

MỤC LỤC

▶ BÀI 1. CÁC QUY TẮC TÍNH ĐẠO HÀM.....2

.....(A). Tóm tắt kiến thức
2

.....(B). Phân dạng toán cơ bản
5

- Dạng 1: Đạo hàm của hàm số.....5
- Dạng 2: Đạo hàm của hàm số.....5
- Dạng 3: Đạo hàm của hàm số lượng giác.....6
- Dạng 4: Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit.....6
- Dạng 5: Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số.....7
- Dạng 6: Đạo hàm của hàm hợp.....8
- Dạng 7: Đạo hàm cấp hai.....9

.....(C). Dạng toán rèn luyện
10

- Dạng 1: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....10
- Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....34
- Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....48

A. Tóm tắt kiến thức

- ✓ Từ định nghĩa đạo hàm ta có:

- ✓ $(c)' = 0 \quad (c = \text{const});$

- ✓ $(x)' = 1, \forall x \in \mathbb{R}$

1. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $y = x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$

- ✓ Hàm số $y = x^n \ (n \in \mathbb{N}^*)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

2. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ $y = \sqrt{x}$

- ✓ Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ LƯỢNG GIÁC

$$\frac{\sin x}{x} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.}$$

- ✍ **Chú ý:** Giới hạn của

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$$

- ✓ Nếu $y = \sin x$ thì

✍ **a) Đạo hàm của hàm số**

- ✓ Hàm số $y = \sin x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\sin x)' = \cos x}$.

- ✓ Đối với hàm số hợp $y = \sin u \quad u = u(x)$ và $y = \cos x$ ta có $\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u}$.

✍ **b) Đạo hàm của hàm số**

- ✓ Hàm số $y = \cos x$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$.

- ✓ Đối với hàm số hợp $y = \cos u \quad u = u(x)$ và ta có $\boxed{(\cos u)' = -u' \sin u}$.

$$y = \tan x$$

✍ c) Đạo hàm của hàm số

✓ Hàm số $y = \tan x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

✓ Đối với hàm số hợp $y = \tan u$ và $u = u(x)$ ta có $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$.

✍ d) Đạo hàm của hàm số $y = \cot x$

✓ Hàm số $y = \cot x$ có đạo hàm tại mọi $x \neq k\pi$ và $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

✓ Đối với hàm số hợp $y = \cot u$ và $u = u(x)$ ta có $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$.

4. ĐẠO HÀM CỦA HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

✍ Cho biết:

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

✓ +) Nếu $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ thì $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{e^{u(x)} - 1}{u(x)} = 1$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\ln[1+u(x)]}{u(x)} = 1$.

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\ln a \cdot \frac{e^{x \ln a} - 1}{x \ln a} \right) = \ln a$

✓ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x \ln a} = \frac{1}{\ln a}$

✓ $(e^x)' = e^x$ $(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$

✓ $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

5. ĐẠO HÀM CỦA TỔNG, HIỆU, TÍCH, THƯƠNG CỦA HAI HÀM SỐ

✓ Giả sử các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng $(a; b)$. Khi đó

✓ $(u + v)' = u' + v'$; $(u - v)' = u' - v'$;

✓ $(uv)' = u'v + uv'$; $(ku)' = ku' (k = \text{const})$;

6. ĐẠO HÀM CỦA HÀM HỢP

a) Khái niệm hàm số hợp

- Giả sử $u = g(x)$ là hàm số xác định trên khoảng $(a; b)$, có tập giá trị chứa khoảng $(c; d)$ và $y = f(u)$ là hàm số xác định trên $(c; d)$.
- Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm số hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.

b) Đạo hàm của hàm số hợp

- Nếu hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm u'_x tại x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm y'_u tại u thì hàm số hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm y'_x tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.
- Từ đó ta có các kết quả sau:
- $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{N}, n > 1);$
- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} \quad (u > 0).$

BẢNG ĐẠO HÀM

$(x^n)' = nx^{n-1}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$ $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$ $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$ $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
$(e^x)' = e^x$ $(a^x)' = a^x \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(e^u)' = u' \cdot e^u$ $(a^u)' = u' \cdot a^u \ln a \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ $(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a > 0 \text{ và } a \neq 1)$

7. ĐẠO HÀM CẤP HAI

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi điểm $x \in (a; b)$.
- ✓ Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của $y' = f'(x)$ là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu là y'' hoặc $f''(x)$.
- ✓ Khi đó: $(f'(x))' = f''(x)$.

