

HDC CHÍNH THỨC

HƯỚNG DẪN CHẤM
MÔN: TOÁN 10

(Bản hướng dẫn này gồm 06 trang)

	Nội dung	Điểm
Câu 1. (3,0 điểm)	Giải phương trình sau $\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1$	3,0
Cách 1	Điều kiện: $x^2 - 3x + 1 \geq 0$	
	$\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = (x+1)\sqrt{x^2-3x+1}$	1,0
	Bình phương hai vế ta được $x^3 - 3x^2 - 3x = 0$	1,0
	Thử lại: Loại nghiệm $x = 0$.	0,5
	Nhận 2 nghiệm $x = \frac{3-\sqrt{21}}{2}; x = \frac{3+\sqrt{21}}{2}$.	0,5
Cách 2	Điều kiện: $x^2 - 3x + 1 \geq 0$	
	$\frac{x^2}{1+\sqrt{x^2-3x+1}} = x+1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = (x+1)\sqrt{x^2-3x+1}$	0,5
	$\Leftrightarrow x^2 - 3x - 3 = (x+1)(\sqrt{x^2-3x+1} - 2)$	
	$\Leftrightarrow (\sqrt{x^2-3x+1} - 2)(\sqrt{x^2-3x+1} + 2) = (x+1)(\sqrt{x^2-3x+1} - 2)$	1,0
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-3x+1} = 2 \\ \sqrt{x^2-3x+1} = x-1 \end{cases}$	0,5
	Phương trình $\sqrt{x^2-3x+1} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{21}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{21}}{2} \end{cases}$	0,5
	Xét phương trình còn lại vô nghiệm. Tập nghiệm của phương trình đã cho là $S = \left\{ \frac{3-\sqrt{21}}{2}, \frac{3+\sqrt{21}}{2} \right\}$	0,5

Câu 2. (3,0 điểm) Cho a, b, c là các số thực dương thỏa mãn $a + b + c = 3$. Chứng minh rằng $\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} + \frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} + \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} > 2.$		3,0
Ta có: $a^2 + 9 - 2bc = (3 - b - c)^2 + 9 - 2bc = b^2 + c^2 - 6b - 6c + 18 = (3 - b)^2 + (3 - c)^2$		0,5
nên $\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} = \frac{(3-a)^2}{\sqrt{(3-b)^2+(3-c)^2}}$ tương tự $\frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} = \frac{(3-b)^2}{\sqrt{(3-c)^2+(3-a)^2}}; \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} = \frac{(3-c)^2}{\sqrt{(3-a)^2+(3-b)^2}}.$ BĐT trở thành $\sqrt{\frac{(3-a)^2}{(3-b)^2+(3-c)^2}} + \sqrt{\frac{(3-b)^2}{(3-c)^2+(3-a)^2}} + \sqrt{\frac{(3-c)^2}{(3-a)^2+(3-b)^2}} > 2$		0,5
Đặt $\begin{cases} x = (3-a)^2 > 0 \\ y = (3-b)^2 > 0, \\ z = (3-c)^2 > 0 \end{cases}$ ta được BĐT $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$ $\Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} + \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} > 2$		1,0
Ta có $\frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} \geq \frac{2x}{z+x+y}, \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} \geq \frac{2y}{z+x+y}, \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} \geq \frac{2z}{z+x+y}$		0,5
suy ra: $\frac{x}{\sqrt{x(z+y)}} + \frac{y}{\sqrt{y(z+x)}} + \frac{z}{\sqrt{z(x+y)}} \geq 2$		
Đẳng thức xảy ra khi $x = y = z = 0$, điều này là không thể. Vậy $\sqrt{\frac{x}{y+z}} + \sqrt{\frac{y}{z+x}} + \sqrt{\frac{z}{x+y}} > 2$ hay là $\frac{3-a}{\sqrt{a^2+9-2bc}} + \frac{3-b}{\sqrt{b^2+9-2ac}} + \frac{3-c}{\sqrt{c^2+9-2ab}} > 2.$		0,5

