

ĐỀ 76**HSG TOÁN 9 QUẢNG NINH 22-23**

Bài 1. (3,0 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{+2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$

và $x \neq 1$.

- Rút gọn biểu thức A;
- Tìm giá trị của x để $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Bài 2. (5,0 điểm):

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y + x y^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$

Bài 3. (3,0 điểm): Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn:

$$x^2 - 9y^2 + 9x - 6y = 1$$

a. Chứng minh $\frac{x}{x^2+9}$ là phân số tối giản;

b. Tìm tất cả các cặp số (x; y)

Bài 4. (7,0 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ tia tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm C bất kì (C khác A), đường thẳng BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác B). Gọi H là hình chiếu của A trên OC, đường thẳng DH cắt AB ở E.

a. Chứng minh tứ giác OBDH nội tiếp;

b. Chứng minh $EA^2 = EO \cdot EB$

c. Tính tỉ số $\frac{HE}{HB}$

Bài 5. (2,0 điểm): Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm giá trị

nhỏ nhất của biểu thức $P = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{xy + y^2}$

-----**HẾT**-----

LỜI GIẢI

Bài 1. (3,0 điểm): Cho biểu thức $A = \frac{5\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+2} - \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} - \frac{2\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}-2}$ với $x \geq 0$

và $x \neq 1$.

a. Rút gọn biểu thức A;

b. Tìm giá trị của x để $\frac{A}{2}$ nhận giá trị nguyên.

Lời giải

a. Rút gọn biểu thức A;

$$\begin{aligned} A &= \frac{(5\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-1) + (2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2) - (2\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \frac{7x-5\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} = \frac{7\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2} \end{aligned}$$

b. $A = 7 - \frac{12}{\sqrt{x}+2}$ Có $\sqrt{x}+2 \geq 2 \Rightarrow 0 < \frac{12}{\sqrt{x}+2} \leq 6$ Vậy $\frac{1}{2} \leq \frac{A}{2} \leq \frac{7}{3}$ mà $\frac{A}{2} \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} = 1 \text{ hoặc } 2 \text{ hoặc } 3$$

+) $\frac{A}{2} = 1 \Rightarrow A = 2 \Rightarrow 2 = 7 - \frac{12}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow 5(\sqrt{x}+2) = 12 \Rightarrow x = \frac{4}{25}$ (TM)

+) $\frac{A}{2} = 2 \Rightarrow A = 4 \Rightarrow 4 = 7 - \frac{12}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow 3(\sqrt{x}+2) = 12 \Rightarrow x = 4$ (TM)

+) $\frac{A}{2} = 3 \Rightarrow A = 6 \Rightarrow 6 = 7 - \frac{12}{\sqrt{x}+2} \Rightarrow \sqrt{x}+2 = 12 \Rightarrow x = 100$ (TM)

Bài 2. (5,0 điểm):

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y + x y^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases}$$

2. Giải phương trình: $x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$

Lời giải

1. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y + x y^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 y + x y^2 + 5x + 5y = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy = 10 \\ (x+y)(xy+5) = 32 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{(x+y)^2 - 10}{2} \\ (x+y) \left[\frac{(x+y)^2 - 10}{2} + 5 \right] = 32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = \frac{(x+y)^2 - 10}{2} \\ (x+y)^2 = 64 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=4 \\ xy=3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ x(4-x)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=4-x \\ -x^2+4x-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=1 \\ x=1 \\ y=3 \end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là $(x,y) = (1,3)$ hoặc $(x,y) = (3,1)$

2. Giải phương trình: $x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 = 0$

ĐK: $x \geq -1$

$$\begin{aligned} x^2 - 5x - 4\sqrt{x+1} + 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x^2 - 6x + 9) + (x + 1 - 4\sqrt{x+1} + 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow (x-3)^2 + (\sqrt{x+1} - 2)^2 &= 0 \end{aligned}$$

Vì $(x-3)^2 \geq 0$, dấu đẳng thức khi $x=3$

$(\sqrt{x+1}-2)^2 \geq 0$, dấu đẳng thức khi $x=3$

Vậy: $(x-3)^2 + (\sqrt{x+1}-2)^2 = 0 \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn điều kiện)

Bài 3. (3,0 điểm): Cho các số nguyên dương x, y thỏa mãn:

$$x^2 - 9y^2 + 9x - 6y = 1$$

a. Chứng minh $\frac{x}{x^2+9}$ là phân số tối giản;

b. Tìm tất cả các cặp số $(x; y)$

Lời giải

$$a. x^2 - 9y^2 + 9x - 6y = 1$$

$$\Leftrightarrow x(x^2+9) = (3y+1)^2$$

$$\text{Giả sử } \text{UCLN}(x; x^2+9) = d \Rightarrow \begin{cases} x : d \\ x^2+9 : d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 : d \\ x^2+9 : d \end{cases} \Rightarrow 9 : d$$

