

Bài 1: (5 điểm)

a. Cho biểu thức $M = \frac{a\sqrt{a} - b\sqrt{b}}{a - b} - \frac{a}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \frac{b}{\sqrt{b} - \sqrt{a}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$

Rút gọn M và tính giá trị biểu thức M biết $(1 - a)(1 - b) + 2\sqrt{ab} = 1$

b. Tìm các số nguyên a, b thỏa mãn $\frac{5}{a + b\sqrt{2}} - \frac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$

c. Cho a, b, c thỏa mãn $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$; $\sqrt{abc} = 3$

Tính giá trị biểu thức $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$

Bài 2: (4,5 điểm)

a. Tính giá trị của biểu thức $N = \frac{\sqrt{4 + \sqrt{3}} + \sqrt{4 - \sqrt{3}}}{\sqrt{4 + \sqrt{13}}} + \sqrt{27 - 10\sqrt{2}}$

b. Cho a, b là số hữu tỉ thỏa mãn $(a^2 + b^2 - 2)(a + b)^2 + (1 - ab)^2 = -4ab$

Chứng minh $\sqrt{1 + ab}$ là số hữu tỉ

c. Giải phương trình $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x - 1}(1 - x)$

Bài 3: (3,5 điểm)

a. Tìm tất cả các cặp số nguyên (x;y) thỏa mãn $x^5 + y^2 = xy^2 + 1$

b. Cho a, b, c > 0 thỏa mãn abc = 1. Chứng minh

$$\frac{1}{\sqrt{ab + a + 2}} + \frac{1}{\sqrt{bc + b + 2}} + \frac{1}{\sqrt{ca + c + 2}} \leq \frac{3}{2}$$

Bài 4: (6 điểm) Cho nửa đường tròn (O;R) đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB có chứa nửa đường tròn vẽ tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn, trên Ax lấy M sao cho AM > R. Từ M vẽ tiếp tuyến MC với nửa đường tròn, từ C vẽ CH vuông góc với AB, CE vuông góc với AM. Đường thẳng vuông góc với AB tại O cắt BC tại N. Đường thẳng MO cắt CE, CA, CH lần lượt tại Q, K, P.

a. Chứng minh MNCO là hình thang cân

b. MB cắt CH tại I. Chứng minh KI song song với AB

c. Gọi G và F lần lượt là trung điểm của AH và AE. Chứng minh PG vuông góc với QF

Bài 5: (1 điểm) Tìm số nguyên dương n lớn nhất để $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^n$ là số chính phương

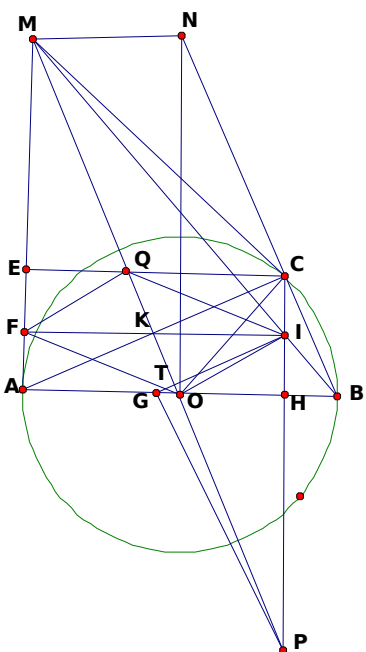
Họ tên thí sinh..... SBD:.....