8. Ý NGHĨA CƠ HỌC CỦA ĐẠO HÀM CẤP HAI

- ✓ Một chuyển động có phương trình $s = f(t)$ thì đạo hàm cấp hai (nếu có) của hàm số $s = f(t)$ là gia tốc tức thời của chuyển động $s = s(t)$ tại thời

B. Phân dạng toán cơ bản

• Dạng 1: Đạo hàm của hàm số $y = x^n, n \in \mathbb{N}^*$

Phương pháp

- ✓ Hàm số $y = x^n$ với $n \in \mathbb{N}^*$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^5$ tại điểm $x = 2$ và $x = -\frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có $(x^5)' = 5x^4$. Từ đó, $y'(2) = 5 \cdot 2^4 = 80$ và $y'\left(-\frac{1}{2}\right) = 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{5}{16}$.

• Dạng 2: Đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$

Phương pháp

- ✓ Hàm số $y = \sqrt{x}$ có đạo hàm trên khoảng $(0; +\infty)$ và $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x}$ tại điểm $x = 1$ và $x = \frac{1}{4}$.

Lời giải

Ta có $y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$. Từ đó, $y'(1) = \frac{1}{2\sqrt{1}} = \frac{1}{2}$ và $y'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{\frac{1}{4}}} = \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = 1$.

Câu 2: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ tại điểm $x = 8$.

Lời giải

Với $x > 0$, ta có $y' = (\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$.

$$y'(8) = \frac{1}{3\sqrt[3]{8^2}} = \frac{1}{3(\sqrt[3]{2^3})^2} = \frac{1}{3 \cdot 2^2} = \frac{1}{12}$$

Từ đó,

•Dạng ③: Đạo hàm của hàm số lượng giác

 **Phương pháp**

✓ Ta có công thức đạo hàm của các hàm số lượng giác sau:

✓ $(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$

✓ $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x} \left(x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right)$ $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} (x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z})$

 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số $y = \cos x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$.

Lời giải

Ta có $y' = (\cos x)' = -\sin x$. Vậy $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sin \frac{\pi}{6} = -\frac{1}{2}$.

•Dạng ④: Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số lôgarit

 **Phương pháp**

✓ Ta có công thức đạo hàm của các hàm số mũ và hàm số lôgarit sau:

✓ $(e^x)' = e^x$

✓ $(a^x)' = a^x \ln a (a > 0, a \neq 1)$

✓ $(\ln x)' = \frac{1}{x} (x > 0)$

✓ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a} (x > 0, a > 0, a \neq 1)$

 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Tìm đạo hàm của các hàm số:

a) $y = e^x$ tại $x = 2 \ln 3$;

b) $y = \log_5 x$ tại $x = 2$.

Lời giải

a) Ta có $y' = (e^x)' = e^x$. Từ đó, $y'(2 \ln 3) = e^{2 \ln 3} = (e^{\ln 3})^2 = 3^2 = 9$.

b) Ta có $y' = (\log_5 x)' = \frac{1}{x \ln 5} (x > 0)$. Từ đó, $y'(2) = \frac{1}{2 \ln 5}$.

•Dạng 5: Đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương của hai hàm số

Phương pháp

✓ Cho hai hàm số $u(x), v(x)$ có đạo hàm tại điểm x thuộc tập xác định. Ta có:

✓ $(u + v)' = u' + v'$

✓ $(u - v)' = u' - v'$

✓ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$

✓ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$)

Chú ý:

✓ Với $u = C$ (C là hằng số), công thức (1) trở thành $(C \cdot v)' = C \cdot v'$.

