

BÀI 3. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

CHƯƠNG 1. HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC VÀ PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

PHẦN B. BÀI TẬP TỰ LUẬN (PHÂN DẠNG)

DẠNG 1. TẬP XÁC ĐỊNH CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

A. Với hàm số $f(x)$ cho bởi biểu thức đại số thì ta có:

1. $f(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa

* $f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x) \neq 0$.

2. $f(x) = \sqrt[m]{f_1(x)}, (m \in \mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x)$ có nghĩa và $f_1(x) \geq 0$.

3. $f(x) = \frac{f_1(x)}{\sqrt[m]{f_2(x)}}, (m \in \mathbb{N})$, điều kiện: $f_1(x), f_2(x)$ có nghĩa và $f_2(x) > 0$.

B. Hàm số $y = \sin x; y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$, như vậy

$y = \sin[u(x)]; y = \cos[u(x)]$ xác định khi và chỉ khi $u(x)$ xác định.

* $y = \tan[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

* $y = \cot[u(x)]$ có nghĩa khi và chỉ khi $u(x)$ xác định và $u(x) \neq k\pi; k \in \mathbb{Z}$.

Chú ý

Ở phần này chúng ta chỉ cần nhớ kĩ điều kiện xác định của các hàm số cơ bản như sau:

1. Hàm số $y = \sin x$ và $y = \cos x$ xác định trên $\mathbb{R}$.

2. Hàm số $y = \tan x$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.

3. Hàm số $y = \cot x$ xác định trên $\mathbb{R} \setminus \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$.

C. Dạng chứa tham số trong bài toán liên quan đến tập xác định của hàm số lượng giác.

Với $S \subset D_f$ (là tập xác định của hàm số $f(x)$) thì

* $f(x) \leq m, \forall x \in S \Leftrightarrow \max_S f(x) \leq m$ * $f(x) \geq m, \forall x \in S \Leftrightarrow \min_S f(x) \geq m$

* $\exists x_0 \in S, f(x_0) \leq m \Leftrightarrow \min_S f(x) \leq m$ * $\exists x_0 \in S, f(x_0) \geq m \Leftrightarrow \max_S f(x) \geq m$

Câu 1. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Tìm tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$.
Lời giải

Biểu thức $y = \frac{1}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi (k \in \mathbf{Z})$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ là $\mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

Câu 2. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Tìm tập xác định của các hàm số sau:

a) $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$

b) $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$.

Lời giải

a) Biểu thức $\frac{1 - \cos x}{\sin x}$ có nghĩa khi $\sin x \neq 0$, tức là $x \neq k\pi, k \in \mathbf{Z}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$ là $D = \mathbf{R} \setminus \{k\pi | k \in \mathbf{Z}\}$.

Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ nên $1 + \cos x \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $2 - \cos x \geq 1 > 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Do đó, $2 - \cos x \neq 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$ và $\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}} \geq 0$ với mọi $x \in \mathbf{R}$.

Vậy tập xác định của hàm số $y = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2 - \cos x}}$ là $D = \mathbf{R}$.

Câu 3. Tìm tập xác định của các hàm số sau

a) $y = \tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ b) $y = \cot\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $y = \frac{2}{\sin 2x}$ d) $y = 2\cos\sqrt{x^2 - 3x + 2}$

Bài giải:

a) Xét $\cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Rightarrow 2x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

b) Xét $\sin\left(-2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow -2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \left\{-\frac{\pi}{6} - \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

c) Xét $\sin 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

Tập xác định $D = \mathbf{R} \setminus \left\{\frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}\right\}$.

d) y xác định khi $x^2 - 3x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow (x - 1)(x - 2) \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

Tập xác định $D = (-\infty, 1] \cup [2, \infty)$.

Câu 4. Tìm tập xác định các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{1-2x^2}{1-\cos 2x} & \text{b) } y &= \cos \frac{3x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{c) } y &= \sqrt{2-2\sin x} & \text{d) } y &= \sqrt{\sin x-1} \\ \text{e) } y &= \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} & \text{f) } y &= \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right) & \text{g) } y &= \cot \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \frac{2}{1-\cos x} \end{aligned}$$

Lời giải

a) Hàm số xác định khi: $1 - \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 1 \Leftrightarrow 2x \neq k2\pi \Leftrightarrow x \neq k\pi$

Vậy TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$

b) Hàm số xác định khi: $x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1 \vee x < -1$

Vậy TXĐ: $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

c) Hàm số xác định khi: $2 - 2\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 1$: luôn đúng $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow D = \mathbb{R}$

d) Hàm số xác định khi: $\sin x \geq 1$ (1). Mặt khác: $\sin x \leq 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra: $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$. Vậy TXĐ: $D = \left\{ \frac{\pi}{2} + k2\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\text{e) } y = \sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} : \text{TXĐ: } \begin{cases} \frac{1-\cos x}{1+\cos x} \geq 0 \\ 1+\cos x \neq 0 \end{cases} (*)$$

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \begin{cases} 1-\cos x \geq 0 \\ 1+\cos x \geq 0 \end{cases}, \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó: $(*) \Leftrightarrow 1+\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \cos x \neq -1 \Leftrightarrow x \neq \pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$

Do đó tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\text{f) } y = \tan \left(x + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{TXĐ: } \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \neq 0 \Leftrightarrow x + \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Do đó tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\text{g) } y = \cot \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) - \frac{2}{1-\cos x}$$

$$\text{TXĐ: } \begin{cases} \sin \left(\frac{\pi}{4} - 2x \right) \neq 0 \\ 1-\cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{4} - 2x \neq k\pi \\ \cos x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \frac{\pi}{8} - k\frac{\pi}{2} \\ x \neq k2\pi \end{cases}$$

Do đó tập xác định của hàm số: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{8} - k\frac{\pi}{2}, k2\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$

Câu 5. Tìm tập xác định của các hàm số sau:

$$\begin{aligned} \text{a) } y &= \frac{1}{1 - \sin 4x} \quad \text{b) } y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right); \\ \text{c) } y &= \frac{\sin x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \quad \text{d) } y = \frac{\tan x + \cot x}{\cot^2 x - 1} \end{aligned}$$

Lời giải

$$\text{a) Hàm số } y = \frac{1}{1 - \sin 4x} \text{ xác định } \Leftrightarrow 1 - \sin 4x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 4x \neq 1 \Leftrightarrow 4x \neq \frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\text{b) Hàm số } y = \tan\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ xác định } \Leftrightarrow 3x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{3}, (k \in \mathbb{Z})$$

$$\begin{aligned} \text{c) Hàm số } y &= \frac{\sin x}{\sqrt{3} \sin x + \cos x} \text{ xác định} \\ \Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x + \cos x &\neq 0 \Leftrightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) Hàm số } y &= \frac{\tan x + \cot x}{\cot^2 x - 1} \text{ xác định} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \cos x \neq 0 \\ \cot^2 x \neq 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \\ x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases} \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{4} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Câu 6. Tìm m để hàm số sau xác định trên $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } y = \sqrt{2m - 3\cos x} \quad \text{b) } y = \frac{2}{\sqrt{\sin^2 x - 2\sin x + m - 1}}$$

Lời giải

a) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$$\begin{aligned} 2m - 3\cos x &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3\cos x \leq 2m, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{2m}{3} \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \frac{2m}{3} &\geq 1 \Leftrightarrow m \geq \frac{3}{2} \end{aligned}$$

b) Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$$\begin{aligned} \sin^2 x - 2\sin x + m - 1 &> 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m > -\sin^2 x + 2\sin x + 1 = 2 - (\sin x - 1)^2, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow m &> \max_{(-\infty; +\infty)} (-\sin^2 x + 2\sin x + 1) = 2 \Leftrightarrow m > 2 \end{aligned}$$

Câu 7. Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số m để hàm số $y = \sqrt{5 - m\sin x - (m+1)\cos x}$ xác định trên $\mathbb{R}$.