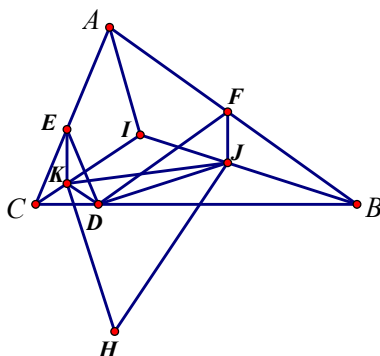
	Nội dung	Điểm
Câu 3. (3,0 điểm)		
	Cho k là số thực, tìm tất cả các hàm đơn điệu $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x + f(y)) = k^2 y + f(x), \forall x, y \in \mathbb{R}$.	3,0
	Giả sử tồn tại hàm $f(x)$ thỏa yêu cầu đề bài $f(x)$ đơn điệu trên $\mathbb{R}$ nên là hàm số đơn ánh.	0,25
	Xét $k = 0, \forall x, y \in \mathbb{R}$ $f(x + f(y)) = k^2 y + f(x) \Rightarrow f(x + f(y)) = f(x)$ $\Leftrightarrow x + f(y) = x \Leftrightarrow f(y) = 0$ Hàm số $f(y) \equiv 0$ không thỏa yêu cầu hàm số đơn điệu.	0,25
	Xét $k \neq 0$	
	Thay $x = y = 0$ ta có $f(f(0)) = f(0)$ suy ra $f(0) = 0$	0,25
	do đó $f(f(y)) = k^2 y, \forall y \in \mathbb{R}$ và $k^2 f(y) = f(f(f(y))) = f(k^2 y)$.	0,5
	Từ phương trình ban đầu thay $f(y)$ bởi $k^2 y$ ta được $f(x + k^2 y) = f(x + f(f(y))) = k^2 f(y) + f(x) = f(k^2 y) + f(x).$	0,5
	Suy ra f là hàm cộng tính, hơn nữa f đơn điệu nên $f(x) = cx$ (c là hằng số).	0,25
	Kết hợp biểu thức $f(f(y)) = f(cy) = c^2 y$ và $f(f(y)) = k^2 y$ ta được $c^2 = k^2 \Leftrightarrow c = \pm k.$	0,25
	Thử lại $f(x) = kx, f(x) = -kx$ ($k \neq 0$) thỏa mãn yêu cầu của đề.	0,5

Câu 4. (3,0 điểm)		
a) Chứng minh rằng số $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) không phải là số chính phương.		1,0
Ta có $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4} = \sqrt{n^4 + 9n^2 + 4 + 6n^3 + 4n^2 + 12n}$ $= \sqrt{(n^2 + 3n + 2)^2} = n^2 + 3n + 2$		0,25
Với $n \in \mathbb{N}^*$ ta có $n^2 + 2n + 1 < n^2 + 3n + 2 < n^2 + 4n + 4$ $\Leftrightarrow (n+1)^2 < n^2 + 3n + 2 < (n+2)^2$		0,5
Vì $(n+1)^2; (n+2)^2$ là hai số chính phương liên tiếp, nên giữa chúng không tồn tại số chính phương nào. Vậy $A = \sqrt{n^4 + 6n^3 + 13n^2 + 12n + 4}$ không phải số chính phương.		0,25
b) Cho đa thức $f(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$ với hệ số nguyên và $a_{2023} \neq 0$ xác định trên tập số thực $\mathbb{R}$. Chứng minh rằng phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.		2,0
$f(x) = a_{2023}x^{2023} + a_{2022}x^{2022} + \dots + a_1x + a_0$, với $a_{2023} \neq 0$. $f^2(x) = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 2 \\ f(x) = -2 \end{cases}$		0,25
Gọi $x_1, x_2, \dots, x_m$ là m nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x) = 2$, và $y_1, y_2, \dots, y_n$ là n nghiệm nguyên phân biệt của phương trình $f(x) = -2$. Khi đó $x_i \neq y_j$ với mọi $i \in \{1; 2; 3; \dots; m\}, j \in \{1; 2; 3; \dots; n\}$.		0,25
Giả sử $m + n > 2026$. Vì $m \leq 2023; n \leq 2023$ nên $m \geq 4; n \geq 4$. Do đó tồn tại các nghiệm nguyên $x_i; y_j$ thỏa mãn $ x_i - y_j \geq 5$.		0,5
Các nghiệm $x_i; y_j$ nói trên thỏa mãn: $f(x_i) = a_{2023}x_i^{2023} + a_{2022}x_i^{2022} + \dots + a_1x_i + a_0 = 2$ $f(y_j) = a_{2023}y_j^{2023} + a_{2022}y_j^{2022} + \dots + a_1y_j + a_0 = -2$ Suy ra $a_{2023}(x_i^{2023} - y_j^{2023}) + a_{2022}(x_i^{2022} - y_j^{2022}) + \dots + a_1(x_i - y_j) = 4$ (1)		0,25
Vì $(x_i - y_j) \mid (x_i^k - y_j^k)$ với mọi $k \in \{1; 2; \dots; 2023\}$ nên từ (1) suy ra $(x_i - y_j) \mid 4$, điều này mâu thuẫn với $ x_i - y_j \geq 5$.		0,5
Do đó $m + n \leq 2026$. Vậy phương trình $f^2(x) = 4$ có số nghiệm nguyên không lớn hơn 2026.		0,25

Câu 5. (5,0 điểm)

a) Cho ABC là tam giác nhọn, D là điểm bất kỳ trên cạnh BC thỏa $AB > AD$; $AC > AD$. Trên các cạnh AC, AB lần lượt lấy các điểm E, F sao cho $EC = ED, FB = FD$. Gọi I, J, K lần lượt là tâm đường tròn nội tiếp các tam giác ABC, BDF, CDE . Gọi H là trực tâm của tam giác JDK . Chứng minh tứ giác $IJHK$ nội tiếp.