✓ Với $u = 1$, công thức (2) trở thành $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$ (với $v = v(x) \neq 0$).

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = 3x^2 - 4x + 2$

b) $y = x \sin x$;

c) $y = \frac{3x+2}{2x-1}$

Lời giải

a) $(3x^2 - 4x + 2)' = (3x^2)' - (4x)' + (2)' = 3(x^2)' - 4(x)' + 0 = 3 \cdot 2x - 4 \cdot 1 = 6x - 4$.

b) $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = 1 \cdot \sin x + x \cdot \cos x = \sin x + x \cos x$.

c) $\left(\frac{3x+2}{2x-1}\right)' = \frac{(3x+2)' \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot (2x-1)'}{(2x-1)^2} = \frac{3 \cdot (2x-1) - (3x+2) \cdot 2}{(2x-1)^2}$
 $= \frac{6x - 3 - 6x - 4}{(2x-1)^2} = -\frac{7}{(2x-1)^2}$.

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

a) $y = x^2 3^x$

$$b) y = \frac{\sqrt{x}}{\cos x}$$

Lời giải

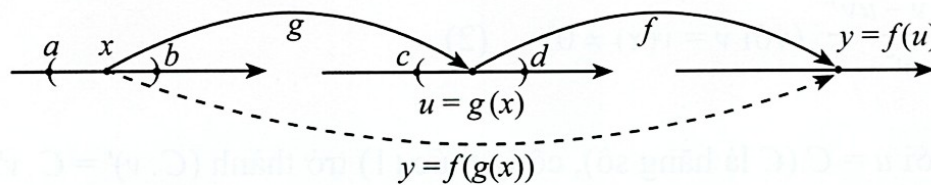
$$a) (x^2 3^x)' = (x^2)' \cdot 3^x + x^2 \cdot (3^x)' = 2x \cdot 3^x + x^2 \cdot 3^x \ln 3 = x 3^x (2 + x \ln 3)$$

$$b) \left(\frac{\sqrt{x}}{\cos x} \right)' = \frac{(\sqrt{x})' \cos x - \sqrt{x} \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos x + 2x \sin x}{2\sqrt{x} \cos^2 x}$$

•Dạng 6: Đạo hàm của hàm hợp

✍ Phương pháp

- ✓ Cho $u = g(x)$ là hàm số của x xác định trên khoảng $(a; b)$ và lấy giá trị trên khoảng $(c; d)$; $y = f(u)$ là hàm số của u xác định trên khoảng $(c; d)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$.
- ✓ Ta lập hàm số xác định trên $(a; b)$ và lấy giá trị trên $\mathbb{R}$ theo quy tắc sau:
 $x \mapsto f(g(x))$
- ✓ Hàm số $y = f(g(x))$ được gọi là hàm hợp của hàm số $y = f(u)$ với $u = g(x)$.



Hình 1

- ✓ Cho hàm số $u = g(x)$ có đạo hàm tại x là u'_x và hàm số $y = f(u)$ có đạo hàm tại u là y'_u thì hàm hợp $y = f(g(x))$ có đạo hàm tại x là $y'_x = y'_u \cdot u'_x$.

📖 Các ví dụ minh họa

Câu 1: a) Hàm số $y = (2x+1)^3$ là hàm hợp của các hàm số nào?

b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của các hàm số nào?

Lời giải

a) Hàm số $y = (2x+1)^3$ là hàm hợp của hàm số $y = u^3$ với $u = 2x+1$.

b) Hàm số $y = \cos(x^2 + 1)$ là hàm hợp của hàm số $y = \cos u$ với $u = x^2 + 1$.

Câu 2: Tính đạo hàm của các hàm số sau:

$$a) y = (3x^2 + x)^3;$$

$$b) y = \sin 2x;$$

c) $y = e^{x^2+1}$.

Lời giải

a) Đặt $u = 3x^2 + x$ thì $y = u^3$. Ta có $u'_x = 6x + 1$ và $y'_u = (u^3)' = 3u^2$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = 3u^2 \cdot (6x + 1) = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$.