Lời giải

Hàm số xác định trên $\mathbb{R}$ khi chỉ khi:

$$\begin{aligned} 5 - m\sin x - (m+1)\cos x &\geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow m\sin x + (m+1)\cos x \leq 5, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \frac{m}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \sin x + \frac{m+1}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \cos x &\leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \\ \Leftrightarrow \sin(x + \alpha) &\leq \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}}, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{m^2 + (m+1)^2}} \geq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2m^2 + 2m + 1} \leq 5 \\ \Leftrightarrow 2m^2 + 2m - 24 &\leq 0 \Leftrightarrow -4 \leq m \leq 3. \text{ Mà } m \in \mathbb{Z} \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\} \end{aligned}$$

DẠNG 2. TÍNH TUẦN HOÀN CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Định nghĩa: Hàm số $y = f(x)$ xác định trên tập D được gọi là hàm số tuần hoàn nếu có số $T \neq 0$ sao cho với mọi $x \in D$ ta có

$$x \pm T \in D \text{ và } f(x+T) = f(x).$$

Nếu có số T **dương nhỏ nhất** thỏa mãn các điều kiện trên thì hàm số đó được gọi là **hàm số tuần hoàn với chu kỳ T** .

$$*y = \sin(ax + b) \text{ có chu kỳ } T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$*y = \cos(ax + b) \text{ có chu kỳ } T_0 = \frac{2\pi}{|a|}$$

$$*y = \tan(ax + b) \text{ có chu kỳ } T_0 = \frac{\pi}{|a|}$$

$$*y = \cot(ax + b) \text{ có chu kỳ } T_0 = \frac{\pi}{|a|}$$

$$\bullet y = f_1(x) \text{ có chu kỳ } T_1; y = f_2(x) \text{ có chu kỳ } T_2$$

Thì hàm số $y = f_1(x) \pm f_2(x)$ có chu kỳ T_0 là bội chung nhỏ nhất của T_1 và T_2 .

Câu 8. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Xét tính tuần hoàn của hàm số $y = \tan 2x$.

Lời giải

Biểu thức $\tan 2x$ có nghĩa khi $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$

$$D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbf{Z} \right\}$$

Suy ra hàm số $y = \tan 2x$ có tập xác định là
Với mọi số thực x , ta có:

$$x - \frac{\pi}{2} \in D, x + \frac{\pi}{2} \in D$$

$$\tan 2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \tan(2x + \pi) = \tan 2x$$

Vậy $y = \tan 2x$ là hàm số tuần hoàn với chu kỳ $T = \frac{\pi}{2}$

Câu 9. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Giả sử khi một con sóng biển đi qua một cái cọc ở ngoài khơi, chiều

cao của nước được mô hình hoá bởi hàm số $h(t) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10}t\right)$, trong đó $h(t)$ là độ cao tính bằng centimét trên mực nước biển trung bình tại thời điểm t giây.

a) Tìm chu kỳ của sóng.

b) Tìm chiều cao của sóng, tức là khoảng cách theo phương thẳng đứng giữa đáy và đỉnh của sóng.

Lời giải

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{10}} = 20$$

a) Chu kỳ của sóng là $\frac{20}{10}$ (giây).

b) Chiều cao của sóng tức là chiều cao của nước đạt được trong một chu kỳ dao động.

$$h(20) = 90 \cos\left(\frac{\pi}{10} \times 20\right) = 90 \text{ (cm)}$$

Ta có:

Vậy chiều cao của sóng là 90 cm.

Câu 10. Tìm chu kỳ tuần hoàn các hàm số sau

- a) $y = 1 - \sin 5x$ b) $y = 2\cos^2 2x$
 c) $y = \tan(-3x + 1)$ d) $y = 2 - 3\cot(2x - 1)$

Bài giải

- a) $T = \frac{2\pi}{5}$
 b) $y = 2 \frac{1 + \cos 4x}{2} = 1 + \cos 4x \Rightarrow T = \frac{\pi}{2}$
 c) $T = \frac{\pi}{|-3|} = \frac{\pi}{3}$
 d) $T = \frac{\pi}{2}$

Câu 11. Xét tính tuần hoàn và tìm chu kì (nếu có) của các hàm số sau:

- a) $y = 1 - \sin 5x$. b) $y = \cos^2 x - 1$.
 c) $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right)$. d) $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$

Bài giải

Ta có hàm số $y = k \sin(ax + b) + c$; $y = k \cos(ax + b) + c$ là hàm số tuần hoàn và có chu kỳ $T = \frac{2\pi}{|a|}$

- a) Hàm số $y = 1 - \sin 5x$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{5}$.
 b) Hàm số $y = \cos^2 x - 1 = \frac{\cos 2x - 1}{2}$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2 = \pi$.
 c) Hàm số $y = \sin\left(\frac{2}{5}x\right) \cdot \cos\left(\frac{2}{5}x\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{4}{5}x\right)$ tuần hoàn và có chu kỳ $T_2 = \frac{5\pi}{2}$.
 d) Hàm số $y = \cos x + \cos(\sqrt{3}x)$ không tuần hoàn

Vì ta có hàm số $y = \cos x$ có chu kỳ $T_1 = 2\pi$ và hàm số $y = \cos(\sqrt{3}x)$ có chu kỳ $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ nhưng

không tồn tại bội số chung nhỏ nhất của $T_1 = 2\pi$ và $T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Câu 12. Tìm chu kỳ của hàm số $y = \sin 3x + 3\cos 2x$.

Lời giải

$y = \sin 3x$ có chu kỳ $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ và hàm số $y = \cos 2x$ có chu kỳ $T_2 = \pi$
 Ta có hàm số

$\Rightarrow$ chu kỳ T của hàm số $y = \sin 3x + 3\cos 2x$ là bội chung nhỏ nhất của $T_1 = \frac{2\pi}{3}$ và $T_2 = \pi$
 $\Rightarrow T = 2\pi$

Câu 13. Chứng minh rằng hàm số T thỏa mãn $\sin(x+T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ phải có dạng $T = k2\pi$, k là một số nguyên nào đó. Từ đó suy ra, số T nhỏ nhất thỏa mãn $\sin(x+T) = \sin x$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ là 2π .

Bài giải

Nếu $\sin(x+T) = \sin x$ với mọi x , thì khi $x = \frac{\pi}{2}$, ta được $\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right) = \sin 1$. Số U mà $\sin U = 1$ thì U phải có dạng $U = \frac{\pi}{2} + k2\pi$ nên $\frac{\pi}{2} + T = \frac{\pi}{2} + k2\pi \Rightarrow T = k2\pi$.

Câu 14. Chứng minh các hàm số sau đây là hàm số tuần hoàn, tìm chu kì và xét tính chẵn lẻ của mỗi hàm số.

a) $y = \sin^2 2x + 1$

b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x$

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x$

Bài giải

a) $y = \sin^2 2x + 1 = \frac{1 - \cos 4x}{2} + 1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x$

Hàm số y tuần hoàn với chu kì $T = \frac{\pi}{2}$. Đây là hàm số chẵn.

b) $y = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x$ là một hàm số chẵn, tuần hoàn với chu kì $T = \pi$.

c) $y = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ với mọi x nên y là một hàm hằng, là một hàm số chẵn. Vì với mọi T , ta luôn có $\cos^2(x+T) + \sin^2(x+T) = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$ nên hàm số y tuần hoàn nhưng không có chu kì tuần hoàn.

