N_2, \cdots, N_i\}$, và chọn một số nguyên dương k vượt quá số hạng N đầu tiên của mỗi dãy số. Theo nguyên lí Pigeonhole, hai trong số các số $k, k+1, \cdots, k+m$ tồn tại trong cùng dãy F các số nguyên này khác nhau tại mọi m, đây là mâu thuẫn. Vì vậy câu trả lời đối với phần a) là không.

b) Định nghĩa dãy Fibonasi $\{F_n\}$ với $F_0 = F_1 = 0$ và đệ quy $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$ với n $>$ 1 nó có thể hiển thị bằng cách quy nạp j có duy nhất biểu diễn Zeckendorp $\overline{a_k.a_{k-1}\cdots.k_1}$ với các tính chất $a_k = 1$, mỗi $a_k = i$ hoặc 1 không có 2 số liên tiếp bằng 1 và j = $\sum_{i=1}^{k} a_k.F_k$. Có vô hạn các số nguyên dương m có biểu diễn Zeckendorpf kết thúc với a = 1. Với mỗi m, định nghĩa một dãy F_m như sau: đặt số hạng thứ n là số $\sum_{k=1}^{n} a_k.F_{k+n-1}$ biểu diễn Zeckendorpf là $\overline{a_k.a_{k-1}\cdots.k_1}$ tiếp theo n - 1 các số 0. Thì tổng của số hạng thứ n và n+ 1 là

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k.F_{k+n-1} + \sum_{k=1}^{n} a_k.F_{k+n}\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k.(F_{k+n-1} + Fk + n)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} a_k.F_{k+n+1}\end{aligned}$$

Là số hạng thứ n+2. Do đó, F_m là một dãy F, bất kỳ số nguyên dương j tồn tại trong F đúng với một số nguyên dương m, một biểu diễn Zeckendorpf biểu diễn là giống j, trừ bất kì các số 0. Do đó, các dãy số nguyên dương, dẫn đến câu trả lời cho phần b) là có.

Chương 7

Đề thi olympic Hungary

▷**7.43**.*Tìm tất cả các giá trị dương của p biết rằng tồn tại các số nguyên dương n, x,y thoả mãn* $p^n = x^3 + y^3$

Lời giải: p=2 và p=3 ta có: $2^1 = 1^3+1^3$ và $3^2 = 1^3+2^3$ Giả sử rằng p>3 và không xảy ra mâu thuẫn trong phươngtrình gồm 3 số thực dương. Chọn n, x, y sao cho n nhỏ nhất Vì $p \neq 2$ ta có $(x, y) \neq (1, 1)$. Do đó $x^2 - xy + y^2 = (x - y)^2 + xy > 1$ như là (x + y). Vì cả 2 giá trị này đều chia hết cho x3+y3, chúng phải là những bội số của p. Do đó p phân tích thành $(x + y)^2 - (x^2 - xy + y^2) = 3xy$.Vì p không chia hết cho3, p chia hết cho ít nhất đ 1 số hoặc x hoặc y. Hơn nữa p không thể chia hết chỉ là một trong x và y vì p/(x+y). Theo đó $p^n = x'^3 + y'^3$. Tại đó (n',x',y') +(n-3, x/3, y/3). Nhưng n' < n trái với giả thiêt n nhỏ nhất. Vậy chỉ có p=2 và p=3 thỏa mãn yêu cầu bài toán.

▷**7.44**.*Có hay không một đa thức f bậc 1999 với hệ số là f(n) , f(f(n)) , f(f(f(n))), . . . là các cặp giá trị tương đối với bất kì số nguyên n nào?*

Lời giải: Cho g(x) là đa thức bất kì bậc 1997 với những hệ số nguyên và cho
f(x) =x(x-1)g(x) +1 . Ta chứng minh ràng nếu f thoả mãn yêu cầu bài toán thì mệnh đề trên đúng.
Tức la phải chỉ ra rằng với n là số nguyên bất kì và p là 1 giá trị phân tích thành f(n), vậy thì $p \nmid f^k(n)$ với bất kì số nguyên dương k>1.
Đặc biệt hơn, ta chứng minh rằng $f^k(n) \equiv 1(modp)$với mọi k> 1. Ta

đặt k để chứng minh bài toán. Biết rằng cho một đa thức h với các hệ số nguyên $a \equiv b(modc)$ tức là $h(a) \equiv h(b)(modc)$. Xét trường hợp k=2, $f(n) \equiv 0(modp)$ suy ra $f(f(n)) \equiv f(0) \equiv 1(modp)$.
Vậy thì $f(fk(n)) \equiv f(1) \equiv 1(modp)$. Điều phải chứng minh.