Vậy $y' = 3(3x^2 + x)^2 \cdot (6x + 1)$.

b) Đặt $u = 2x$ thì $y = \sin u$. Ta có $u'_x = 2$ và $y'_u = (\sin u)' = \cos u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = \cos u \cdot 2 = 2 \cos 2x$.

Vậy $y' = 2 \cos 2x$.

c) Đặt $u = x^2 + 1$ thì $y = e^u$. Ta có $u'_x = 2x$ và $y'_u = (e^u)' = e^u$.

Suy ra $y'_x = y'_u \cdot u'_x = e^u \cdot 2x = 2xe^{x^2+1}$.

Vậy $y' = 2xe^{x^2+1}$.

•Dạng 7: Đạo hàm cấp hai

Phương pháp

- ✓ Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm $y' = f'(x)$ tại mọi $x \in (a; b)$.
- ✓ Nếu hàm số $y' = f'(x)$ lại có đạo hàm tại x thì ta gọi đạo hàm của y' là đạo hàm cấp hai của hàm số $y = f(x)$ tại x , kí hiệu y'' hoặc $f''(x)$.
-  **Ý nghĩa cơ học của đạo hàm cấp hai**
- ✓ Đạo hàm cấp hai $f''(t)$ là gia tốc tức thời tại thời điểm t của vật chuyển động có phương trình $s = f(t)$.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Tính đạo hàm cấp hai của các hàm số:

a) $y = 3x^2 + 5x + 1$

b) $y = \sin x$.

Lời giải

a) $y' = 3 \cdot 2x + 5 + 0 = 6x + 5, y'' = 6 \cdot 1 + 0 = 6$.

b) $y' = \cos x; y'' = -\sin x$.

Câu 2: Một vật chuyển động thẳng không đều xác định bởi phương trình $s(t) = t^2 - 4t + 3$, trong đó s tính bằng mét và t là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$.

Lời giải

Ta có $s'(t) = 2t - 4; s''(t) = 2$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 4$ là $s''(4) = 2 \text{ m/s}^2$.

©. Dạng toán rèn luyện

•Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hàm số $y = \frac{4}{x-1}$. Khi đó $y'(-1)$ bằng
A. -1. **B.** -2. **C.** 2. **D.** 1.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = -\frac{4}{(x-1)^2} \Rightarrow y'(-1) = -1$.

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \frac{2x+7}{x+4}$ tại $x=2$ ta được:

A. $f'(2) = \frac{1}{36}$. **B.** $f'(2) = \frac{11}{6}$. **C.** $f'(2) = \frac{3}{2}$. **D.** $f'(2) = \frac{5}{12}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $f'(x) = \frac{1}{(x+4)^2} \Rightarrow f'(2) = \frac{1}{36}$.

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số $y = x(x+1)(x+2)(x+3)$ tại điểm $x_0 = 0$ là:

A. $y'(0) = 5$. **B.** $y'(0) = 6$. **C.** $y'(0) = 0$. **D.** $y'(0) = -6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = x(x+1)(x+2)(x+3) = (x^2+x)(x^2+5x+6)$

$\Rightarrow y' = (2x+1)(x^2+5x+6) + (x^2+x)(2x+5)$

$\Rightarrow y'(0) = 6$.

Câu 4: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sqrt{x} + x$ tại điểm $x_0 = 4$ là:

- A. $y'(4) = \frac{9}{2}$. B. $y'(4) = 6$. C. $y'(4) = \frac{3}{2}$. D. $y'(4) = \frac{5}{4}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1 \Rightarrow y'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} + 1 = \frac{5}{4}$.

Câu 5: Đạo hàm của hàm số $y = 5 \sin x - 3 \cos x$ tại $x_0 = \frac{\pi}{2}$ là:

- A. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$. B. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. D. $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -5$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 5 \cos x + 3 \sin x \Rightarrow y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Câu 6: Cho hàm số $y = \frac{x+2}{x-1}$. Tính $y'(3)$

- A. $\frac{5}{2}$. B. $-\frac{3}{4}$. C. $-\frac{3}{2}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y = \frac{x+2}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-3}{(x-1)^2}$

$y'(3) = \frac{-3}{(3-1)^2} = -\frac{3}{4}$.

