

CD9_331-360_TI LE THUC & DAY TI SO BANG NHAU_NGUYEN THANH HA

Người làm: Nguyễn Thanh Hà

Zalo: Nguyễn Thanh Hà

- số đt zalo: 0906209866

Email: hantt1.1102@gmail.com

CD9: TỈ LỆ THỨC VÀ DÃY TỈ SỐ BẰNG NHAU

Dạng 1. Tìm số hạng chưa biết dựa vào tỉ lệ thức.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Trường THCS Bích Hòa. 2013 – 2014)

Tìm x, y biết $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$.

Lời giải

Từ $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} \Rightarrow \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x} \Rightarrow \frac{1+5y}{5} = \frac{1+7y}{4}$ (với $x \neq 0$)

$\Rightarrow 4(1+5y) = 5(1+7y) \Rightarrow 20y - 35y = 5 - 4 \Rightarrow y = \frac{-1}{15}$

Với $y = \frac{-1}{15}$ và $\frac{1+3y}{12} = \frac{1+5y}{5x} = \frac{1+7y}{4x}$ ta có :

$$\frac{1+3 \cdot \frac{-1}{15}}{12} = \frac{1+5 \cdot \frac{-1}{15}}{5x} \Rightarrow \frac{1}{15} = \frac{2}{15x} \Rightarrow 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2$$

Câu 2. (HSG 7 huyện ĐỨC THỌ- 2015 - 2016)

Tìm các cặp số (x, y) biết: a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$ b) $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

Lời giải

a) $\frac{x}{5} = \frac{y}{9}$ và $xy = 405$.

Ta có $\frac{x}{5} = \frac{y}{9} \Rightarrow \frac{x^2}{25} = \frac{y^2}{81} = \frac{xy}{5 \cdot 9} = \frac{405}{45} = 9$

Vì $\frac{x^2}{25} = 9 \Rightarrow x^2 = 9 \cdot 25 = 15^2 \Rightarrow x = \pm 15$

Vì $\frac{y^2}{81} = 9 \Rightarrow y^2 = 9 \cdot 81 = 27^2 \Rightarrow y = \pm 27$

Do x, y cùng dấu nên $x = 15, y = 27$ & $x = -15, y = -27$

b) Với $x \neq 0$ và $\frac{1+7y}{7x} = \frac{1+9y}{2x}$

suy ra $\frac{1+7y}{7} = \frac{1+9y}{2} \Rightarrow 2(1+7y) = 7(1+9y) \Rightarrow 2+14y = 7+63y \Rightarrow -49y = 5 \Rightarrow y = \frac{-5}{49}$

Thay $y = \frac{-5}{49}$ vào dãy tỉ số $\frac{1+5y}{24} = \frac{1+7y}{7x}$ ta được:

$$\frac{1+5 \cdot \frac{-5}{49}}{24} = \frac{1+7 \cdot \frac{-5}{49}}{7x} \Rightarrow \frac{1}{49} = \frac{2}{49x} \Rightarrow 1 = \frac{2}{x} \Rightarrow x = 2$$

Câu 3. (HSG 7. Trường THCS Ân Tường Đông. 2014 – 2015)

Tìm các số a, b, c biết: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7}$ và $a + b - c = 10$

Lời giải

Theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có: $\frac{a}{3} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{a+b-c}{3+5-7} = 10$

Từ $\frac{a}{3} = 10 \Rightarrow a = 30$

Từ $\frac{b}{5} = 10 \Rightarrow b = 50$

Từ $\frac{c}{7} = 10 \Rightarrow c = 70$

Vậy $a = 30, b = 50, c = 70$

Câu 4. (HSG 7 Trường THCS Xuân Dương. 2013 – 2014)

Tìm x, y, z biết $\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3}$ và $x - 3y + 4z = 4$

Lời giải

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z-2}{3} = \frac{x-1}{2} = \frac{3y-9}{12} = \frac{4z-8}{12} = \frac{x-1-3y+9+4z-8}{2-12+12} = \frac{x-3y+4z}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Từ $\frac{x-1}{2} = 2 \Rightarrow x = 5$