▷**7.45**.*Chân đường các đường phân giác của các góc tam giác ABC là X, Y và Z. Đương tròn ngoại tiếp tam giác XYZ cắt 3 đoạn thẳng AB, BC và CA. Chứng minh rằng tổng độ dài của hai trong những đoạn thẳng này phụ thuộc vào độ dài cạnh thứ 3.*

Lời giải: Ta đặt các kí hiệu khoảng cách trong suốt bài toán tại đó a=BC ,b=CA , c=AB là dương. Đồng thời, cho đường tròn cắt BC tại X và P, CA tại Y và Q, và AB tại Z và R, đặt x = PX, y=QY, z=RZ. Theo định lí đường phân giác ta có: YA=bc/(c+a) , AZ=bc/(a+b). Do đó, QA=bc/(c+a)+y , AR=bc/(a+b)-z. Áp dụng định lí về phương tích của 1 điểm cho điểm A ta được

$$\tfrac{bc}{c+a}(\tfrac{bc}{c+a}+y)=\tfrac{bc}{b+a}(\tfrac{bc}{a-b}-z)$$

Sau khi nhân các vế với a/bc và sắp xếp lại ta có

$$\tfrac{c}{c+a}y+\tfrac{a}{b+a}z=\tfrac{abc}{(b+a)^2}-\tfrac{abc}{(a+c)^2}$$

Tương tự ta có

$$\begin{array}{l}\tfrac{b}{b+a}z+\tfrac{b}{b+c}x=\tfrac{abc}{(b+c)^2}-\tfrac{abc}{(a+b)^2}\\ \tfrac{c}{b+c}x+\tfrac{c}{a+c}y=\tfrac{abc}{(a+c)^2}-\tfrac{abc}{(c+b)^2}\end{array}$$

Khi cộng 3 phương trình lại ta nhận ra điều đơn giản làx+ y +z = 0. Theo đó hai trong các số hạng x,y,z phải cùng dấu và số hạng thứ 3 phải trái dấu hai số còn lại. Do đó tổng giá trị tuyệt đối của hai số hạng trước bằng trị tuyệt đối của số hạng sau, đó là điều phải chứng minh.

▷**7.46**.*Cho kvà t là các số nguyên tố cùng nhau lớn hơn 1. Bắt đầu từ phép hoán vị (1,2,. . . .. n) của dãy số 1,2 . . . . .n, ta co thể đổi 2 số nếu chúng không là k hoặc t . Chứng minh rằng ta có thể thực hiện bất kì phép hóan vị nào của 1,2,. . . n khi và chỉ khi* $n \geqslant k+t-1$

Lời giải: Dựng đồ thị G mà các đỉnh của nó là các số nguyên 1,2,. . . .n với hiệu ứng biên giữa a và b khi và chỉ khi $|a-b| \in \{k,t\}$ Ta thấy điều kiện trvừa nêu tương đương với (i) mọi phép hoán vị có thể thực hiện được, (ii) G là đường liền; (iii) $n \geqslant k+t-1$ $(i) \Rightarrow (ii)$ Vì mỗi bưới trao đổi 2 số trong cùng 1 nhánh của G, Theo đó không số nào có thể về vị trí cũ đã được thay thế bởi 1 số ở một bộ phận khác. Vậy thì , ta không thể thực hiện được mọi phép hoán vị trừ khi tất cả các số đều nằm trên một nhánh.