Câu 15. Chứng minh rằng hàm số sau là hàm số tuần hoàn và tìm chu kì của nó: $y = \frac{1}{\sin x}$.

Lời giải

+ Tập xác định $\mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

+ Hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm số tuần hoàn vì $\exists T = 2\pi$ thỏa mãn:

$$y_{(x+2\pi)} = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = y_{(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

+ $T = 2\pi$ là số dương nhỏ nhất thỏa mãn $y_{(x+2\pi)} = \frac{1}{\sin(x+2\pi)} = \frac{1}{\sin x} = y_{(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\exists T \in (0; 2\pi): \frac{1}{\sin(x+T)} = \frac{1}{\sin x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

Thật vậy: Giả sử nếu

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2} + T\right)} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \cos T = 1 \Leftrightarrow T = k2\pi (k \in \mathbb{Z})$$

Vì $T \in (0; 2\pi) \Rightarrow$ Không tồn tại số nguyên k thỏa mãn $T = k2\pi (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow$ Điều giả sử là sai.

Vậy hàm số $y = \frac{1}{\sin x}$ là hàm số tuần hoàn và có chu kì $T = 2\pi$

DẠNG 3. TÍNH CHẴN, LẺ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Bước 1: Tìm tập xác định D của hàm số, khi đó

* Nếu D là tập đối xứng (tức $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$), thì ta thực hiện tiếp bước 2.

* Nếu D không phải tập đối xứng (tức là $\exists x \in D$ mà $-x \notin D$) thì ta kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Bước 2: Xác định $f(-x)$:

- * Nếu $f(-x) = f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số chẵn.
- * Nếu $f(-x) = -f(x), \forall x \in D$ thì kết luận hàm số là hàm số lẻ.
- * Nếu không thỏa mãn một trong hai điều kiện trên thì kết luận hàm số không chẵn không lẻ.

Các kiến thức đã học về hàm lượng giác cơ bản:

- 1, Hàm số $y = \sin x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R}$.
- 2, Hàm số $y = \cos x$ là hàm số chẵn trên $D = \mathbb{R}$.
- 3, Hàm số $y = \tan x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$.
- 4, Hàm số $y = \cot x$ là hàm số lẻ trên $D = \mathbb{R} \setminus \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$.

Câu 16. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Xét tính chẵn, lẻ của hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$.

Lời giải

Biểu thức $\frac{1}{x}$ có nghĩa khi $x \neq 0$.

Suy ra tập xác định của hàm số $g(x) = \frac{1}{x}$ là $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $g(-x) = \frac{1}{-x} = -\frac{1}{x} = -g(x), \forall x \in D$.

Vậy $g(x) = \frac{1}{x}$ là hàm số lẻ.

Câu 17. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau:

- a) $y = \sin 2x + \tan 2x$;
- b) $y = \cos x + \sin^2 x$;
- c) $y = \sin x \cos 2x$;
- d) $y = \sin x + \cos x$.

Lời giải

a) Biểu thức $\sin 2x + \tan 2x$ có nghĩa khi $\cos 2x \neq 0$ (do $\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x}$), tức là $2x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Suy ra tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin 2x + \tan 2x$ là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = \sin(-2x) + \tan(-2x) = -\sin 2x - \tan 2x = -(\sin 2x + \tan 2x) = -f(x), \forall x \in D$.

Vậy $y = \sin 2x + \tan 2x$ là hàm số lẻ.

b) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \cos x + \sin^2 x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có:

$$f(-x) = \cos(-x) + \sin^2(-x) = \cos x + (-\sin x)^2 = \cos x + \sin^2 x = f(x), \forall x \in D$$

Vậy $y = \cos x + \sin^2 x$ là hàm số chẵn.

c) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin x \cos 2x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = \sin(-x)\cos(-2x) = -\sin x \cos 2x = -f(x), \forall x \in D$.

Vậy $y = \sin x \cos 2x$ là hàm số lẻ.

d) Tập xác định của hàm số $y = f(x) = \sin x + \cos x$ là $D = \mathbb{R}$.

Do đó, nếu x thuộc tập xác định D thì $-x$ cũng thuộc tập xác định D .

Ta có: $f(-x) = \sin(-x) + \cos(-x) = -\sin x + \cos x \neq -f(x)$.

Vậy $y = \sin x + \cos x$ là hàm số không chẵn, không lẻ.

Câu 18. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2\cos 3x$ b) $y = x + \sin x$

c) $y = x \cdot \cot x + \cos x$ d) $y = x^2 + \tan |x|$

Bài giải

a) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y(-x) = 2\cos(-3x) = 2\cos 3x = y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

b) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y(-x) = -x + \sin(-x) = -(x + \sin x) = -y(x)$. Suy ra y là hàm số lẻ.

c) Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$.

$y(-x) = -x \cdot \cot(-x) + \cos(-x) = x \cdot \cot x + \cos x = y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

d) Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$y(-x) = (-x)^2 + \tan|-x| = x^2 + \tan|x| = y(x)$. Suy ra y là hàm số chẵn.

Câu 19. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

a) $y = 2x \sin x$. b) $y = \cos x + \sin 2x$.

c) $y = \frac{\cos 2x}{x}$. d) $y = \tan^7 2x \cdot \sin 5x$.

Lời giải

a) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$ (1).

Đặt $y = f(x) = 2x \sin x$.

NX: $\forall x \in D, f(-x) = 2(-x)\sin(-x) = 2x \sin x = f(x)$ (2).

Từ (1) và (2) ta kết luận hàm số đã cho là hàm số chẵn.

b) Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \cos x + \sin 2x$.

Xét $x = \frac{\pi}{3} \in D \Rightarrow -x = -\frac{\pi}{3} \in D$.

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Ta thấy $f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số chẵn

Và $-f\left(\frac{\pi}{3}\right) \neq f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ nên hàm số đã cho không là hàm số lẻ.

c) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \frac{\cos 2x}{x}$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\cos(-2x)}{-x} = -\frac{\cos(2x)}{x} = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

d) Tập xác định: $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$.

Đặt $y = f(x) = \tan^7 2x \sin 5x$.

Ta có $\forall x \in D: f(-x) = \tan^7(-2x) \sin(-5x) = -\tan^7(2x) \sin(5x) = -f(x)$.

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Chú ý: Đôi khi người ta còn phát biểu bài toán dưới dạng:

Với câu a) Chứng minh đồ thị hàm số $y = 2x \sin x$ nhận trục tung làm trục đối xứng.

