

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm có 1 trang)

Môn: Toán

Thời gian: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Ngày thi: 12/05/2019

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \right) \cdot \frac{x(x + 1) - (1 + x)}{x^3 - 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

c) Đa thức f(x) chia cho x + 1 dư 4, chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm phần dư khi chia f(x) cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x; y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

Tính giá trị của biểu thức: $B = \frac{16(x + y)}{z} + \frac{3(y + z)}{x} - \frac{2038(z + x)}{y}$.

Câu 4 (7,0 điểm)

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK \cdot FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1 + b - a} + \frac{b}{1 + c - b} + \frac{c}{1 + a - c} \geq 1$$

--- Hết ---

- Thí sinh không được sử dụng tài liệu.

- Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.

Câu 1 (2,0 điểm)

Cho biểu thức: $P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \right) \cdot \frac{x(x + 1) - (1 + x)}{x^3 - 1}$.

a) Rút gọn P.

b) Tìm giá trị nguyên của x để P nhận giá trị nguyên ?

Giải:

$$P = \left(\frac{x^4 + x^2 - 4x + 1}{x^2 - 1} - \frac{x - 1}{x + 1} + \frac{x + 1}{x - 1} \right) \cdot \frac{x(x + 1) - (1 + x)}{x^3 - 1}$$

* ĐKXĐ: $x \neq \pm 1$

$$a) P = \left(\frac{(x^4 + x^2 - 4x + 1) - (x^2 - 2x + 1) + (x^2 + 2x + 1)}{x^2 - 1} \right) \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^4 - x) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{x(x - 1)(x^2 + x + 1) + (x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{x^3 - 1}$$

$$= \frac{(x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)}{x^2 - 1} \cdot \frac{x^2 - 1}{(x - 1)(x^2 + x + 1)}$$

$$= \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$$

$$b) P = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} = \frac{x(x - 1) + 1}{x - 1} = x + \frac{1}{x - 1}$$

$$\text{Để } P \in \mathbb{Z} \text{ thì } \frac{1}{x - 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x - 1 \in U(1) = \{1; -1\}$$

+) Với $x - 1 = 1$ thì $x = 2$ (TMĐKXĐ)

+) Với $x - 1 = -1$ thì $x = 0$ (TMĐKXĐ)

Vậy P nguyên khi $x \in \{2; 0\}$.

Câu 2 (6,0 điểm)

a) Phân tích đa thức sau thành nhân tử: $x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$.

b) Cho n là số nguyên dương, chứng minh rằng $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225.

c) Đa thức $f(x)$ chia cho $x + 1$ dư 4, chia cho $x^2 + 1$ dư $2x + 3$. Tìm phần dư khi chia $f(x)$ cho $(x + 1)(x^2 + 1)$.

d) Chứng minh rằng tổng hai số chính phương liên tiếp cộng với tích của chúng là một số chính phương lẻ.

Giải:

$$a) x(x + 4)(x + 6)(x + 10) + 128$$

$$= [x(x + 10)] \cdot [(x + 4)(x + 6)] + 128$$

$$= (x^2 + 10x) \cdot (x^2 + 10x + 24) + 128$$

Đặt $x^2 + 10x = a$, ta có:

$$a(a + 24) + 128$$

$$= a^2 + 24a + 128$$

$$= (a + 8)(a + 16)$$

$$= (x^2 + 10x + 8)(x^2 + 10x + 16)$$

$$= (x + 2)(x + 8)(x + 5 + \sqrt{17})(x + 5 - \sqrt{17})$$

b) Với $n = 1$ ta có: $16 - 15 - 1 = 0 \div 225$

Giả sử bài toán đúng với $n = k$ tức là ta có:

$$16^k - 15k - 1 \div 225$$

Ta chứng minh bài toán đúng với $n = k + 1$

$$\begin{aligned}\text{Thật vậy: } 16^{k+1} - 15(k+1) - 1 &= 16 \cdot 16^k - 15k - 15 - 1 \\ &= 16^k (15 + 1) - 15k - 15 - 1 \\ &= (16^k - 15k - 1) + 15(15^k - 1) \\ &= (16^k - 15k - 1) + 225 \cdot A(k) \div 225\end{aligned}$$

Vậy $16^n - 15n - 1$ chia hết cho 225 với mọi n là số nguyên dương.

c) Theo định lí Bê-du ta có: $f(x)$ chia $x+1$ dư 4 $\Rightarrow f(-1)=4$

Do bậc đa thức chia $(x+1)(x^2+1)$ là 3 nên đa thức dư có dạng $ax^2 + bx + c$

Gọi thương là Q , ta có:

$$\begin{aligned}f(x) &= (x+1)(x^2+1)Q + ax^2 + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1)Q + ax^2 + a - a + bx + c \\ &= (x+1)(x^2+1)Q + a(x^2+1) - a + bx + c \\ &= [(x+1)Q + a](x^2+1) + bx + c - a\end{aligned}$$

$$\text{Vì } f(x) \text{ chia } x^2+1 \text{ dư } 2x+3 \Rightarrow \begin{cases} b=2 \\ c-a=3 \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Mặt khác } f(-1)=4 \Rightarrow a - b + c = 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{3}{2} \\ b = 2 \\ c = \frac{9}{2} \end{cases}$$

$$\text{Vậy đa thức dư là: } \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{9}{2}.$$

d) Gọi hai số chính phương liên tiếp đó là k^2 và $(k+1)^2$.