HƯỚNG DẪN CHẤM HSG CẤP THÀNH PHỐ NĂM HỌC 2016-2017
MÔN: TOÁN LỚP 9

Câu	Nội Dung	Điểm
Bài 1		4 đ
a/ 1,5đ	-Rút gọn $M = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}$ với $a, b > 0$ và $a \neq b$ -Ta có $(1 - a)(1 - b) + 2\sqrt{ab} = 1 \Leftrightarrow ab - a - b + 1 + 2\sqrt{ab} = 1$ $\Leftrightarrow ab = (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \left \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right = 1$ + Nếu $a > b > 0$ $\Rightarrow \sqrt{a} > \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} > 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} > 0$ $\Rightarrow \left \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right = \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = 1$ + nếu $0 < a < b$ $\Rightarrow \sqrt{a} < \sqrt{b} \Rightarrow \sqrt{a} - \sqrt{b} < 0; \sqrt{ab} > 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} < 0$ $\Rightarrow \left \frac{\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}}\right = \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} \Rightarrow \frac{-\sqrt{ab}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = 1 \Rightarrow M = -1$	0,75 0,25 0,25 0,25
b/ 1,5đ	$\frac{5}{a + b\sqrt{2}} - \frac{4}{a - b\sqrt{2}} + 18\sqrt{2} = 3$ $\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18\sqrt{2}(a^2 - 2b^2) = 3(a^2 - 2b^2)$ $\Leftrightarrow 5a - 5b\sqrt{2} - 4a - 4b\sqrt{2} + 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2$ $\Leftrightarrow 18a^2\sqrt{2} - 36b^2\sqrt{2} - 9b\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$ $\Leftrightarrow (18a^2 - 36b^2 - 9b)\sqrt{2} = 3a^2 - 6b^2 - a$ -Nếu $18a^2 - 36b^2 - 9b \neq 0 \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b}$ Vì a, b nguyên nên $\frac{3a^2 - 6b^2 - a}{18a^2 - 36b^2 - 9b} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ Vô lý vì $\sqrt{2}$ là số vô tỉ -Vậy ta có $18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \Rightarrow \begin{cases} 18a^2 - 36b^2 - 9b = 0 \\ 3a^2 - 6b^2 - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3a^2 - 6b^2 = \frac{3}{2}b \\ 3a^2 - 6b^2 = a \end{cases} \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}b$ Thay $a = \frac{3}{2}b$ vào $3a^2 - 6b^2 - a = 0$ t a có $3 \cdot \frac{9}{4}b^2 - 6b^2 - \frac{3}{2}b = 0 \Leftrightarrow 27b^2 - 24b^2 - 6b = 0 \Leftrightarrow 3b(b - 2) = 0$	0,5 0,25 0,75

	Ta có $b=0$ (loại) ; $b=2$ (thỏa mãn) , vậy $a=3$. Kết luận	
c/ 2 đ	Ta có $(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c})^2 = a + b + c + 2(\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca})$ mà $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7$; $a + b + c = 23$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} = 13$ Ta có $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 7 \Rightarrow \sqrt{c} - 6 = -\sqrt{a} - \sqrt{b} + 1$ nên $\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6 = \sqrt{ab} - \sqrt{a} - \sqrt{b} + 1 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)$ Tương tự $\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6 = (\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)$; $\sqrt{ac} + \sqrt{b} - 6 = (\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)$ Vậy $H = \frac{1}{\sqrt{ab} + \sqrt{c} - 6} + \frac{1}{\sqrt{bc} + \sqrt{a} - 6} + \frac{1}{\sqrt{ca} + \sqrt{b} - 6}$ $= \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)} + \frac{1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{c} - 1)}$ $= \frac{\sqrt{c} - 1 + \sqrt{a} - 1 + \sqrt{b} - 1}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{b} - 1)(\sqrt{c} - 1)}$ $= \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - 3}{\sqrt{abc} + (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}) - (\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}) - 1} = \frac{7 - 3}{3 + 7 - 13 - 1} = -1$	0,25 0,75 1,0
Bài 2		4,5 đ
a/ 1,5đ	$N = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{8+2\sqrt{13}}} + \sqrt{25-10\sqrt{2}} + 2$ $= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(4+\sqrt{3}) + 2\sqrt{4+\sqrt{3}}\sqrt{4-\sqrt{3}} + (4+\sqrt{3})}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2}$ $= \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})^2}} + \sqrt{(5-\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}})}{\sqrt{4+\sqrt{3}} + \sqrt{4-\sqrt{3}}} + 5-\sqrt{2} = \sqrt{2} +$	0,25 0,5 0,5
b/ 1,5đ	(GT) $\Rightarrow [(a+b)^2 - 2(ab+1)](a+b)^2 + (1+ab)^2 = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)^4 - 2(a+b)^2(1+ab) + (1+ab)^2 = 0$ $\Leftrightarrow [(a+b)^2 - (1+ab)]^2 = 0 \Rightarrow (a+b)^2 - (1+ab) = 0$ $\Leftrightarrow (a+b)^2 = 1+ab \Leftrightarrow a+b = \sqrt{1+ab} \in \mathbb{Q}; \forall a; b \in \mathbb{Q}. \text{KL}$	0,25 0,5 0,25 0,5
c/ 1,5đ	Điều kiện: $x \geq 1$ (*). $x^2 - x - 4 = 2\sqrt{x-1}(1-x)$ Ta có: $\Leftrightarrow x^2 + 2x\sqrt{x-1} + x - 1 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x + \sqrt{x-1})^2 - 2(x + \sqrt{x-1}) - 3 = 0$ Đặt $x + \sqrt{x-1} = y$ (Điều kiện: $y \geq 1$ (**)), phương trình trở thành $y^2 - 2y - 3 = 0$.	0,5