Với câu c) Chứng minh đồ thị hàm số $y = \frac{\cos 2x}{x}$ nhận gốc tọa độ làm tâm đối xứng

Câu 20. Các hàm số sau chẵn hay lẻ, vì sao?

a) $y = |x| \sin x$ b) $y = \frac{\tan x - \sin x}{2 + \cos x + \cot^2 x}$

c) $y = \frac{\cos x + x^2 - 1}{\sin^4 x}$ d) $y = \frac{\sin^4 x + 1}{2 + \cos^6 x}$

Lời giải

a) $y = f(x) = |x| \sin x$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

Ta có:

+ $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

+ $f(-x) = |-x| \sin(-x) = -|x| \sin x = -f(x), \forall x \in D$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

b) $y = f(x) = \frac{\tan x - \sin x}{2 + \cos x + \cot^2 x}$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$

+ $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D$

$$f(-x) = \frac{\tan(-x) - \sin(-x)}{2 + \cos(-x) + \cot^2(-x)} = \frac{-\tan x + \sin x}{2 + \cos x + \cot^2 x} = -f(x), \forall x \in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$c) \quad y = f(x) = \frac{\cos x + x^2 - 1}{\sin^4 x}$$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$+ \quad \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = \frac{\cos(-x) + (-x)^2 - 1}{\sin^4(-x)} = \frac{\cos x + x^2 - 1}{\sin^4 x} = f(x), \forall x \in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$d) \quad y = f(x) = \frac{\sin^4 x + 1}{2 + \cos^6 x}$$

Tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R}$

$$+ \quad \forall x \in D \Rightarrow -x \in D$$

$$f(-x) = \frac{\sin^4(-x) + 1}{2 + \cos^6(-x)} = \frac{\sin^4 x + 1}{2 + \cos^6 x} = f(x), \forall x \in D$$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn.

Câu 21. Xét tính chẵn lẻ của các hàm số sau

$$a) \quad y = f(x) = \tan x + \cot x \quad b) \quad y = f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right)$$

$$c) \quad f(x) = \frac{\sin^{2020} x + 2020}{\cos x}, n \in \mathbb{Z}$$

Lời giải

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ là tập đối xứng do đó } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$$

a) Tập xác định:

$$\forall x \in D: f(-x) = \tan(-x) + \cot(-x) = -\tan x - \cot x = -f(x)$$

Ta có

Do đó hàm số đã cho là hàm số lẻ.

$$b) \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \text{ là tập đối xứng do đó } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$$

$$f(x) = \sin\left(2x + \frac{9\pi}{2}\right) = \sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(2x).$$

NX:

$$\forall x \in D: f(-x) = \cos(-2x) = \cos(2x) = f(x).$$

Ta có

Do đó hàm số đã cho là hàm số chẵn.

$$c) \text{ Tập xác định: } D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ là tập đối xứng do đó } \forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$$

$$\sin^{2020}(-x) = (-\sin x)^{2020} = \sin^{2020}(x), \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$$

+ NX:

Do đó $\forall x \in D: f(-x) = \frac{\sin^{2020}(-x) + 2020}{\cos(-x)} = \frac{\sin^{2020}(x) + 2020}{\cos(x)} = f(x).$

Suy ra hàm số là hàm số chẵn $\forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$

+ Với $n = 0$ thì $\sin^{2020}(x) = 1.$ Do đó $\forall x \in D: f(-x) = \frac{2021}{\cos(-x)} = \frac{2021}{\cos(x)} = f(x).$

Suy ra hàm số là hàm số chẵn với $n = 0.$

Vậy hàm số đã cho là hàm số chẵn $\forall n \in \mathbb{Z}.$

Câu 22. Xác định tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y = f(x) = 3m \sin 4x + \cos 2x$ là hàm chẵn.

Lời giải

- Tập xác định: $D = \mathbb{R}$ là tập đối xứng do đó $\forall x \in D \Rightarrow -x \in D.$

- Để hàm số đã cho là hàm số chẵn thì $f(-x) = f(x), \forall x \in D.$

$\Leftrightarrow 3m \sin(-4x) + \cos(-2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow -3m \sin(4x) + \cos(2x) = 3m \sin 4x + \cos 2x, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow 6m \sin(4x) = 0, \forall x \in D$

$\Leftrightarrow m = 0.$

DẠNG 4. TÍNH ĐƠN ĐIỆU CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

1. Hàm số $y = \sin x$:

* Đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

* Nghịch biến trên các khoảng $\left(\frac{\pi}{2} + k2\pi; \frac{3\pi}{2} + k2\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

2. Hàm số $y = \cos x$:

* Đồng biến trên các khoảng $(-\pi + k2\pi; k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$

* Nghịch biến trên các khoảng $(k2\pi; \pi + k2\pi), k \in \mathbb{Z}.$

3. Hàm số $y = \tan x$ đồng biến trên các khoảng $\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi\right), k \in \mathbb{Z}.$

4. Hàm số $y = \cot x$ nghịch biến trên các khoảng $(k\pi; \pi + k\pi), k \in \mathbb{Z}.$

Câu 23. (SGK-Cánh diều 11-Tập 1) Hàm số $y = \sin x$ đồng biến hay nghịch biến trên biến trên khoảng

$\left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right).$

Lời giải

Do $\left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{3\pi}{2} - 4\pi\right) = \left(\frac{\pi}{2} + (-2) \cdot 2\pi; \frac{3\pi}{2} + (-2) \cdot 2\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right)$.

Câu 24. (SGK-Cánh điều 11-Tập 1) Hàm số $y = \cos x$ đồng biến hay nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$?

Lời giải

Do $(-2\pi; -\pi) = (0 - 2\pi; \pi - 2\pi)$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(-2\pi; -\pi)$.

Nhận xét: Dựa vào đồ thị của hàm số $y = \cos x$ (Hình 28), ta thấy $\cos x = 0$ tại những giá trị

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi (k \in \mathbb{Z}) \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Vì vậy, tập hợp các số thực x sao cho $\cos x \neq 0$ là

Câu 25. (SGK-Cánh điều 11-Tập 1) Xét sự biến thiên của mỗi hàm số sau trên các khoảng tương ứng:

- a) $y = \sin x$ trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right), \left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$;
b) $y = \cos x$ trên khoảng $(-20\pi; -19\pi), (-9\pi; -8\pi)$.

Lời giải

a) Xét hàm số $y = \sin x$:

Do $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right) = \left(-\frac{\pi}{2} - 4\pi; \frac{\pi}{2} - 4\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{9\pi}{2}; -\frac{7\pi}{2}\right)$.

Do $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right) = \left(\frac{\pi}{2} + 10\pi; \frac{3\pi}{2} + 10\pi\right)$ nên hàm số $y = \sin x$ nghịch biến trên khoảng $\left(\frac{21\pi}{2}; \frac{23\pi}{2}\right)$.

b) Xét hàm số $y = \cos x$:

Do $(-20\pi; -19\pi) = (0 - 20\pi; \pi - 20\pi)$ nên hàm số $y = \cos x$ nghịch biến trên khoảng $(-20\pi; -19\pi)$.

Do $(-9\pi; -8\pi) = (-\pi - 8\pi; 0 - 8\pi)$ nên hàm số $y = \cos x$ đồng biến trên khoảng $(-9\pi; -8\pi)$.

Câu 26. Khảo sát sự biến thiên của các hàm số sau

- a) $y = \sin x$ trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$ b) $y = \cos x$ trên $\left(\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{2}\right)$
c) $y = \cot\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$ trên $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right)$ d) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$ trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right)$

Bài giải

a) y đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right)$.

b) y nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{3}; \pi\right)$, đồng biến trên $\left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$.

c) $x \in \left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x - \frac{\pi}{6} \in \left(-\frac{11\pi}{12}; -\frac{2\pi}{3}\right)$. Suy ra y nghịch biến trên $\left(-\frac{3\pi}{4}; -\frac{\pi}{2}\right)$.

$$d) \quad x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow x + \frac{\pi}{3} \in \left(\frac{\pi}{12}; \frac{5\pi}{6}\right).$$

y đồng biến trên $\left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{6}\right)$, nghịch biến trên $\left(\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right)$ và không xác định tại $x = \frac{\pi}{6}$.