Từ $\frac{y-3}{4} = 2 \Rightarrow y = 11$

Từ $\frac{z-2}{3} = 2 \Rightarrow z = 8$

Vậy $x = 5; y = 11; z = 8$

Câu 5. (HSG 7 Trường THCS Hiền Quan. 2015 - 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $12x = 15y = 20z$ và $x + y + z = 48$

Lời giải

Vì $12x = 15y = 20z \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x+y+z}{12} = \frac{48}{12} = 4$

$\Rightarrow x = 20; y = 16; z = 12$

Câu 6. (HSG 7 huyện TÂN KỲ. 2015 - 2016)

Tìm x, y, z biết: $2x = 3y, 4y = 5z$ và $x - y - z = 30$

Lời giải

$$\text{Vì } 2x = 3y \Rightarrow \frac{x}{3} = \frac{y}{2}$$

$$\text{Vì } 4y = 5z \Rightarrow \frac{y}{5} = \frac{z}{4}$$

$$\text{Nên } \frac{x}{15} = \frac{y}{10} = \frac{z}{8} = \frac{x+y+z}{15+10+8} = \frac{30}{-3} = -10$$

$$\Rightarrow x = -150; y = -100; z = -80$$

Câu 7. (HSG 7 Trường THCS Nguyễn Khuyến. 2015 – 2016)

Tìm các số x, y, z biết: $\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 116$.

Lời giải

$$\text{Vì } \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{4} = \frac{y^2}{9} = \frac{z^2}{16} = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{4+9+16} = \frac{116}{29} = 4$$

$$\text{Do } \frac{x^2}{4} = 4 \Rightarrow x^2 = 16 \Rightarrow x = \pm 4$$

$$\text{Do } \frac{y^2}{9} = 4 \Rightarrow y^2 = 36 \Rightarrow y = \pm 6$$

$$\text{Do } \frac{z^2}{16} = 4 \Rightarrow z^2 = 64 \Rightarrow z = \pm 8$$

Vì x, y, z cùng dấu nên:

$$\begin{cases} x = 4; y = 6; z = 8 \\ x = -4; y = -6; z = -8 \end{cases}$$

Câu 8. (HSG 7 Huyện TRIỆU SƠN - 2015 - 2016)

Tìm x, y, z biết $\frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$ và $x+y+z=18$.

Lời giải

$$\text{Ta có : } \frac{3x-2y}{4} = \frac{2z-4x}{3} = \frac{4y-3z}{2}$$

$$\text{Suy ra } \frac{4(3x-2y)}{16} = \frac{3(2z-4x)}{9} = \frac{2(4y-3z)}{4} = \frac{12x-8y+6z-12x+8y-6z}{29} = 0$$

$$\text{Vì } \frac{3x-2y}{4} = 0 \Rightarrow 3x = 2y \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3}$$

$$\text{Vì } \frac{2z-4x}{3} = 0 \Rightarrow 2z = 4x \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{z}{4}$$

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}$$

Nên

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4} = \frac{x+y+z}{2+3+4} = \frac{18}{9} = 2 \Rightarrow x=4; y=6; z=8$$

Câu 9. (HSG 7 Huyện Thái Thụy. 2015 – 2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$ và $3x-2y+5z=96$.

Lời giải

Từ $\frac{5z-6y}{4} = \frac{6x-4z}{5} = \frac{4y-5x}{6}$

$$\Rightarrow \frac{20z-24y}{16} = \frac{30x-20z}{25} = \frac{24y-30x}{36} = \frac{20z-24y+30x-20z+24y-30x}{10+25+36} = 0$$

$$\Rightarrow 20z-24y=30x-20z=24y-30x=0$$

$$\Rightarrow 20z=24y=30x$$

$$\Rightarrow 10z=12y=15x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \Rightarrow \frac{3x}{12} = \frac{2y}{10} = \frac{5z}{30} = \frac{3x-2y+5z}{12-10+30} = \frac{96}{32} = 3$$

Từ đó tìm ra $x=12; y=15; z=18$

Câu 10. (HSG 7 Huyện Phú Thiện. 2015 – 2016)

Tìm x, y, z biết: $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$ và $x+z=2y$.