Câu 7: Cho hàm số $f(x) = \frac{3x+1}{\sqrt{x^2+4}}$. Tính giá trị biểu thức $f'(0)$.

- A. -3 . B. -2 . C. $\frac{3}{2}$. D. 3 .

Lời giải

Chọn C

Cách 1: Tập xác định $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{3\sqrt{x^2+4} - (3x+1) \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}}{(\sqrt{x^2+4})^2} = \frac{12-x}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$$

$$\Rightarrow f'(0) = \frac{3}{2}$$

Câu 8: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^3 + 2x + 1$.

- A.** $y' = 3x^2 + 2x$. **B.** $y' = 3x^2 + 2$. **C.** $y' = 3x^2 + 2x + 1$. **D.** $y' = x^2 + 2$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y' = 3x^2 + 2$.

Câu 9: Khẳng định nào sau đây **sai**

- A.** $y = x \Rightarrow y' = 1$. **B.** $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$.
C. $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x$. **D.** $y = x^4 \Rightarrow y' = 4x^3$.

Lời giải

Chọn C

+) Ta có: $y = x^n \Rightarrow y' = n \cdot x^{n-1}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ do đó các mệnh đề A, B, D đúng.

Vì $y = x^5 \Rightarrow y' = 5x^4$ nên mệnh đề C sai.

Câu 10: Đạo hàm của hàm số $y = -x^3 + 3mx^2 + 3(1 - m^2)x + m^3 - m^2$ (với m là tham số) bằng

- A.** $3x^2 - 6mx - 3 + 3m^2$. **B.** $-x^2 + 3mx - 1 - 3m$.
C. $-3x^2 + 6mx + 1 - m^2$. **D.** $-3x^2 + 6mx + 3 - 3m^2$.

Lời giải

Chọn D

Câu 11: Đạo hàm của hàm số $y = x^4 - 4x^2 - 3$ là

- A.** $y' = -4x^3 + 8x$. **B.** $y' = 4x^2 - 8x$. **C.** $y' = 4x^3 - 8x$. **D.** $y' = -4x^2 + 8x$

Lời giải

Chọn C

$$y' = (x^4 - 4x^2 - 3)' = 4x^3 - 8x$$

Câu 12: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x^4}{2} + \frac{5x^3}{3} - \sqrt{2x} + a^2$ (a là hằng số) bằng.

A. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}} + 2a$.

B. $2x^3 + 5x^2 + \frac{1}{2\sqrt{2x}}$.

C. $2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

D. $2x^3 + 5x^2 - \sqrt{2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $y' = 2x^3 + 5x^2 - \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 13: Hàm số nào sau đây có đạo hàm bằng $\frac{1}{\sqrt{2x}}$?

A. $f(x) = 2\sqrt{x}$.

B. $f(x) = \sqrt{x}$.

C. $f(x) = \sqrt{2x}$.

D. $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có $f'(x) = (\sqrt{2x})' = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

Câu 14: Cho các hàm số $u = u(x), v = v(x)$ có đạo hàm trên khoảng J và $v(x) \neq 0$ với $\forall x \in J$. Mệnh đề nào sau đây **sai**?

A. $[u(x) + v(x)]' = u'(x) + v'(x)$.

B. $\left[\frac{1}{v(x)}\right]' = \frac{v'(x)}{v^2(x)}$.

C. $[u(x).v(x)]' = u'(x).v(x) + v'(x).u(x)$.

D. $\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]' = \frac{u'(x).v(x) - v'(x).u(x)}{v^2(x)}$.

Lời giải

Chọn B

Câu 15: Tính đạo hàm của hàm số $y = x^2 - \frac{1}{x}$.