DẠNG 5. TẬP GIÁ TRỊ, MIN, MAX CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

*Các kiến thức về giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên miền $D \subset \mathbb{R}$.

1. Số thực M được gọi là giá trị lớn nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \leq M, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = M \end{cases}$

2. Số thực m được gọi là giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$ trên D nếu $\begin{cases} f(x) \geq m, \forall x \in D \\ \exists x_0 \in D, f(x_0) = m \end{cases}$
 Một số kiến thức ta sử dụng trong các bài toán này:

1. Tính bị chặn của hàm số lượng giác.

2. Điều kiện có nghiệm của phương trình bậc nhất giữa $\sin$ và $\cos$.

Lưu ý

1. Bất đẳng thức AM – GM.

a. Với hai số:

Cho hai số thực a, b là hai số dương, ta có $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$ dấu bằng xảy ra khi $a = b$.

b. Với n số:

Cho hai số thực $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ là các số dương $n \in \mathbb{N}^*$, ta có $\frac{x_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n}{n} \geq \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot \dots \cdot x_n}$
 dấu bằng xảy ra khi $x_1 = x_2 = x_3 = \dots = x_n$.

2. Bất đẳng thức Bunyakovsky

a. Bất đẳng thức Bunyakovsky dạng thông thường.

$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$. Dấu bằng xảy ra khi $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

b. Bất đẳng thức Bunyakovsky cho bộ hai số

Với hai bộ số $(a_1; a_2; \dots; a_n)$ và $(b_1; b_2; \dots; b_n)$ ta có

$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n)^2$

c. Hệ quả của bất đẳng thức Bunyakovsky ta có $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq 4abcd$

Câu 27. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Tìm tập giá trị của hàm số $y = 2\sin x$.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \sin x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $2 \times (-1) \leq 2\sin x \leq 2 \times 1$ hay $-2 \leq 2\sin x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = 2\sin x$ có tập giá trị là $[-2; 2]$.

Câu 28. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Tìm tập giá trị của hàm số $y = -3\cos x$.

Lời giải

Ta có: $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $(-3) \times (-1) \geq -3 \cos x \geq (-3) \times 1$ hay $-3 \leq -3 \cos x \leq 3$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy hàm số $y = -3 \cos x$ có tập giá trị là $[-3; 3]$.

Câu 29. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Tìm tập giá trị của các hàm số sau:

a) $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$;

b) $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$

Lời giải

a) Ta có: $-1 \leq \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -2 - 1 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \leq 2 - 1, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow -3 \leq 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1 \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3 \leq y \leq 1, \forall x \in \mathbb{R}$

Vậy tập giá trị của hàm số $y = 2 \sin \left(x - \frac{\pi}{4} \right) - 1$ là $[-3; 1]$.

b) Vì $-1 \leq \cos x \leq 1$ với mọi $x \in \mathbb{R}$ nên $0 \leq 1 + \cos x \leq 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Do đó, $0 \leq \sqrt{1 + \cos x} \leq \sqrt{2}$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Suy ra $-2 \leq \sqrt{1 + \cos x} - 2 \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Hay $-2 \leq y \leq \sqrt{2} - 2$ với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập giá trị của hàm số $y = \sqrt{1 + \cos x} - 2$ là $[-2; \sqrt{2} - 2]$

Câu 30. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Giả sử vận tốc v (tính bằng lít/giây) của luồng khí trong một chu kì hô hấp (tức là thời gian từ lúc bắt đầu của một nhịp thở đến khi bắt đầu của nhịp thở tiếp theo) của một người nào đó ở trạng thái nghỉ ngơi được cho bởi công thức

$$v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3},$$

trong đó t là thời gian (tính bằng giây).

a) Hãy tìm thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ và số chu kì hô hấp trong một phút của người đó.

b) Biết rằng quá trình hít vào xảy ra khi $v > 0$ và quá trình thở ra xảy ra khi $v < 0$.

Trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm nào thì người đó hít vào? người đó thở ra?

Lời giải

a) Thời gian của một chu kì hô hấp đầy đủ chính là một chu kì tuần hoàn của hàm $v(t)$ và là

$$T = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$$

(giây)

Ta có: 1 phút = 60 giây.

Do đó, số chu kì hô hấp trong một phút của người đó là $\frac{60}{6} = 10$ (chu kì).

b) Ta có:

$$v = 0,85 \sin \frac{\pi t}{3}$$

$$-v < 0 \text{ khi } 0.85 \sin \frac{\pi t}{3} > 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} > 0$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Do đó, } 0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$$

$$-v < 0 \text{ khi } 0.85 \sin \frac{\pi t}{3} < 0 \Leftrightarrow \sin \frac{\pi t}{3} < 0$$

$$\text{Mà } -1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1 \text{ với mọi } x \in \mathbb{R}. \text{ Do đó, } -1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$$

$$\text{Với } t \in (0; 3) \text{ ta có } 0 < \sin \frac{\pi t}{3} \leq 1$$

$$\text{Với } t \in (3; 5] \text{ ta có } -1 \leq \sin \frac{\pi t}{3} < 0$$

Vậy trong khoảng thời gian từ 0 đến 5 giây, khoảng thời điểm sau 0 giây đến trước 3 giây thì người đó hít vào và khoảng thời điểm sau 3 giây đến 5 giây thì người đó thở ra.

Câu 31. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Trong Vật lí, ta biết rằng phương trình tổng quát của một vật dao động điều hoà cho bởi công thức $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$, trong đó t là thời điểm (tính bằng giây), $x(t)$ là li độ của vật tại thời điểm t , A là biên độ dao động ($A > 0$), $\omega t + \varphi$ là pha của dao động tại thời

điểm t và $\varphi \in [-\pi; \pi]$ là pha ban đầu của dao động. Dao động điều hoà này có chu kì $T = \frac{2\pi}{\omega}$ (tức là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần).

Giả sử một vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = -5 \cos 4\pi t \text{ (cm)}$.

a) Hãy xác định biên độ và pha ban đầu của dao động.

b) Tính pha của dao động tại thời điểm $t = 2$ (giây). Hỏi trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được bao nhiêu dao động toàn phần?

Lời giải

$$\text{a) Ta có: } -5 \cos 4\pi t = 5 \cos(4\pi t + \pi)$$

Khi đó vật dao động điều hoà theo phương trình $x(t) = 5 \cos(4\pi t + \pi) \text{ (cm)}$ với biên độ dao động là $A = 5 > 0$ và pha ban đầu của dao động là $\varphi = \pi$.

$$\text{b) Pha của dao động tại thời điểm } t = 2 \text{ (giây) là } \omega t + \varphi = 4\pi \cdot 2 + \pi = 9\pi$$

Dao động điều hoà có chu kì là $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{4\pi} = \frac{1}{2} = 0.5$, có nghĩa là khoảng thời gian để vật thực hiện một dao động toàn phần là 0,5 giây. Do đó, trong khoảng thời gian 2 giây, vật thực hiện được $2 : 0,5 = 4$ dao động toàn phần.