Ta có: $k^2 + (k+1)^2 + k^2 \cdot (k+1)^2 = k^4 + 2k^3 + 3k^2 + 2k + 1 = (k^2 + k + 1)^2 = [k(k+1) + 1]^2$ là số chính phương. (1)

Vì $k(k+1)$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp nên $k(k+1)$ chẵn $\Rightarrow k(k+1) + 1$ lẻ $\Rightarrow [k(k+1) + 1]^2$ lẻ (2)

Từ (1) và (2) suy ra đpcm.

Câu 3 (5,0 điểm)

a) Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy$.

b) Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1}$.

c) Cho ba số x, y, z đôi một khác nhau, thỏa mãn $x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$ và $xyz \neq 0$.

$$\text{Tính giá trị của biểu thức: } B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y}.$$

Giải:

$$\text{a) } x^2 + y^2 + 5x^2y^2 + 60 = 37xy.$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy = 35xy - 5x^2y^2 - 60$$

$$\Leftrightarrow (x-y)^2 = 5(3-xy)(xy-4) \quad (1)$$

$$\text{Vì } (x-y)^2 \geq 0 \text{ nên } 5(3-xy)(xy-4) \geq 0 \Leftrightarrow 3 \leq xy \leq 4 \Leftrightarrow xy \in \{3; 4\}$$

$$\text{Đẳng thức (1) xảy ra} \Leftrightarrow \begin{cases} xy=4 \\ x,y \in \mathbb{Z} \\ x=y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \\ x=-2 \\ y=-2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x,y) \in \{(2;2);(-2;-2)\}$$

$$\text{b) } C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{2(x^2 + 1) + (x^2 - 2x + 1)}{x^2 + 1} = 2 + \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1} \geq 2$$

$$\text{Vậy min } C = 2 \Leftrightarrow x = 1$$

$$C = \frac{3x^2 - 2x + 3}{x^2 + 1} = \frac{4(x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1)}{x^2 + 1} = 4 - \frac{(x+1)^2}{x^2 + 1} \leq 4$$

$$\text{Vậy max } C = 4 \Leftrightarrow x = -1$$

$$\text{c) } x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz \quad (x \neq y \neq z; xyz \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow (x+y)^3 - 3xy(x+y) + z^3 - 3xyz = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)^3 - 3z(x+y)(x+y+z) - 3xy(x+y+z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} (x+y+z)[(x-y)^2 + (y-z)^2 + (z-x)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y=0 \\ y-z=0 \\ z-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=-z \\ y+z=-x \\ z+x=-y \\ x=y=z \end{cases} \quad (\text{loại, vì } x \neq y \neq z)$$

$$\text{Vậy } B = \frac{16(x+y)}{z} + \frac{3(y+z)}{x} - \frac{2038(z+x)}{y} = \frac{16(-z)}{z} + \frac{3(-x)}{x} - \frac{2038(-y)}{y} = (-16) + (-13) + 2038 = 2019.$$

Câu 4 (7,0 điểm)

4.1: Cho hình vuông ABCD. Gọi E là một điểm trên cạnh BC. Qua A kẻ tia Ax vuông góc với AE, Ax cắt CD tại F. Trung tuyến AI của tam giác AEF cắt CD ở K. Đường thẳng kẻ qua E, song song với AB cắt AI ở G. Chứng minh:

a) Tứ giác EGFK là hình thoi.

b) $AF^2 = FK \cdot FC$

c) Chu vi tam giác EKC không đổi khi E thay đổi trên BC.

4.2: Cho tam giác ABC vuông tại A có $AB = c$, $AC = b$ và đường phân giác của góc A là AD = d. Chứng minh rằng: $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d}$.