	$y^2 - 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow (y+1)(y-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y = -1 \\ y = 3 \end{cases}$ + Với $y = -1$ không thỏa mãn điều kiện (**). + Với $y = 3$ ta có phương trình: $x + \sqrt{x-1} = 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 3-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x-1 = 9-6x+x^2 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x^2 - 7x + 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x = 2 \\ x = 5 \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ Vậy phương trình có nghiệm $x = 2$.	0,25 0,5 0,25
Bài 3		3,5 đ
a/ 1,75đ	Ta có $x^5 + y^2 = xy^2 + 1 \Leftrightarrow (x^5 - 1) - (xy^2 - y^2) = 0$ $\Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - y^2(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 - y^2) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1=0 \\ x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \end{cases}$ -* Nếu $x-1=0 \Rightarrow x=1$ ta có $1+y^2 = y^2+1$ đúng với mọi y nguyên Vậy nghiệm của PT là $(1; y \in \mathbb{Z})$ * Nếu $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = y^2 \Rightarrow 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 = (2y)^2$ Ta có $(2y)^2 - (2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4 - 4x^4 - 4x^3 - x^2$ $= 3x^2 + 4x + 4 = 3\left(x + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{8}{3} > 0$ Vậy ta có $(2x^2 + x)^2 < (2y)^2$ * Ta có $(2x^2 + x + 2)^2 - (2y)^2 = 5x^2 \geq 0$, Vậy ta có $(2y)^2 \geq (2x^2 + x + 2)^2$ ** Từ * và ** ta có $(2x^2 + x)^2 < (2y)^2 \leq (2x^2 + x + 2)^2 \Rightarrow (2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2;$ $(2y)^2 = (2x^2 + x + 2)^2$ Nếu $(2y)^2 = (2x^2 + x + 1)^2 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)(x-3) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 3 \end{cases}$ + nếu $x = -1 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$ + Nếu $x = 3 \Rightarrow y^2 = 121 \Rightarrow y = \pm 11$ - Nếu $(2y)^2 = (2x^2 + x + 2)^2 \Leftrightarrow -5x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y^2 = 1 \Rightarrow y = \pm 1$. Kết luận	0,25 0,25 1đ 0,25
b/	Ta có $3(x^2 + y^2 + z^2) - (x + y + z)^2 = \dots = (x-y)^2 + (y-z)^2 + (x-z)^2 \geq 0$	0,5

1,75đ	$\Rightarrow (x + y + z)^2 \leq 3(x^2 + y^2 + z^2)$ nên với $x, y, z > 0$ ta có $x + y + z \leq \sqrt{3(x^2 + y^2 + z^2)}$, áp dụng ta có $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}\right)}$ - Với $x, y > 0$ ta có $x + y \geq 2\sqrt{xy} \Rightarrow (x + y)^2 \geq 4xy \Rightarrow \frac{1}{x + y} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)$ áp dụng ta có $\frac{1}{ab+a+2} = \frac{1}{ab+1+a+1} = \frac{1}{ab+abc+a+1} = \frac{1}{ab(c+1)+(a+1)}$ $\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{abc}{ab(c+1)} + \frac{1}{a+1}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)$ Vậy ta có $\frac{1}{ab+a+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1}\right)$ Tương tự ta có $\frac{1}{bc+b+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1}\right); \frac{1}{ca+c+2} \leq \frac{1}{4}\left(\frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)$ nên $\sqrt{3\left(\frac{1}{ab+a+2} + \frac{1}{bc+b+2} + \frac{1}{ca+c+2}\right)}$ $\leq \sqrt{3 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{c}{c+1} + \frac{1}{a+1} + \frac{a}{a+1} + \frac{1}{b+1} + \frac{b}{b+1} + \frac{1}{c+1}\right)} = \frac{3}{2}$ Vậy $\frac{1}{\sqrt{ab+a+2}} + \frac{1}{\sqrt{bc+b+2}} + \frac{1}{\sqrt{ca+c+2}} \leq \frac{3}{2}$ dấu “=” có khi $a=b=c=1$	0,5 0,5 0,25
Bài 4	6 đ	6 đ
		