Câu 32. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất

$$\text{a) } y = 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) - 3 \quad \text{b) } y = -5 + 2 \cos^2 \left(2x - \frac{\pi}{3} \right)$$

$$\text{c) } y = 2\sqrt{\cos 3x} - 1 \quad \text{d) } y = \frac{\sin^2(3x)}{2} - 3 \cos^2(3x)$$

Bài giải

$$\text{a) Ta có } -1 \leq \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) \leq 1$$

$$\Rightarrow -2 \leq 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) \leq 2$$

$$\Rightarrow -5 \leq 2 \sin \left(3x - \frac{\pi}{2} \right) - 3 \leq 1$$

$$\text{Suy ra } y_{\max} = -1 \text{ khi } \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$y_{\min} = -5 \text{ khi } \sin\left(3x - \frac{\pi}{2}\right) = -1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$0 \leq \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 1$$

b) Ta có

$$\Rightarrow 0 \leq 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq 2$$

$$\Rightarrow -5 \leq 2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - 5 \leq -3$$

$$\text{Suy ra } y_{\min} = -5 \text{ khi } \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{12} + \frac{k\pi}{2}, k \in \mathbf{Z}$$

$$y_{\max} = -3 \text{ khi } \cos^2\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1 \Rightarrow \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + k\pi \\ x = \frac{2\pi}{3} + k\pi \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

$$\text{c) Ta có } 0 \leq \sqrt{\cos 3x} \leq 1$$

$$\Rightarrow -1 \leq 2\sqrt{\cos 3x} - 1 \leq 1$$

$$\text{Suy ra } y_{\min} = -1 \text{ khi } \cos 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$y_{\max} = 1 \text{ khi } \cos 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{k2\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$y = \frac{\sin^2 3x - 6(1 - \sin^2 3x)}{2} = \frac{7\sin^2 3x - 6}{2}$$

d) Ta có

$$0 \leq \sin^2 3x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq \frac{7\sin^2 3x - 6}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\text{Suy ra } y_{\min} = -3 \text{ khi } \sin 3x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{k\pi}{3}, k \in \mathbf{Z}$$

$$y_{\max} = \frac{1}{2} \text{ khi } \sin^2 3x = 1 \Leftrightarrow \sin 3x = \pm 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{k2\pi}{3} \end{cases}, k \in \mathbf{Z}$$

Câu 33. Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất (nếu có) của các hàm số sau

a) $y = 4 - 2\cos 2x$

b) $y = \sqrt{3 + \sin^{2018} x}$

c) $y = \sin x - \cos x + 3$

d) $y = \sin^2 x + 2\sin x \cos x - \cos^2 x + 5$

e) $y = 4\cos^2 x - 4\cos x + 3$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

f) $y = \cos 2x + 5\sin x + 2$ với $x \in \left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$

Lời giải

a) $y = 4 - 2\cos 2x$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-1 \leq \cos 2x \leq 1 \Leftrightarrow 2 \geq -2\cos 2x \geq -2 \Leftrightarrow 6 \geq 4 - 2\cos 2x \geq 2$.

Ta có $y = 6$ khi $\cos 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = \pi + k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và
 $y = 2$ khi $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = k2\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow x = k\pi$.

Vậy $\max y = 6$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\min y = 2$ khi $x = k\pi$.

b) $y = \sqrt{3 + \sin^{2018} x}$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \sin^{2018} x \leq 1 \Leftrightarrow 3 \leq 3 + \sin^{2018} x \leq 4 \Leftrightarrow \sqrt{3} \leq \sqrt{3 + \sin^{2018} x} \leq 2.$$

Ta có $y = \sqrt{3}$ khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và $y = 2$ khi $\sin x = \pm 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\max y = 2$ khi $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $\min y = \sqrt{3}$ khi $x = k\pi$.

c) $y = \sin x - \cos x + 3$

Với mọi $x \in \mathbb{R}$ thì $-\sqrt{(1^2 + 1^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} \leq \sin x - \cos x \leq \sqrt{(1^2 + 1^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)}$
 $\Leftrightarrow -\sqrt{2} + 3 \leq \sin x - \cos x + 3 \leq \sqrt{2} + 3$.

Ta có $y = -\sqrt{2} + 3$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$ và $y = \sqrt{2} + 3$ khi $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

Vậy $\min y = -\sqrt{2} + 3$ khi $x = -\frac{\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$, $\max y = \sqrt{2} + 3$ khi $x = \frac{3\pi}{4} + k2\pi, (k \in \mathbb{Z})$.

d) TXĐ: $\mathbb{R}$.

* Ta có $y = \sin 2x - \cos 2x + 5$ hay $y = \sqrt{2} \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5$

$$\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, 5 - \sqrt{2} \leq \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) + 5 \leq 5 + \sqrt{2}$$

* Ta có $\begin{cases} y \geq 5 - \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \\ y\left(-\frac{\pi}{8}\right) = 5 - \sqrt{2} \end{cases}$ nên giá trị nhỏ nhất của hàm số là $5 - \sqrt{2}$.

* Ta có $\begin{cases} y \leq 5 + \sqrt{2}, \forall x \in \mathbb{R} \\ y\left(\frac{3\pi}{8}\right) = 5 + \sqrt{2} \end{cases}$ nên giá trị lớn nhất của hàm số là $5 + \sqrt{2}$.

e) Đặt $t = \cos x$. Với $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ta có $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Khi đó ta có $y = f(t) = 4t^2 - 4t + 3$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leq t \leq \frac{1}{2}$

Ta có bảng biến thiên:

t		$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$f(t)$		$6+2\sqrt{3}$	2	

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ là $6+2\sqrt{3}$.

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ là 2 .

f) Ta có $y = -2\sin^2 x + 5\sin x + 3$.

Đặt $t = \sin x$. Với $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{6}$ ta có $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Khi đó ta có $y = f(t) = -2t^2 + 5t + 3$, $\frac{1}{2} \leq t \leq 1$.

Ta có bảng biến thiên:

t		$\frac{1}{2}$	1	
$f(t)$		5	6	

Từ bảng biến thiên ta có:

Giá trị lớn nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ là 6 .

Giá trị nhỏ nhất của hàm số đã cho trên $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{5\pi}{6}\right]$ là 5 .

Câu 34. Tìm GTLN và GTNN của các hàm số sau:

a) $y = \sqrt{1 + \sin x} + 2$ b) $y = 3\sin x + 4\cos x$

c) $y = (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x) - 1$ d) $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$.

Lời giải

a) $y = \sqrt{1 + \sin x} + 2$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, ta có:

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq 1 + \sin x \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq \sqrt{1 + \sin x} \leq \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow 2 \leq \sqrt{1 + \sin x} + 2 \leq \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow 2 \leq y \leq \sqrt{2} + 2$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = 2 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \quad \text{và} \quad \max_{\mathbb{R}} y = \sqrt{2} + 2 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$$

b) $y = 3\sin x + 4\cos x$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$\text{Ta có: } |y| = |3\sin x + 4\cos x| \leq \sqrt{(3^2 + 4^2)(\sin^2 x + \cos^2 x)} = 5 \Leftrightarrow -5 \leq y \leq 5$$

$$\text{Vậy } \min_{\mathbb{R}} y = -5 \quad \text{và} \quad \max_{\mathbb{R}} y = 5$$

c) $y = (\sin x - 2\cos x)(2\sin x + \cos x) - 1$. TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y = 2\sin^2 x - 3\sin x \cos x - 2\cos^2 x - 1$

$$\Leftrightarrow y = -2\cos 2x - \frac{3}{2}\sin 2x - 1 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\sin 2x + 2\cos 2x = -y - 1 \quad (*)$$

Để tồn tại giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} + 4 \geq (-y - 1)^2 \Leftrightarrow (y + 1)^2 \leq \frac{25}{4} \Leftrightarrow -\frac{7}{2} \leq y \leq \frac{3}{2}$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -\frac{7}{2}$ và $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{3}{2}$.

d) $y = \frac{\sin x + \cos x - 1}{\sin x - \cos x + 3}$

Để thấy $\sin x - \cos x + 3 \neq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ nên hàm số đã cho có TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $y(\sin x - \cos x + 3) = \sin x + \cos x - 1 \Leftrightarrow (y - 1)\sin x - (y + 1)\cos x = -3y - 1 \quad (*)$

Để tồn tại giá trị nhỏ nhất và giá trị lớn nhất của hàm số đã cho thì phương trình $(*)$ phải có nghiệm

$$\Leftrightarrow (y - 1)^2 + (y + 1)^2 \geq (-3y - 1)^2 \Leftrightarrow 7y^2 + 6y - 1 \leq 0 \Leftrightarrow -1 \leq y \leq \frac{1}{7}$$

Vậy $\min_{\mathbb{R}} y = -1$ và $\max_{\mathbb{R}} y = \frac{1}{7}$.