Lời giải

Từ $x+z=2y$ ta có:

$$x-2y+z=0 \Rightarrow 2x-4y+2z=0 \Rightarrow 2x-y-3y+2z=0 \Rightarrow 2x-y=3y-2z$$

Mà $\frac{2x-y}{5} = \frac{3y-2z}{15}$

Nên $\frac{3y-2z}{5} = \frac{3y-2z}{15} \Rightarrow (3y-2z)\left(\frac{1}{5} - \frac{1}{15}\right) = 0 \Rightarrow 3y-2z=0$

$$\Rightarrow 2x-y=3y-2z=0$$

Từ $2x-y=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}y$

Từ $3y-2z=0 \Rightarrow z=\frac{3}{2}y$

Vậy cặp số $(x; y; z)$ cần tìm là $\left(\frac{1}{2}y; y; \frac{3}{2}y\right)$ với $y \in \mathbb{R}$

Câu 11. (HSG 7 Huyện Hoài Nhơn. 2014 – 2015)

Tìm hai số khác 0, biết tổng, hiệu, tích của hai số đó tỉ lệ với $3, \frac{1}{3}, \frac{200}{3}$.

Lời giải

Gọi 2 số khác 0 cần tìm là x và y .

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}}$$

Theo bài ra ta có:

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có:

$$\frac{x+y}{3} = \frac{x-y}{\frac{1}{3}} = \frac{xy}{\frac{200}{3}} = \frac{x+y+x-y}{3+\frac{1}{3}} = \frac{2x}{\frac{10}{3}} = \frac{3x}{5}$$

$$\frac{\frac{xy}{\frac{200}{3}}}{\frac{3x}{5}} = \frac{3x}{200} = \frac{3xy}{200} = \frac{3x}{40} \Rightarrow \frac{xy}{40} - x = 0 \Rightarrow x \left(\frac{y}{40} - 1 \right) = 0$$

Nên

$$x \neq 0 \Rightarrow \frac{y}{40} - 1 = 0 \Rightarrow y = 40$$

Mà

$$\frac{x+y}{3} = \frac{3x}{5} \quad \text{và } y = 40 \text{ nên } \frac{x+40}{3} = \frac{3x}{5} \Rightarrow 5(x+40) = 9x \Rightarrow 4x = 200 \Rightarrow x = 50$$

Vậy hai số cần tìm là $50; 40$.

Câu 12. (HSG 7 Huyện Ngọc Lặc. 2015 – 2016)

$$\frac{x+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \quad \text{Cho} \quad 4x^3 - 3 = 29. \quad \text{và} \quad \text{Tính} \quad x - 2y + 3z$$

Lời giải

Ta có: $4x^3 - 3 = 29 \Leftrightarrow x = 2$

Thay vào tỷ lệ thức ta được: $\frac{2+16}{9} = \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} \Rightarrow \frac{y-25}{-16} = \frac{z+49}{25} = 2 \Rightarrow y = -7; z = 1$

$$\text{Vậy } x - 2y + 3z = 2 - 2(-7) + 3 \cdot 1 = 19$$

Câu 13. (HSG 7 Huyện Khoái Châu. 2015 – 2016)

$$\text{Cho } \frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6}. \quad \text{Tính} \quad B = \frac{3x - 4y + 5z}{x - 2y + 5z}$$

Lời giải

$$\text{Từ } \frac{x}{4} = \frac{y}{7}; \frac{y}{5} = \frac{z}{6} \text{ suy ra } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42}$$

$$\text{Đặt } \frac{x}{20} = \frac{y}{35} = \frac{z}{42} = k$$

$$\Rightarrow x = 20k, y = 35k, z = 42k$$

$$B = \frac{3.20k - 4.35k + 5.42k}{20k - 2.35k + 5.42k} = \frac{130k}{160k} = \frac{13}{16}$$

Khi đó

Câu 14. (HSG 7 Trường THCS Bồ Lý. 2015 - 2016)

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z}$$

Tìm các số x, y, z biết rằng:

Lời giải

Với $x+y+z \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{y+z+1}{x} = \frac{x+z+2}{y} = \frac{y+x-3}{z} = \frac{1}{x+y+z} = \frac{y+z+1+x+z+2+y+x-3}{x+y+z} = \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} = 2$$

do đó: $x+y+z=0,5$

Vì $x+y+z=0,5 \Rightarrow y+z+1=0,5-x+1=1,5-x$

Vì $x+y+z=0,5 \Rightarrow x+z+2=0,5-y+2=2,5-y$

Vì $x+y+z=0,5 \Rightarrow x+y-3=0,5-z-3=-2,5-z$

Nên ta có:

$$\frac{1,5-x}{x} = \frac{2,5-y}{y} = \frac{-2,5-z}{z} = 2$$

$$x = \frac{1}{2}; y = \frac{5}{6}; z = -\frac{5}{6}$$

Từ đó tìm được

Câu 15. (HSG 7 Trường THCS Phú Nhuận. 2014 – 2015)

Cho a, b, c là ba số thực khác 0, thỏa mãn điều kiện : $\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b}$

$$B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

Hãy tính giá trị của biểu thức

Lời giải

+ Nếu $a+b+c \neq 0$, theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a+b-c}{c} = \frac{b+c-a}{a} = \frac{c+a-b}{b} = \frac{a+b-c+b+c-a+c+a-b}{a+b+c} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b-c}{c} + 1 = \frac{b+c-a}{a} + 1 = \frac{c+a-b}{b} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{a+b}{c} = \frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = 2$$

Vậy $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = 8$

+ Nếu $a+b+c = 0$ thì $a+b = -c$

$$a+c = -b$$

$$b+c = -a$$

Khi đó $B = \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(1 + \frac{a}{c}\right) \left(1 + \frac{c}{b}\right) = \left(\frac{b+a}{a}\right) \left(\frac{c+a}{c}\right) \left(\frac{b+c}{b}\right) = \frac{-c}{a} \cdot \frac{-b}{c} \cdot \frac{-a}{b} = -1$

Câu 16. (HSG 7 Huyện Thanh Oai - Trường THCS Cự Khê. 2013 – 2014)

Cho dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$$

Tính $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c}$.

Lời giải

Từ $\frac{2a+b+c+d}{a} = \frac{a+2b+c+d}{b} = \frac{a+b+2c+d}{c} = \frac{a+b+c+2d}{d}$

$$\Rightarrow \frac{2a+b+c+d}{a} - 1 = \frac{a+2b+c+d}{b} - 1 = \frac{a+b+2c+d}{c} - 1 = \frac{a+b+c+2d}{d} - 1$$

$$\Rightarrow \frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$$

Nếu $a+b+c+d = 0$ nên

$$\begin{aligned} a+b &= -(c+d) \\ b+c &= -(a+d) \\ c+d &= -(a+b) \\ d+a &= -(b+c) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = (-1) + (-1) + (-1) + (-1) = -4$$

Nếu $a+b+c+d \neq 0$ thì với $\frac{a+b+c+d}{a} = \frac{a+b+c+d}{b} = \frac{a+b+c+d}{c} = \frac{a+b+c+d}{d}$

$$\Rightarrow a = b = c = d$$

Khi đó $M = \frac{a+b}{c+d} + \frac{b+c}{d+a} + \frac{c+d}{a+b} + \frac{d+a}{b+c} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$

Dạng 2. Chứng minh đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Cao Dương – đề Olympic. 2016 - 2017)

a) Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ ($a, b, c, d \neq 0, a \neq b, c \neq d$)

b) Cho các số a, b, c, d với $a+b+c+d \neq 0$ thỏa mãn

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d} = k$$

Tính giá trị của k .

Lời giải

a) Ta có :

$$\begin{aligned} a(c-d) &= ac - ad \\ c(a-b) &= ac - bc \end{aligned}$$

$$\text{Vì } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow ad = cb \Rightarrow ac - ad = ac - cb \Rightarrow a(c - d) = c(a - b) \Rightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$$

b) Với $a + b + c + d \neq 0$ theo tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{b+c+d}{a} = \frac{c+d+a}{b} = \frac{a+b+d}{c} = \frac{a+b+c}{d} = \frac{3a+3b+3c+3d}{a+b+c+d} = \frac{3(a+b+c+d)}{a+b+c+d} = 3$$

$$\Rightarrow k = 3$$

Câu 2. (HSG 7 cấp Huyện năm 2015 – 2016)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Chứng minh rằng: a) $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b}$ b) $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$
(giả sử các tỉ số trên đều có nghĩa)