$(i) \Rightarrow (ii)$: Ta chứng minh bằng phép quy nạp trên m rằng xác định một đồ thị liền với các số nguyên m., bất kì phép hoán vị nào của các số nguyên này có thể có được từ phép hoán vị khác bật kì tao bởi sự trao đổi liên tiếp của cặp (a,b), tại đó a và b là các đỉnh liền kề của đồ thị. Yêu cầu rõ ràng khi m = 1. Mặt khác, chọn một đỉnh a sao cho phần đồ thị còn lại là đường liền sau khi bỏ a – ví du, ta có thể cho điểm A là điểm cuối của các đỉnh. Một số quỹ đạo của các đỉnh phân biệt $a_0a_1 \ldots a_r$ nối liền $a_0 = \pi^{-1}(a)$ và $a_r = a$ Bằng cách chuyển vị trí liên tiếp $(a_0a_1), (a_1a_2) \ldots (a_{r-1}a_r)$ ta có thể di chuyển a tới vị trí ban đầu chiếm chỗ bởi $\pi^{-1}(a)$ Bằng giả thiết quy nạp, các biến số thay thế a có thể hoán vị khi cần, do đó đạt được hoán vị . Áp dụng bổ đề này với m=n và đồ thì G chứng minh rằng $(ii) \Rightarrow (i)$

$(ii) \Rightarrow (iii)$: Nếu ít nhất k là n thì mọi cạnh biên sẽ nối 2 biến số đồng dư theo môđun t. Vậy sẽ không có đường nào giữa 1 và 2 (mâu thuẫn). Do đó, ta phải có k <n; tương tự , t<n . Vậy có n – k cạnh biên của dạng thức $\{a, a+k\}$ và n-t của cạnh biên của dạng thức$\{a, a+t\}$ Sự liên thông yêu cầu ita nhất n -1 cạnh biên, do đó $(a-k)+(n-t) \geqslant n-1 \Rightarrow n \geqslant k+t-1$

$(iii) \Rightarrow (ii)$: Tất nhiên trong trường hợp này k,t < n. chú ý rằng 2 số mà đồng dư mô đun k sẽ được nối với nhau (các cạnh biên ngang qua của dạng $\{a, a+k\}$) do đó đủ để chỉ ra rằng tất cả các số 1,2,. . . .,k được nối lẫn nhau. Vì t là gía trị tương đương với k nên $1, 2t, 3t, \ldots, kt$ biểu diễn bởi tất cả các đồng dư môđun k. Do đó, ta có thể sắp xếp lại 1, 2, ..., k theo thứ tự $b_1, b_2, \ldots, b_k$ tại đó $b_i \equiv it(modk)$. Chú ý rằng $k \equiv 0 \equiv kt(modk)$ do đó $b_k = k$ Vậy khi $k-1 \geqslant i \geqslant 1$ ta có $k-1 \geqslant b_i$ và vì thế nên $n \geqslant k+t-1 \geqslant b_i + t$ Do đó tồn tại đỉnh $b_i + t$ và được nối bởi một cạnh biên tới b_i Hơn nữa, $b_i + t \equiv b_{i+1}(modk)$ nên $b_i + t$

được nối tới b_{i+t}. Vì thế cho nênb_i, được nối tới b_{i+1} trong G với mỗi $i = 1, 2, \dots, k-1$. Vậy các số này được nối liền lẫn nhau và bài toán được giải quyết.

▷**7.47.***Cho số nguyên dương bất kì k, cho e(k) là số ước dương chẵn của k. và cho o(k) là số ước dương lẻ của k. Với n>1, chứng minh rằng :* $\sum_{k=1}^{n} e(k)$ *và* $\sum_{k=1}^{n} o(k)$ *khác nhau với hầu hết n.*

Lời giải: Số nguyên có thể chia được bởi d nằm chính giữa dãy số 1,2,. . . ,n là $|n/d|$ Do đó, tổng của o(k) $(rerp.e(k))$ đến khoảng k= 1,2. . . ,n bằng với tổng của $|n/d|$ đến khoảng tất cả các số nguyên dương chẵn d. Vì $[\frac{n}{d}] \geqslant [\frac{n}{d+1}]$ với số nguyên dương a và n, ta có

$$\sum_{k=i}^{n} o(k) - \sum_{k=i}^{n} e(k) = \sum_{k=i}^{\infty}([\tfrac{n}{2i+1}] - [\tfrac{n}{2i}])$$

Tại đó tổng hạn được xác định vì các số hạng bằng 0 khi i$>$ $[\frac{n}{2}]$. Tương tự:

$$\sum_{k=i}^{n} o(k) - \sum_{k=i}^{n} e(k) = [\tfrac{n}{1}] - \sum_{k=i}^{\infty}([\tfrac{n}{2i}] - [\tfrac{n}{2i+1}]) \leqslant n$$