$$\Rightarrow d = 1 \text{ hoặc } 3 \text{ hoặc } 9$$

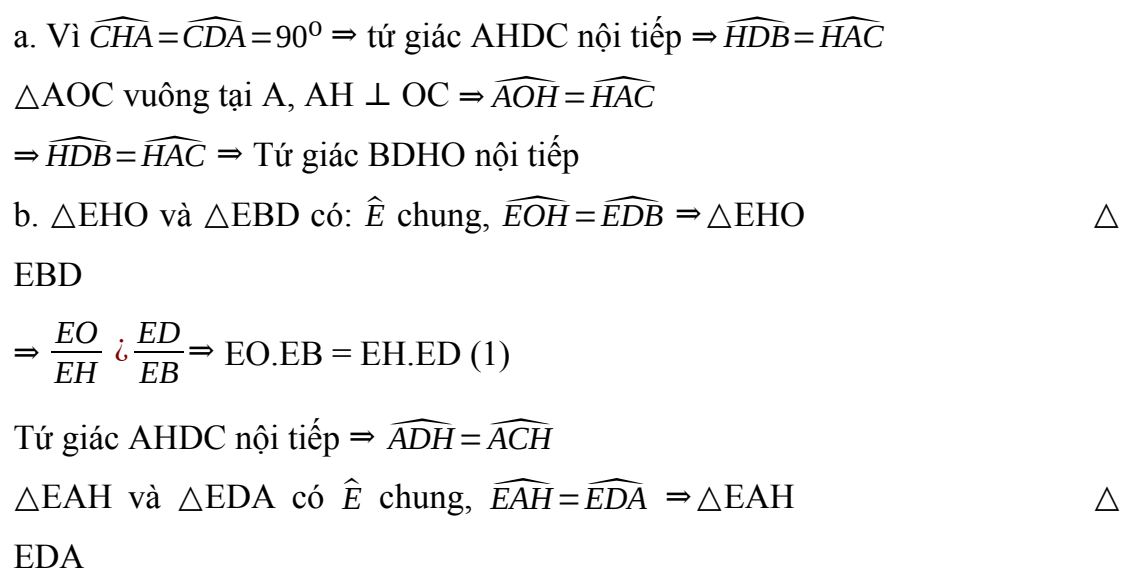
$$\begin{cases} x : d \\ x^2+9 : d \end{cases}$$

$\Rightarrow x(x^2+9):d$ hay $(3y+1)^2:d^2 \Rightarrow (3y+1):d$ nhưng $3y+1$ không chia hết cho 3, cho 9 nên $d = 1 \Rightarrow \frac{x}{x^2+9}$ tối giản.

Bài 4. (7,0 điểm): Cho nửa đường tròn tâm O, đường kính AB. Trên nửa mặt phẳng bờ AB chứa nửa đường tròn (O) vẽ tia tiếp tuyến Ax với nửa đường tròn. Trên tia Ax lấy điểm C bất kì (C khác A), đường thẳng BC cắt nửa đường tròn (O) tại điểm D (D khác B). Gọi H là hình chiếu của A trên OC, đường thẳng DH cắt AB ở E.

- Chứng minh tứ giác OBDH nội tiếp;
- Chứng minh $EA^2 = EO \cdot EB$
- Tính tỉ số $\frac{HE}{HB}$

Lời giải



$$\Rightarrow \frac{EH}{EA} \cdot \frac{EA}{ED} \Rightarrow EA^2 = EH \cdot ED \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow EA^2 = EO \cdot EB$$

$$\text{c. Tứ giác OBDH nội tiếp} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{ODB} \text{ và } \widehat{DHC} = \widehat{DBO}$$

$$\triangle OBD \text{ cân tại O} \Rightarrow \widehat{ODB} = \widehat{OBD} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OHC} \Rightarrow \widehat{OHB} = \widehat{OHE}$$

$$\triangle HEB \text{ có HO là phân giác} \Rightarrow \frac{HE}{HB} \cdot \frac{OE}{OB}$$

$$\text{Có: } EA^2 = EO \cdot EB \Rightarrow (R - EO)^2 = EO \cdot (EO + R)$$

$$\Leftrightarrow R^2 - 2R \cdot EO + EO^2 = EO^2 + R \cdot EO$$

$$\Leftrightarrow R^2 = 3R \cdot EO \Leftrightarrow R = 3EO \Leftrightarrow \frac{OE}{OB} \cdot \frac{1}{3} \cdot \text{Vậy } \frac{HE}{HB} = \frac{1}{3}$$

Bài 5. (2,0 điểm): Cho các số thực dương x, y thỏa mãn $x + \frac{1}{y} \leq 1$. Tìm giá trị

$$\text{nhỏ nhất của biểu thức } P = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{xy + y^2}$$

Lời giải

$$1 \geq x + \frac{1}{y} \geq 2\sqrt{\frac{x}{y}} \Leftrightarrow \frac{x}{y} \leq \frac{1}{4}$$

$$P = \frac{x^2 - 2xy + 2y^2}{xy + y^2} = \frac{\frac{x^2}{y^2} - 2\frac{x}{y} + 2}{\frac{x}{y} + 1} \cdot \text{Đặt } \frac{x}{y} = t \Rightarrow P = \frac{t^2 - 2t + 2}{t + 1} \text{ với } 0 < t \leq \frac{1}{4}$$

$$P = t - 3 + \frac{5}{t + 1} = (t + 1) + \frac{5}{t + 1} - 4 = \frac{16}{5}(t + 1) + \frac{5}{t + 1} - \frac{11}{5}(t + 1) - 4$$

$$\frac{16(t + 1)}{5} + \frac{5}{t + 1} \geq 2\sqrt{\frac{16(t + 1)}{5} \cdot \frac{5}{t + 1}} = 8, \text{ dấu "=" khi } \frac{16}{5}(t + 1) = \frac{5}{t + 1} \Leftrightarrow t = \frac{1}{4}$$

$$- \frac{11}{5}(t + 1) \geq - \frac{11}{4}, \text{ dấu "=" khi } t = \frac{1}{4} \Rightarrow P \geq \frac{5}{4}, \text{ dấu "=" khi } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của P là } \frac{5}{4} \text{ tại } (x; y) = \left(\frac{1}{2}; 2\right)$$

-----HẾT-----