Lời giải

a) Từ $\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = ab$ khi đó $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$

b) Theo câu a ta có: $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$

Từ $\frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$

hay $\frac{b^2 + c^2 - a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$

Vậy $\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2015 – 2016)

Cho x, y, z thỏa mãn $x^2 = yz, y^2 = xz, z^2 = xy$. Chứng minh rằng: $x = y = z$.

Lời giải

TH1: Nếu $x = 0$ thì $y = z = 0 \Rightarrow x = y = z$

Tương tự với $y = 0$; $z = 0$

Ta sẽ có $x = y = z$

TH2: Nếu x, y, z là các số khác 0

Từ $x^2 = yz \Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{z}{x}$

Từ $y^2 = xz \Rightarrow \frac{y}{z} = \frac{x}{y}$

Từ $z^2 = xy \Rightarrow \frac{z}{x} = \frac{y}{z}$

Nên $\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x}$

Với $x + y + z = 0$ (do x, y, z là các số khác 0), áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau:

$$\frac{x}{y} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x} = \frac{x+y+z}{y+z+x} = 1 \Rightarrow x = y = z$$

Câu 4. (HSG 7 Huyện Phú Thiện. 2015 – 2016)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng: $(a + 2c)(b + d) = (a + c)(b + 2d)$

Lời giải

Ta có: $(a + 2c)(b + d) = ab + ad + 2cb + 2cd$

$$(a + c)(b + 2d) = ab + 2ad + cb + 2cd$$

Mà $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow cb = ad$

Nên $ab + ad + 2cb + 2cd = ab + 2ad + cb + 2cd$

Vậy $(a + 2c)(b + d) = (a + c)(b + 2d)$

Câu 5. (HSG 7 huyện Thanh Oai. 2014 – 2015)

Cho tỉ lệ thức $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Với $b \neq 0; d \neq 0$; $\frac{b}{d} \neq \pm \frac{3}{2}$ chứng minh:

$$1) \frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d}$$

$$2) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$$

Lời giải

1) Với $\frac{b}{d} \neq \pm \frac{3}{2}$ ta có:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{2a}{2b} = \frac{2c}{2d} = \frac{3a}{3b} = \frac{3c}{3d} = \frac{2a + 3c}{2b + 3d} = \frac{2a - 3c}{2b - 3d}$$

2) Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2}$ (1)

Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a^2}{b^2} = \frac{c^2}{d^2} = \frac{ac}{bd}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^2 + c^2}{b^2 + d^2} = \frac{ac}{bd}$

Câu 6. (HSG 7 Trường THCS Bích Hòa. 2013 - 2014)

Cho $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$ chứng minh rằng:

$$a) \frac{a - c}{a + c} = \frac{c - b}{c + b} \quad b) \frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b} \quad c) \frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

(giả sử các tỉ số đều có nghĩa).

Lời giải

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} = \frac{a-c}{c-b} = \frac{a+c}{c+b} \Rightarrow \frac{a-c}{a+c} = \frac{c-b}{c+b}$$

a) Từ

$$\frac{a}{c} = \frac{c}{b} \Rightarrow c^2 = a.b$$

b) Từ

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a^2 + ab}{b^2 + ab} = \frac{a(a+b)}{b(a+b)} = \frac{a}{b}$$

Khi đó:

$$\frac{a^2 + c^2}{b^2 + c^2} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b}{a}$$

c) Theo câu b, ta có:

$$\Rightarrow \frac{b^2 + c^2}{a^2 + c^2} - 1 = \frac{b}{a} - 1$$

$$\frac{b^2 + c^2 - a^2 - c^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

Suy ra

$$\frac{b^2 - a^2}{a^2 + c^2} = \frac{b - a}{a}$$

nên

Câu 7. (HSG 7 – Trường THCS Nguyễn Khuyến- 2015 - 2016)

Cho bốn số dương a, b, c, d thỏa điều kiện $a + c = 2b$ và $c(b + d) = 2bd$.