▷**7.48.***Cho một tam giác trong không gian, hãy nêu cách dựng điểm P nằm bên trong tam giác thoả mãn điều kiện sau: nếu hạ một đường thẳng vuông góc qua P tới các ạnh của tam giác. Chân của các đường vuông góc tạo thành một tam giác nhận P là trọng tâm.*

Lời giải: a: Gọi tam giác là ABC với độ dài các cạnh là a=BC, b= CA, c=AB. Gọi P là một điểm nằm trong tam giác, vị trí xác định sau. Gọi X, Y, Z là chân các đường vuông góc kẻ tới các cạnh BC, CA, AB, theo thứ tự đó, x =PX, y= PY, z=PZ. Chuý ý rằng $\sin\widehat{YPZ} = \sin(\pi - \widehat{BAC}) = \sin\widehat{BAC}$. Tương tự $\sin\widehat{ZPX} = \sin\widehat{CBA}$ và $\sin\widehat{XPY} = \sin\widehat{ACB}$.
Tương đương với các điều sau

- P là trọng tâm tam giác XYZ
- Các tam giác YPZ,ZPX, XPY có diện tích bằng nhau
- $yz\sin\widehat{YPZ} = zx\sin\widehat{ZPX} = xy\sin\widehat{XPY}$
- sin<BAC/x = sin<CBA/y = sin<ACB/z
- a/x = b/y = c/z (định lý hàm Sin)

Dựng đường thẳng song song với BC, cách BC một khoảng là a nằm cùng phía với A. Tiếp tục dựng đườn thẳng song song với CA, cách CA một khoảng là b, nằm cùng phía với B. Đặt Q là giao điểm của chúng,chú ý rằng tia CQ đi qua miền trong tam giác Lấy P' bất kỳ trên CQ, xét tỉ số khoảng cách tới BC với khoảng cách tới AB. Nếu P'=Q tỉ số này bằng a/b ;bởi vì mọi điểm P' là hình ảnh đồng dạng của nhau với C,nên tỉ số này không phụ thuộc vào P' và luôn bằng a/b. Hơn nữa ta có thể dựng 1 tia từ A hướng vào tam giác mà với mọi P' trên tia thì tỉ số k/c từ AB với k/c từ CA bằng c/b. Hai tia này giao nhau tại điểm P nào đó ở trong tam giác . Nếu ta đặt P là giao điểm của chúng, ta thu được $a/x = b/y$ và $b/y = c/z$,và bài toán có lời giải.

Chương 8

Đề thi olympic India

▷**8.49**.*Cho △ ABC không đều. Gọi P là một điểm nằm trong tam giác đó. Các đoạn thẳng qua P và nối đỉnh với các cạnh đối diện của tam giác đó có độ dài bằng nhau và bằngλ thỏa mãn $\lambda < min(AB, BC, CA)$. Chứng minh rằng có điểm $P' \neq P$ thỏa mãn các tính chất giống như P.*

Lời giải: Xét 3 đoạn là $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, và $\overline{CF}$, gọi các đường cao của tam giác là $\overline{AH_a}$, $\overline{BH_b}$, và $\overline{CH_c}$.
Lấy đối xứng các đoạn thẳng ở trên qua các đường cao tương ứng ta thu được các đoạn $\overline{AD}$', $\overline{BE}$', và $\overline{CF}$'. Nếu $\overline{AD}$' không nằm trong tam giác thì ta suy ra được là $\overline{AB}$ hoặc $\overline{AC}$ phải nằm trong $\triangle ADD'$. Thế nhưng điều này không xảy ra vì $AD = AD' = \lambda < min(AB, AC)$.
Do vậy $\overline{AD}$' phải nằm trong △ ABC, tương tự như vậy $\overline{BE}$', và $\overline{CF}$' cũng phải nằm ở trong △ ABC.
Bây giờ ta dùng độ dài hình học. Chú ý rằng

$$BD.BD' = (BH_a+H_aD)(BH_a-H_aD) = BH_a^2 = (AB^2-AH_a^2)-(AD^2-AH_a^2)$$
$$= AB^2 - AD^2 = AB^2 - \lambda^2 \quad (8.1)$$