2,0



0,25

Do các tam giác FBD, ECD lần lượt cân tại F, E nên $JD = JB, KD = KC$.

0,5

Ta có: $\widehat{JDK} = 180^\circ - \widehat{JDB} - \widehat{KDC} = 180^\circ - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = \widehat{BIC} = \widehat{JIK}$.

0,5

Vì H là trực tâm của $\triangle JDK$ nên $\widehat{JHK} + \widehat{JDK} = 180^\circ$.

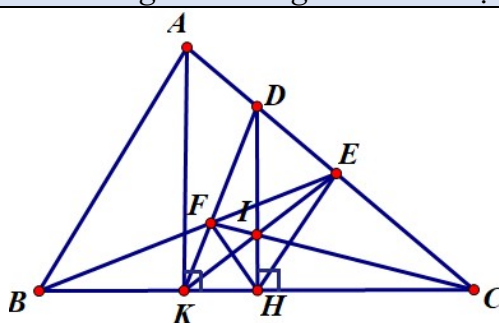
0,5

Suy ra: $\widehat{JHK} + \widehat{JIK} = 180^\circ$. Vậy tứ giác $IJHK$ nội tiếp.

0,25

b) Cho tam giác nhọn ABC ($AB < BC$) có đường cao AK . Gọi điểm D trên cạnh AC thỏa mãn $\frac{AD}{DC} = \frac{BK}{BC}$, điểm E di động trên đoạn DC . Gọi F là giao điểm của BE và KD , I là giao điểm của FC và KE . Chứng minh rằng điểm I thuộc đường thẳng cố định.

3,0



Gọi H là giao điểm của DI và cạnh BC .

Ta có 3 đường thẳng đồng quy trong tam giác DKC là DH, KE, FC , theo định lý Ceva

ta được $\frac{\overline{HK}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{EC}}{\overline{ED}} \cdot \frac{\overline{FD}}{\overline{FK}} = -1$ (1).

1,0

Ba điểm thẳng hàng B, E, F , theo định lý Menelaus ta được $\frac{\overline{BC}}{\overline{BK}} \cdot \frac{\overline{FK}}{\overline{FD}} \cdot \frac{\overline{ED}}{\overline{EC}} = 1$ (2).

1,0

Nhân (1) và (2) vế theo vế ta được $\frac{\overline{HK}}{\overline{HC}} \cdot \frac{\overline{BC}}{\overline{BK}} = -1$

0,5

suy ra $\frac{HK}{HC} = \frac{BK}{BC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow DH \parallel AK$ nên DH cố định.

0,5

Vậy I thuộc đoạn thẳng cố định.

	Nội dung	Điểm
Câu 6. (3,0 điểm)		
	Cho đa giác đều n cạnh ($n \in \mathbb{N}; n \geq 8$). Gọi $x; y$ lần lượt là số tam giác và số tứ giác lập ra từ các đường chéo của đa giác đều đã cho. Tìm n biết $x = 2y$.	3,0
	Gọi số đỉnh của đa giác đều n cạnh lần lượt là $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Số tam giác có 3 cạnh là 3 đường chéo của đa giác là $x = C_n^3 - n - n(n-4) = \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6}$	1,0
	Xét tứ giác có 4 cạnh là 4 đường chéo của đa giác và có 1 đỉnh là A_1: Khi đó A_2, A_n không phải là đỉnh của tứ giác. Ta cần chọn thêm các đỉnh A_i, A_j, A_k thỏa mãn: $5 \leq i+2 < j+1 < k \leq n-1$ (vì 2 đỉnh của tứ giác không phải là 2 đỉnh kề nhau của đa giác). Mỗi cách chọn bộ 3 đỉnh như trên là 1 cách chọn bộ 3 số phân biệt trong $n-5$ số tự nhiên từ 5 đến $n-1$. Do đó có C_{n-5}^3 tứ giác có đỉnh A_1 thỏa yêu cầu bài toán.	0,5
	Vì đa giác có n đỉnh và mỗi tứ giác được đếm lặp lại 4 lần (theo cách đếm trên) nên số tứ giác có thể lập được từ các đường chéo của đa giác đã cho là $y = \frac{n C_{n-5}^3}{4} = \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$	0,25
	Theo giả thiết: $x = 2y \Leftrightarrow \frac{n(n^2 - 9n + 20)}{6} = 2 \cdot \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{24}$ $\Leftrightarrow n^3 - 20n^2 + 125n - 250 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 5 \\ n = 10 \end{cases}$	0,5
	Đối chiếu giả thiết chọn $n = 10$.	0,25

*** Lưu ý:**

Nếu thí sinh làm bài không theo cách nêu trong hướng dẫn chấm nhưng đúng thì vẫn cho đủ số điểm từng phần như hướng dẫn quy định.