a/ 2đ	-Ta có $\triangle ACB$ nội tiếp đường tròn (vì...) mà AB là đường kính nên $\triangle ACB$ vuông tại C $\Rightarrow AC \perp BN$ Ta có $MA=MC$ (....), $OA=OC$ (...) nên MO là trung trực của AC $\Rightarrow MO \perp AC \Rightarrow MO \parallel NB \Rightarrow \widehat{MOA} = \widehat{NBO}$ -Ta có $OA \perp MA$ (...) $\Rightarrow \widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^\circ$; xét $\triangle MAO$ và $\triangle NOB$ có $\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^\circ$; $\widehat{MOA} = \widehat{NBO}$; $OA = OB = R \Rightarrow \triangle MAO = \triangle NOB \Rightarrow MO = NB$ -Ta có $MO \parallel NB$; $MO = NB \Rightarrow MNBO$ là hình bình hành. Ta có $\triangle MAO = \triangle NOB$ (cm trên) nên ta có $NO=MA$, mà $MA=MC$ (...) nên $NO=MC$ vậy $MNBO$ là hình thang cân	0,5 0,75 0,75
b/ 2đ	-Xét $\triangle CHB$ và $\triangle MAO$ có $\widehat{MAO} = \widehat{NOB} = 90^\circ$; $\widehat{CBH} = \widehat{MOA}$ (cm trên) $\Rightarrow \triangle CHB \sim \triangle MAO \Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{AO} = \frac{HB}{R}$ -Ta có $CH \perp AB$ (gt) ; $MA \perp AB$ (...) $\Rightarrow CH \parallel MA \Rightarrow IH \parallel MA \Rightarrow \frac{IH}{MA} = \frac{HB}{AB} = \frac{HB}{2R}$ -Nên ta có $\Rightarrow \frac{CH}{MA} = \frac{HB}{R} = 2 \cdot \frac{HB}{2R} = 2 \cdot \frac{IH}{MA} = \frac{2IH}{MA} \Rightarrow CH = 2IH \Rightarrow IC = IH$. -Chỉ ra KI là đường trung bình của tam giác ACH $\Rightarrow KI \parallel AB$	0,5 0,5 0,5 0,5
c/ 2đ	-Chứng minh FQIO là hình bình hành $\Rightarrow QF \parallel IO$ -Chứng minh O là trực tâm tam giác GIP $\Rightarrow PG \perp OI \Rightarrow PG \perp QF$	0,75 0,75 0,5
Bài 5		1đ
	* $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^n = (2^{27})^2 (1 + 4^{1989} + 4^{n-27})$ Vì A và $(2^{27})^2$ là số chính phương nên $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương Ta có $1 + 4^{1989} + 4^{n-27} > 4^{n-27} = (2^{n-27})^2$ *mà $1 + 4^{1989} + 4^{n-27}$ là số chính phương nên ta có $1 + 4^{1989} + 4^{n-27} \geq (2^{n-27} + 1)^2 \Leftrightarrow 2^{n-27} \leq 2^{3977} \Leftrightarrow n \leq 4004$ Với $n=4004$ ta có $A = 4^{27} + 4^{2016} + 4^{4004} = (2^{27} + 2^{4004})^2$ là số chính phương Vậy $n=4004$ thì $A=4^{27}+4^{2016}+4^n$ là số chính phương	0,25 0,5 0,25