Tương tự như vậy ta có $EA.EA' = AB^2 - \lambda^2$
Thật vậy, $EA.EA' = BD.B'D$. Như vậy $FB.F'B = CE.CE'$ và $DC.D'C = AF.A'F$

Bây giờ áp dụng định lý Ceva cho 3 đương đồng quy $\overline{AD}$, $\overline{BE}$, và $\overline{CF}$ ta có $\frac{BD}{DC}.\frac{CE}{EA}.\frac{AF}{FB} = 1$
Do vậy

$$\frac{BD'}{D'C}.\frac{CE'}{E'A}.\frac{AF'}{F'B} = (\frac{BD'BD}{D'C.DC}).(\frac{CE'CE}{E'A.EA}).(\frac{AF'.AF}{F'B.FB})$$
$$= (\frac{BD'.BD}{E'A.EA})(\frac{CE'CE}{F'B.FB})(\frac{AF'.AF}{D'C.DC}) = 1 \quad (8.2)$$

Nhưng theo định lý Ceva $\overline{AD}$', $\overline{BE}$', và $\overline{CF}$' đòng quy tại điểm P' nằm ngoài $\triangle$ ABC. Nếu P trùng với P' thì P sẽ là trực tâm của tam giác, nhưng nếu vậy thì theo giả thiết 3 đường cao của $\triangle$ ABC có độ dài bằng nhau và bằng λ.. Điều này là vô lý, vì $\triangle$ ABC không đều. Do đó $P' \neq P$, và các đoạn thẳng qua P' đó có độ dài bằng nhau và bằng λ.

▷**8.50**.*Cho m, n là các số nguyên dương thỏa mãn* $m \leq \frac{n^2}{4}$ *và mọi ước nguyên tố của m đều nhỏ hơn hoặc bằng n. Hãy chứng minh rằng m là ước của n!*

Lời giải: Ta chỉ chỉ cần chứng mỉnh rằng với mọi ước nguyên tố p của m và với mọi số nguyên $k \geq 1$ mà $P^k|m$ thì $p^k|n!$ (1)
Thật vậy nếu k = 1 thấy ngay (1)đúng vì $p \leq n$. và do vậy $p|n!$. Mặt khác vì $m \leq \frac{n^2}{4}$ nên ta có $p^k \leq \frac{n^2}{4}$. hay $n \geq 2\sqrt{p^k}$.
Ta thấy, nếu $n \geq kp$ thì ít nhất k số thuộc vào tập 1, 2, ..., n là bội của p, kéo theo $p^k|n!$.
Để chứng minh $n \geq kp$ ta đi chứng minh $2\frac{\sqrt{p^k}}{p} \geq k \Leftrightarrow p^{\frac{k-2}{2}} \geq \frac{k}{2}$ (*) (Vì khi đó $n \geq 2\sqrt{p^k} \geq kp$)
Đi chứng minh (*): Với k = 2 thì (*) $\Leftrightarrow 1 \geq 1$ (đúng). Nếu $k \geq 4$ thì áp dụng BĐT Bernoulli ta có $p^{\frac{k-2}{2}} = (1+(p-1))^{\frac{k-2}{2}} \geq 1+\frac{k-2}{2}.(p-1) \geq \frac{k}{2}$.
Cuối cùng, nếu k = 3 thì (*) luôn đúng ngoại trừ p = 2. Nếu k = 3 và p = 2 thì $m \geq 8; n \geq 5$ và n! thực sự chia hết cho 8 ($8 = 2^3$), do vậy ta có p^k là ước của n! trong mọi trường hợp, bài toán được chứng minh.

▷**8.51**.*Cho G là một hình với n đỉnh với* $n \geq 4$ *và m cạnh. Chứng minh rằng nếu* $m > n(\sqrt{4n-3}+1)/4$ *thì G chứa một 4- Chu trình.*