Chứng minh $\left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8 + c^8}{b^8 + d^8}$.

Lời giải

$$c(b+d) = 2bd \Rightarrow b+d = \frac{2bd}{c}$$

Từ

Mà $a + c = 2b$

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{2b}{\frac{2bd}{c}} = \frac{2bc}{2bd} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{c}{d}$$

nên

$$\Rightarrow d(a+c) = c(b+d) \Rightarrow ad + cd = bc + cd \Rightarrow ad = bc$$

Vì $a, b, c, d > 0$ nên $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

$$\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{a+c}{b+d} \right)^8 = \frac{a^8}{b^8} = \frac{c^8}{d^8} = \frac{a^8 + c^8}{b^8 + d^8}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện TÂN KỲ. 2015 – 2016)

Cho các số thực $a; b; c; d; e$ khác 0 thỏa mãn $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e}$.

$$\frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Chứng minh rằng:

Lời giải

Ta có $\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} \Rightarrow \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4} \Rightarrow \frac{a}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4}$

Với $a; b; c; d; e$ khác 0, theo tính chất của dãy tỉ số bằng nhau ta có :

$$\frac{a}{e} = \frac{a^4}{b^4} = \frac{b^4}{c^4} = \frac{c^4}{d^4} = \frac{d^4}{e^4} = \frac{2a^4}{2b^4} = \frac{3b^4}{3c^4} = \frac{4c^4}{4d^4} = \frac{5d^4}{5e^4} = \frac{2a^4 + 3b^4 + 4c^4 + 5d^4}{2b^4 + 3c^4 + 4d^4 + 5e^4} = \frac{a}{e}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Thanh Oai, trường Tân Ước. 2013 – 2014)

Cho $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Chứng minh rằng:

a) $(a + 2c).(b + d) = (a + c).(b + 2d)$ b) $\frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} = \frac{(a + b)^{1005}}{(c + d)^{1005}}$

(giả sử các tỉ số đều có nghĩa).

Lời giải

a) Vì $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{2c}{2d} = \frac{a + 2c}{b + 2d}$ (1)

a) Vì

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$
 (2)

Vi

$$\Rightarrow \frac{a + c}{b + d} = \frac{a + 2c}{b + 2d} \Rightarrow (a + 2c).(b + d) = (a + c).(b + 2d)$$

Từ (1) và (2)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{a + b}{c + d}$$

b) Vì

$$\Rightarrow \left(\frac{a}{c} \right)^{1005} = \left(\frac{b}{d} \right)^{1005} = \left(\frac{a + b}{c + d} \right)^{1005}$$

$$\Rightarrow \frac{a^{1005}}{c^{1005}} = \frac{b^{1005}}{d^{1005}} = \frac{(a + b)^{1005}}{(c + d)^{1005}} \quad (1)$$

Mà $\frac{a^{1005}}{c^{1005}} = \frac{b^{1005}}{d^{1005}} = \frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} \quad (2)$

Từ (1) và (2) suy ra $\frac{a^{1005} + b^{1005}}{c^{1005} + d^{1005}} = \frac{(a + b)^{1005}}{(c + d)^{1005}}$

Dạng 3. Chứng minh bất đẳng thức

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện TÂN KỲ. 2015 – 2016)

Cho a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$.

Hãy so sánh $\frac{a}{b}$ với $\frac{a+c}{b+d}$.

Lời giải

Vì a, b, c, d là các số thực dương thỏa mãn $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ nên $ad < bc$ (1)

Mặt khác: $\frac{a}{b} = \frac{a(b+d)}{b(b+d)} = \frac{ab+ad}{b(b+d)}$ (2)

$$\frac{a+c}{b+d} = \frac{b(a+c)}{b(b+d)} = \frac{ab+bc}{b(b+d)} \quad (3)$$

Vì a, b, c, d là các số thực dương $\Rightarrow b(b+d) > 0$

Nên từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d}$

Dạng 4. Bài toán về dãy tỉ số bằng nhau và chia tỉ lệ.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang- 2012 - 2013)

Ba bạn An, Bình, Cường có tổng số viên bi là 74. Biết rằng số viên bi của An và Bình tỉ lệ với $\frac{5}{6}$ và số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với $\frac{4}{5}$. Tính số viên bi của mỗi bạn.