Câu 35. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau.

a) $y = 3\sin x - 4\cos x$

b) $y = 2(\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 5\sin x \cos x - 3$

c) $y = \frac{2\sin x + \cos x + 2}{\sin x + \cos x - 2}$

d) $y = \frac{2\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 3}$

Lời giải

a) $y = 3\sin x - 4\cos x$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0 = 3\sin x - 4\cos x$ có nghiệm.

$$\Leftrightarrow y_0^2 \leq 3^2 + (-4)^2 = 25 \Leftrightarrow -5 \leq y_0 \leq 5$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng 5, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng -5.

b) $y = 2(\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 5\sin x \cos x - 3$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình

$$y_0 = 2(\sin x - \cos x)^2 + 2\cos 2x + 5\sin x \cos x - 3$$
 có nghiệm

$$\Leftrightarrow y_0 = 2\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x - 1$$
 có nghiệm

$$\Leftrightarrow 2y_0 + 2 = 4\cos 2x + \sin 2x$$
 có nghiệm

$$\Leftrightarrow (2y_0 + 2)^2 \leq 17$$

$$\Leftrightarrow 4y_0^2 + 8y_0 - 13 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-2 - \sqrt{17}}{2} \leq y_0 \leq \frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{-2 + \sqrt{17}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{-2 - \sqrt{17}}{2}$.

c) $y = \frac{2\sin x + \cos x + 2}{\sin x + \cos x - 2}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0 = \frac{2\sin x + \cos x + 2}{\sin x + \cos x - 2}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow (y_0 - 2)\sin x + (y_0 - 1)\cos x = 2 + 2y_0 \text{ có nghiệm}$$

$$\Leftrightarrow (2y_0 + 2)^2 \leq (y_0 - 2)^2 + (y_0 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y_0^2 + 14y_0 - 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7 - \sqrt{51}}{2} \leq y_0 \leq \frac{-7 + \sqrt{51}}{2}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{-7 + \sqrt{51}}{2}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{-7 - \sqrt{51}}{2}$.

d) $y = \frac{2\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 3}$

Tập xác định của hàm số là $\mathbb{R}$.

Giả sử y_0 là một giá trị của hàm số, khi đó phương trình $y_0 = \frac{2\cos x + 1}{\sin x - \cos x + 3}$ có nghiệm

$$\Leftrightarrow y_0 \sin x - (y_0 + 2)\cos x = 1 - 3y_0 \text{ có nghiệm} \Leftrightarrow (1 - 3y_0)^2 \leq y_0^2 + (y_0 + 2)^2 \Leftrightarrow 7y_0^2 - 10y_0 - 3 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5 - \sqrt{46}}{7} \leq y_0 \leq \frac{5 + \sqrt{46}}{7}$$

Vậy giá trị lớn nhất của hàm số bằng $\frac{5 + \sqrt{46}}{7}$, giá trị nhỏ nhất của hàm số bằng $\frac{5 - \sqrt{46}}{7}$.

Câu 36. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các hàm số sau:

a) $y = \frac{\sin 3x + 2\cos 3x + 1}{\sin 3x + \cos 3x + 2}$. b) $y = \sin \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1$

c) $y = \sqrt{3} \sin 2x + 2\sin^2 x - 1$. d) $y = 3\sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right) + 4\cos\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$

Lời giải

a) $y = \frac{\sin 3x + 2\cos 3x + 1}{\sin 3x + \cos 3x + 2}$ (1)

Ta có $\sin 3x + \cos 3x + 2 \neq 0 \quad \forall x$. Tập xác định $D = \mathbb{R}$

Giả sử y_0 là một giá trị hàm số, khi đó tồn tại $x \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$y_0 (\sin 3x + \cos 3x + 2) = \sin 3x + 2 \cos 3x + 1$$

$$\Leftrightarrow (y_0 - 1) \sin 3x + (y_0 - 2) \cos 3x = 1 - 2y_0$$

Phương trình có nghiệm khi:

$$(y_0 - 1)^2 + (y_0 - 2)^2 \geq (1 - 2y_0)^2$$

$$\Leftrightarrow 2y_0^2 + 2y_0 - 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq y_0 \leq 1$$

b) $y = \sin \frac{2x}{1+x^2} + \cos \frac{4x}{1+x^2} + 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

• Đặt $t = \frac{2x}{1+x^2}$, ta có:

$$\left. \begin{array}{l} |t| = \frac{2|x|}{1+x^2} \leq 1, \forall x \neq 0 \\ x=0 \Rightarrow t=0 \end{array} \right\} \Rightarrow t \in [-1; 1]$$

• Hàm số trở thành $y = \sin t + \cos 2t + 1, \quad \forall t \in [-1; 1]$

$$\Rightarrow y = -2 \sin^2 t + \sin t + 2$$

Đặt $a = \sin t$ suy ra $a \in [\sin(-1); \sin(1)]$

Hàm số trở thành $y = -2a^2 + a + 2$

Ta có bảng biến thiên:

a	$\sin(-1)$	$\frac{1}{4}$	$\sin(1)$
y	$-2(\sin(-1))^2 + \sin(-1) + 2$	$\frac{17}{8}$	$-2(\sin(1))^2 + \sin(1) + 2$

Vậy:

Giá trị nhỏ nhất của hàm số là $y = -2(\sin(-1))^2 + \sin(-1) + 2$

Giá trị lớn nhất của hàm số là $y = \frac{17}{8}$

c) $y = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = \sqrt{3} \sin 2x + 2 \sin^2 x - 1 = \sqrt{3} \sin 2x - \cos 2x = 2 \sin \left(2x - \frac{\pi}{4} \right)$$

Ta có:

$$\Rightarrow -2 \leq y \leq 2$$

d) $y = 3 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right)$

Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$y = 3 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) + 4 \cos \left(3x + \frac{\pi}{6} \right) = 5 \sin \left(3x + \frac{\pi}{6} + \alpha \right)$$

$$\begin{aligned} & \cos \alpha = \frac{3}{5}; \sin \alpha = \frac{4}{5} \\ & \text{(với } -5 \leq y \leq 5 \text{)} \end{aligned}$$

Câu 37. Chứng minh rằng với mọi số thực x ta đều có $\sin^6 x \cdot \cos^4 x \leq \frac{108}{3125}$.