Giải:

4.1:

a)

Xét $\triangle ABE$ và $\triangle ADF$ có:

$$\angle ABE = \angle ADF (=90^\circ)$$

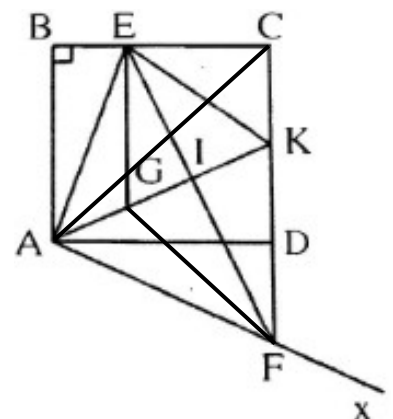
$$AB = AD \quad (\text{ABCD là hình vuông})$$

$$\angle BAE = \angle DAF \quad (\text{cùng phụ } \angle EAF)$$

$$\text{Do đó } \triangle ABE = \triangle ADF \quad (\text{g-c-g})$$

$$\Rightarrow AE = AF$$

$$\Rightarrow \triangle AEF \text{ vuông cân tại A}$$



Mà AI là trung tuyến của $\triangle AEF$

$\Rightarrow$ AI cũng là đường cao của $\triangle AEF$

$\Rightarrow AI \perp EF$ hay $GK \perp EF$

Xét $\triangle IEG$ và $\triangle IFK$ có:

$\angle IEG = \angle IFK$ (đối đỉnh)

$IE = IF$ (gt)

$\angle IEG = \angle IFK$ (so le trong)

Do đó $\triangle IEG = \triangle IFK$ (g-c-g)

$\Rightarrow IG = IK$

Tứ giác EGFK có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm mỗi đường ($IE=IF$ (gt); $IG=IK$ (cmt)) đồng thời vuông góc với nhau ($GK \perp EF$) nên là hình thoi.

b) Xét $\triangle AFK$ và $\triangle CAF$ có:

$\angle KAF = \angle FCA$ ($=45^\circ$)

$\hat{F}$: góc chung

Do đó $\triangle AFK \sim \triangle CAF$ (g-g)

$$\Rightarrow \frac{AF}{CF} = \frac{KF}{AF} \Rightarrow AF^2 = KF \cdot CF.$$

c) Đặt a là độ dài cạnh hình vuông ABCD $\Rightarrow$ a không đổi

$\triangle ABE = \triangle ADF$ (theo a) $\Rightarrow BE = DF$

Ta có: EGFK là hình thoi (theo a) nên $KE = KF = KD + DF = KD + BE$

Chu vi $\triangle EKC$ là: $C_{EKC} = KC + EK + EC = KC + KD + BE + CE = CD + BE = 2a$ không đổi.

4.2:

Kẻ $DE \perp AB$ ($E \in AB$); $DF \perp AC$ ($F \in AC$)

Dễ thấy AEDF là hình chữ nhật

Mà AD là tia phân giác $\angle BAC$

Nên AEDF là hình vuông

Biến đổi qua Pi-ta-go ta được:

$$DE = DF = \frac{AD}{\sqrt{2}}$$

Vì $AB \parallel DF$ (cùng vuông góc với AC)

$\Rightarrow \triangle DFC \sim \triangle BAC$ (tính chất đồng dạng)

$$\Rightarrow \frac{DF}{AB} = \frac{CD}{BC} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự chứng minh } \frac{DE}{AC} = \frac{BD}{CD} \quad (2)$$

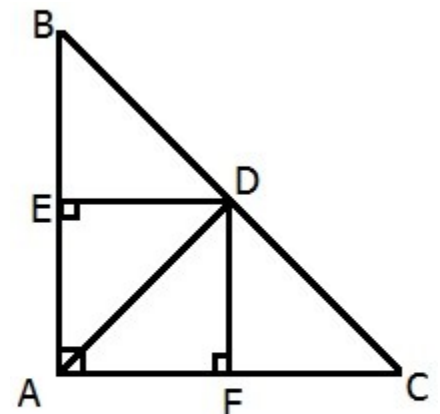
Cộng hai vế tương ứng của (1) và (2) ta được: $\frac{DF}{AB} + \frac{DE}{AC} = \frac{CD+BD}{BC}$

$$\Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}} + \frac{AD}{\sqrt{2}} = \frac{BC}{BC} \Rightarrow \frac{AD}{\sqrt{2}} \left(\frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} \right) = 1 \Rightarrow \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{AD} \Rightarrow \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{\sqrt{2}}{d} \quad (\text{đpcm})$$

Câu 5 (1,0 điểm)

Cho các số dương a,b,c thỏa mãn $a + b + c = 1$. Chứng minh:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$



Giải:

Áp dụng hệ quả bất đẳng thức Bu-nhi-a Cốp-xki, ta có:

$$\frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} = \frac{a}{2b+c} + \frac{b}{2c+a} + \frac{c}{2a+b} = \frac{a^2}{2ab+ac} + \frac{b^2}{2bc+ab} + \frac{c^2}{2ac+bc} \geq \frac{(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ac)}$$

Ta chứng minh

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &\geq 3(ab+bc+ca) \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca &\geq 3ab + 3bc + 3ca \\ \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca &\geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2] &\geq 0 \text{ (luôn đúng)} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{1+b-a} + \frac{b}{1+c-b} + \frac{c}{1+a-c} \geq 1$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra } \Leftrightarrow \begin{cases} a=b=c \\ a+b+c=1 \\ a,b,c>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$$