Lời giải

Gọi số viên bi của An, Bình, Cường lần lượt là a, b, c viên

$$a, b, c. (a, b, c \in \mathbb{N}^*, a, b, c < 74)$$

Điều kiện:

Vì tổng số viên bi của ba bạn là 74 nên $a+b+c=74$

$$\frac{a}{5} = \frac{b}{6} \Rightarrow \frac{a}{10} = \frac{b}{12}$$

Vì số viên bi của An và Bình tỉ lệ với 5 và 6 nên

Vì số viên bi của Bình và Cường tỉ lệ với 4 và 5 nên $\frac{b}{4} = \frac{c}{5} \Rightarrow \frac{b}{12} = \frac{c}{15}$

Nên ta có: $\frac{a}{10} = \frac{b}{12} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{10+12+15} = \frac{74}{37} = 2$

Từ đó suy ra $a=20; b=24; c=30$ (thỏa mãn)

Vậy số viên bi của ba bạn An, Bình, Cường lần lượt là 20; 24; 30.

Câu 2. (HSG 7 cấp Huyện năm học 2015 – 2016)

Một vật chuyển động trên các cạnh hình vuông. Trên hai cạnh đầu vật chuyển động với vận tốc $5m/s$, trên cạnh thứ ba với vận tốc $4m/s$, trên cạnh thứ tư với vận tốc $3m/s$. Hỏi độ dài cạnh hình vuông biết rằng tổng thời gian vật chuyển động trên 4 cạnh là 59 giây.

Lời giải

Gọi x, y, z (giây) là thời gian chuyển động lần lượt với các vận tốc $5m/s, 4m/s, 3m/s$

Điều kiện: $0 < x, y, z < 59$

Theo bài ra ta có: $x + x + y + z = 59$

$$\Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3}$$

Vì quãng đường là cạnh hình vuông nên $5x = 4y = 3z$

Áp dụng tính chất của dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{x}{5} = \frac{y}{4} = \frac{z}{3} = \frac{x + x + y + z}{5 + 5 + 4 + 3} = \frac{59}{60} = \frac{59}{60}$$

Do đó: $x = 60 \cdot \frac{1}{5} = 12; \quad y = 60 \cdot \frac{1}{4} = 15; \quad z = 60 \cdot \frac{1}{3} = 20$ (thỏa mãn)

Vậy cạnh hình vuông là $5 \cdot 12 = 60m$.

Câu 3. (HSG 7 cấp Huyện Đức Phổ năm học 2015 – 2016)

Cho ba hình chữ nhật, biết diện tích của hình thứ nhất và diện tích của hình thứ hai tỉ lệ với 4 và 5 , diện tích hình thứ hai và diện tích hình thứ ba tỉ lệ với 7 và 8 ; hình thứ nhất và hình thứ hai có cùng chiều dài và tổng các chiều rộng của chúng là $27cm$; hình thứ hai và hình thứ ba có cùng chiều rộng, chiều dài của hình thứ ba là $24cm$. Tính diện tích của mỗi hình chữ nhật đó.

Lời giải

Gọi diện tích ba hình chữ nhật lần lượt là $S_1, S_2, S_3 (cm^2)$

chiều dài, chiều rộng tương ứng của ba hình chữ nhật là $d_1, r_1, d_2, r_2, d_3, r_3 (cm)$

Điều kiện: $S_1; S_2; S_3; d_1; r_1; d_2; r_2; d_3; r_3 > 0$

Theo đề bài ta có:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5}; \frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} \text{ và } d_1 = d_2; r_1 + r_2 = 27; r_2 = r_3; d_3 = 24$$

Vì hình thứ nhất và hình thứ hai cùng chiều dài nên

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{4}{5} = \frac{r_1}{r_2} \Rightarrow \frac{r_1}{4} = \frac{r_2}{5} = \frac{r_1 + r_2}{9} = \frac{27}{9} = 3$$

Suy ra chiều rộng $r_1 = 12, r_2 = 15$ (thỏa mãn)