Lời giải

Áp dụng bất đẳng thức Cauchy cho 5 số không âm $\sin^2 x, \sin^2 x, \sin^2 x, \frac{3}{2} \cos^2 x$ và $\frac{3}{2} \cos^2 x$, ta có

$$\sin^2 x + \sin^2 x + \sin^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x + \frac{3}{2} \cos^2 x \geq 5 \sqrt{\sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \frac{3}{2} \cos^2 x \cdot \frac{3}{2} \cos^2 x}$$

$$\Leftrightarrow 3 \geq 5 \sqrt{\frac{9}{4} \sin^6 x \cdot \cos^4 x}$$

$$\Leftrightarrow \sin^6 x \cdot \cos^4 x \leq \frac{108}{3125} \text{ (đpcm).}$$

DẠNG 6. ĐỒ THỊ CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

Các kiến thức cơ bản về dạng của hàm số lượng giác được đưa ra ở phần I:

Lý thuyết cơ bản: Sau đây ta bổ sung một số kiến thức lý thuyết để giải quyết bài toán nhận dạng đồ thị hàm số lượng giác một cách hiệu quả.

Sơ đồ biến đổi đồ thị hàm số cơ bản:

Các kiến thức liên quan đến suy diễn đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối:

Cho hàm số $y = f(x)$. Từ đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta suy diễn:

- Đồ thị hàm số $y = |f(x)|$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ phía dưới trục hoành qua trục hoành.

*Phần từ trục hoành trở lên của đồ thị $y = f(x)$.

- Đồ thị hàm số $y = f(|x|)$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị trên qua trục Oy .

*Phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm bên phải trục Oy

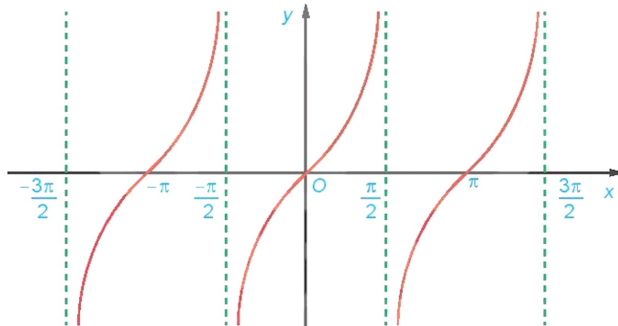
- Đồ thị hàm số $y = |u(x)| \cdot v(x)$ với $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ gồm:

*Đối xứng phần đồ thị $y = f(x)$ trên miền $u(x) < 0$ qua trục hoành.

*Phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ trên miền thỏa mãn $u(x) \geq 0$

Câu 38. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Sử dụng đồ thị đã vẽ ở Hình, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn

$\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ để hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị âm.



Lời giải

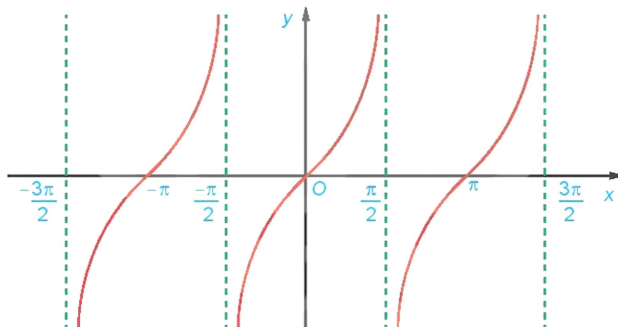
Hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị âm ứng với phần đồ thị nằm dưới trục hoành. Từ đồ thị ở Hình ta

suy ra trên đoạn $\left[-\pi; \frac{3\pi}{2}\right]$ thì $y < 0$ khi $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right) \cup \left(\frac{\pi}{2}; \pi\right)$

Câu 39. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Từ đồ thị của hàm số $y = \tan x$, hãy tìm các giá trị x sao cho $\tan x = 0$.

Lời giải

Ta có đồ thị của hàm số $y = \tan x$ như hình vẽ dưới đây.



Ta có $\tan x = 0$ khi hàm số $y = \tan x$ nhận giá trị bằng 0 ứng với các điểm x mà đồ thị giao với trục hoành. Từ đồ thị ở hình trên ta suy ra $y = 0$ hay $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

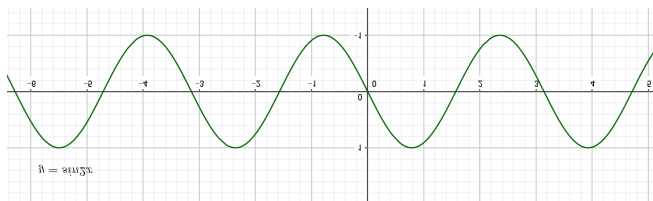
Câu 40. Vẽ đồ thị của các hàm số sau

a) $y = \sin 2x$ b) $y = \sin x$

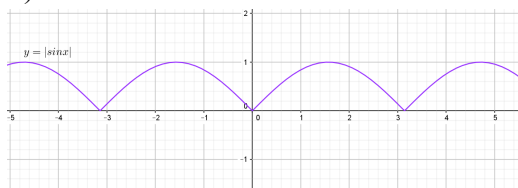
c) $y = \tan \frac{x}{2}$ d) $y = -\cot x$

Bài giải

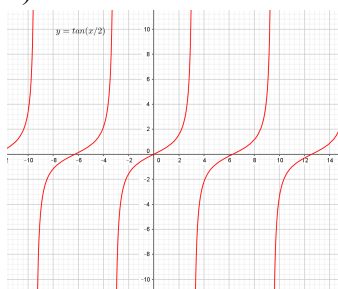
a) $y = \sin 2x$



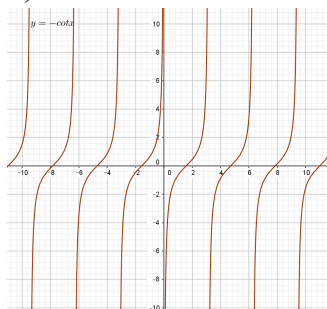
b) $y = |\sin x|$



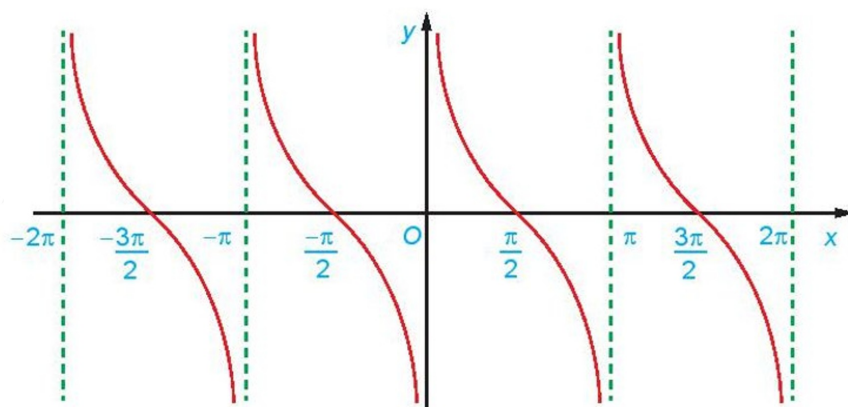
c) $y = \tan \frac{x}{2}$



d) $y = -\cot x$



Câu 41. (SGK- KNTT 11-Tập 1) Sử dụng đồ thị đã vẽ ở **hình**, hãy xác định các giá trị của x trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ để hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị dương.



Lời giải

Hàm số $y = \cot x$ nhận giá trị dương ứng với phần đồ thị nằm trên trục hoành. Từ đồ thị ở Hình ta

suy ra trên đoạn $\left[-\frac{\pi}{2}; 2\pi\right]$ thì $y > 0$ khi $x \in \left(0; -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi; \frac{3\pi}{2}\right)$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>