Lời giải: Chúng ta đếm số các bộ 3 các khoảng cách giữa các đỉnh (v, a, b) sao cho v là cạnh kề cả a và b. Số các bộ như thế với mỗi v cố định là deg(v).(deg(v)-1). Vì tổng các deg(v) lấy theo tất cả các v là 2m, và x(x-1) là hàm lồi theo x, bất đẳng thức Jensen cho ta tổng deg(v)(deg(v)-1) lấy theo tất cả các v bé nhất là $n.(2m/n)((2m/n)-1) = 2m,(2m/n-1)$. Nếu G không có 4-chu trình nào, thì với bất kỳ a, b cố định nào có nhiều nhất một đỉnh kề với cả a và b. Kéo theo có nhiều nhất n(n-1) bộ 3 đã nói ở trên. Do vậy, có một 4- chu trình nếu $2m,(2m/n-1) > n(n-1) \Leftrightarrow 4m^2-(2n)m-n^2(n-1)>0$. Bất đẳng thức này luôn đúng đối với m lớn hơn nghiệm lớn của phương trình $4x^2-(2n)x-n^2(n-1)$ Điều này có nghĩa là G có 4-chu trình nếu như m lớn hơn nghiệm lớn của phương trình bậc 2 trên, hay $m > \frac{2n+\sqrt{4n^2+16n^3-16n^2}}{8} \Leftrightarrow m > n.\frac{\sqrt{4n-3}+1}{4}$. Từ giả thiết cho ta điều phải chứng minh.

▷**8.52**.*Cho hàm $f: Q \to \{0,1\}$ thỏa mãn f(x) = f(y) thì $f(x) = f(\frac{x+y}{2}) = f(y)$ với ∀ x, y ∈ Q,*
Nếu f(0)=0 và f(1)=1 hãy chứng minh f(q) = 1 với ∀q ∈ Q

Lời giải: Trước tiên ra chứng minh bổ đề sau: *Cho a, b là các sô hữu tỷ. Nếu $f(a) \neq f(b)$ thì f(n(b - a) + a) = f(b) với mọi n nguyên dương* (1)
Thật vậy, ta sẽ chứng minh bổ đề trên bằng quy nạp.

- Với n = 1 (1) hiển nhiên đúng
- Giả sử mệnh đề đúng với $n \leq k$.
  Đặt $(x_1, y_1, x_2, y_2) = (b, k(b-a)+a, a, (k+1)(b-a)+a)$. Theo giả thiết quy nạp, $f(x_1) = f(y_1)$. Ta cần cần chứng minh $f(x_2) \neq f(y_2)$. Thật vậy giả swr $f(x_2) = f(y_2)$ khi đó xét $(x, y) = (x_1, y_1)$ và $(x, y) = (x_2, y_2)$ vào trong điều kiện đề bài, ta có $f(b) = f(\frac{x_1+y_1}{2})$, và $f(a) = f(\frac{x_2+y_2}{2})$. Tuy nhiên điều này không xảy ra vì $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$. Do đó $f(y_2) \neq f(x_2)$ hay $f(y_2) \neq f(a)$.
  Vậy $f(y_2) = f(b)$. chứng minh xong bổ đề.
  Áp dụng bổ đề trên với a = 0 và b = 1 ta thấy rằng f(n)=1 với mọi n nguyên dương. Tiếp theo ta thấy $f(1+\frac{r}{s}) \neq 0 \quad \forall r, s \in N$, vì nếu ngược lại, áp dụng bổ đề với a = 1, b =1 + $\frac{r}{s}$ và n = s thì f(1+r) = 0 mâu thuẫn với f(n) = 1 ở trên. Do vậy, f(q) = 1 với mọi số hữu tỷ $q \geq 1$.

Tài liệu tham khảo

[1] Titu Andreescu, Zuming Feng, and George Lee, Jr. *Mathematical Olympiads 2000–2001, Problems and Solutions From Around the World*, The Mathematical Association of America, 2002.

[2] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Đirichle và ứng dụng*, NXBKHKT, 1999.

[3] Nguyễn Hữu Điển, *Phương pháp Quy nạp toán học*, NXBGD, 2000.

[4] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp điển hình trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2001.

[5] Nguyễn Hữu Điển, *Những phương pháp giải bài toán cực trị trong hình học*, NXBKHKT, 2001.

[6] Nguyễn Hữu Điển, *Sáng tạo trong giải toán phổ thông*, NXBGD, 2002.

[7] Nguyễn Hữu Điển, *Đa thức và ứng dụng*, NXBGD, 2003.

[8] Nguyễn Hữu Điển, *Giải phương trình vô định nghiệm nguyên*, NXBĐHQG, 2004.

[9] Nguyễn Hữu Điển, *Giải toán bằng phương pháp đại lượng bất biến*, NXBGD, 2004.