Vì hình thứ hai và hình thứ ba cùng chiều rộng nên

$$\frac{S_2}{S_3} = \frac{7}{8} = \frac{d_2}{d_3} \Rightarrow d_2 = \frac{7d_3}{8} = \frac{7 \cdot 24}{8} = 21 \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy diện tích hình thứ hai: $S_2 = d_2 r_2 = 21 \cdot 15 = 315 \text{ cm}^2$

$$\text{Diện tích hình thứ nhất: } S_1 = \frac{4}{5} S_2 = \frac{4}{5} \cdot 315 = 252 \text{ cm}^2$$

$$S_3 = \frac{8}{7} S_2 = \frac{8}{7} \cdot 315 = 360 \text{ cm}^2$$

Diện tích hình thứ ba :

Câu 4. (HSG 7 cấp Huyện Hoài Nhơn năm học 2015 – 2016)

Ba lớp 7 ở trường K có tất cả 147 học sinh. Nếu đưa $\frac{1}{3}$ số học sinh của lớp $7A_1$, $\frac{1}{4}$ số học sinh của lớp $7A_2$ và $\frac{1}{5}$ số học sinh của lớp $7A_3$ đi thi học sinh giỏi cấp huyện thì số học sinh còn lại của ba lớp bằng nhau. Tính tổng số học sinh của mỗi lớp 7 ở trường K.

Lời giải

Gọi tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

$$a - \frac{1}{3}a = b - \frac{1}{4}b = c - \frac{1}{5}c \quad (*)$$

Theo bài ra ta có:

$$\text{và } a + b + c = 147$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{3} = \frac{3b}{4} = \frac{4c}{5} \Rightarrow \frac{12a}{18} = \frac{12b}{16} = \frac{12c}{15} \Rightarrow \frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15}$$

Từ (*)

Áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau, ta có:

$$\frac{a}{18} = \frac{b}{16} = \frac{c}{15} = \frac{a+b+c}{18+16+15} = \frac{147}{49} = 3$$

Từ đó suy ra $a = 54, b = 48, c = 45$ (thỏa mãn)

Vậy tổng số học sinh của $7A_1, 7A_2, 7A_3$ lần lượt là 54; 48; 45.

Câu 5. (HSG 7 Trường THCS Phú Nhuận. năm học 2014 – 2015)

Ba lớp $7A, 7B, 7C$ cùng mua một số gói tăm từ thiện, lúc đầu số gói tăm dự định chia cho ba lớp với tỉ lệ $5:6:7$ nhưng sau đó chia theo tỉ lệ $4:5:6$ nên có một lớp nhận nhiều hơn 4 gói. Tính tổng số gói tăm mà ba lớp đã mua.

Lời giải

$$x (x \in \mathbb{N}^*)$$

Gọi tổng số gói tăm 3 lớp cùng mua là

Số gói tăm dự định chia cho 3 lớp $7A, 7B, 7C$ lúc đầu lần lượt là a, b, c ($a, b, c \in \mathbb{N}^*$)

$$\text{Ta có: } \frac{a}{5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{7} = \frac{a+b+c}{18} = \frac{x}{18} \Rightarrow a = \frac{5x}{18}; b = \frac{6x}{18}; c = \frac{7x}{18} \quad (1)$$

Số gói tăm sau đó chia cho 3 lớp lần lượt là a', b', c' ($a', b', c' \in \mathbb{N}^*$), ta có:

$$\frac{a'}{4} = \frac{b'}{5} = \frac{c'}{6} = \frac{a'+b'+c'}{15} = \frac{x}{15} \Rightarrow a' = \frac{4x}{15}; b' = \frac{5x}{15}; c' = \frac{6x}{15} \quad (2)$$

So sánh ⁽¹⁾ và ⁽²⁾ ta có: $a > a'; b = b'; c < c'$ nên lớp 7C nhận nhiều hơn lúc đầu

Suy ra $c' - c = 4 \Rightarrow \frac{6x}{15} - \frac{7x}{18} = 4 \Rightarrow x = 360$ (thỏa mãn).

Vậy số gói tằm 3 lớp đã mua là ³⁶⁰ gói.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>