A. $y' = 2x - \frac{1}{x^2}$.

B. $y' = x - \frac{1}{x^2}$.

C. $y' = x + \frac{1}{x^2}$.

D. $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Có $y' = 2x + \frac{1}{x^2}$.

Câu 16: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x}{x-1}$

A. $y' = \frac{2}{(x-1)^2}$

B. $y' = \frac{2}{(x-1)}$

C. $y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$

D. $y' = \frac{-2}{(x-1)}$

Lời giải

Chọn C

$$y = \frac{2x}{x-1} \Rightarrow y' = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

Câu 17: Hàm số $y = \frac{1}{x^2+5}$ có đạo hàm bằng:

A. $y' = \frac{1}{(x^2+5)^2}$

B. $y' = \frac{2x}{(x^2+5)^2}$

C. $y' = \frac{-1}{(x^2+5)^2}$

D. $y' = \frac{-2x}{(x^2+5)^2}$

Lời giải

Chọn D

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+5)^2}$$

Câu 18: Cho hàm số $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$. Tìm x để $f'(x) > 0$?

A. $-1 < x < 0$

B. $x < 0$

C. $x > 0$

D. $x < -1$

Lời giải

Chọn C

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow 4x^3 + 4x > 0 \Leftrightarrow 4x(x^2 + 1) > 0 \Leftrightarrow x > 0$$

Câu 19: Cho hàm số $u(x)$ có đạo hàm tại x là u' . Khi đó đạo hàm của hàm số $y = \sin^2 u$ tại x là

A. $y' = \sin 2u$

B. $y' = u' \sin 2u$

C. $y' = 2 \sin 2u$

D. $y' = 2u' \sin 2u$

Lời giải

Chọn B

$$\text{Ta có } y' = (\sin^2 u)' = 2 \sin u \cdot (\sin u)' = 2 \sin u \cdot \cos u \cdot u' = u' \sin 2u$$

Câu 20: Tính đạo hàm của hàm số $y = \sin 2x - \cos x$

A. $y' = 2 \cos x + \sin x$

B. $y' = \cos 2x + \sin x$

C. $y' = 2 \cos 2x + \sin x$

D. $y' = 2 \cos x - \sin x$

Lời giải

Chọn C

$$y = \sin 2x - \cos x \Rightarrow y' = 2\cos 2x + \sin x$$

Câu 21: Đạo hàm của hàm số $y = 4\sin 2x + 7\cos 3x + 9$ là

A. $8\cos 2x - 21\sin 3x + 9$

B. $8\cos 2x - 21\sin 3x$

C. $4\cos 2x - 7\sin 3x$

D. $4\cos 2x + 7\sin 3x$

Lời giải**Chọn B**

Ta có: $y' = 8\cos 2x - 21\sin 3x$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin x + \cos x + 3$ là:

A. $f'(x) = \sin x - \cos x$

B. $f'(x) = \cos x + \sin x + 3$

C. $f'(x) = \cos x - \sin x$

D. $f'(x) = -\sin x - \cos x$

Lời giải**Chọn C**

Câu 23: Đạo hàm của hàm số $y = \cos 2x + 1$ là

A. $y' = -\sin 2x$

B. $y' = 2\sin 2x$

C. $y' = -2\sin 2x + 1$

D. $y' = -2\sin 2x$

Lời giải**Chọn D**

Ta có $y = \cos 2x + 1 \Rightarrow y' = (\cos 2x + 1)' = - (2x)' \sin 2x + (1)' = -2\sin 2x$

Câu 24: Đạo hàm của hàm số $y = \cos(2x + 1)$ là:

A. $y' = 2\sin(2x + 1)$

B. $y' = -2\sin(2x + 1)$

C. $y' = -\sin(2x + 1)$

D. $y' = \sin(2x + 1)$

Lời giải**Chọn B**

$$y = \cos(2x + 1) \Rightarrow y' = - (2x + 1)' \cdot \sin(2x + 1) = -2\sin(2x + 1)$$

Câu 25: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sin^2 x$ là:

A. $f'(x) = 2\sin x$

B. $f'(x) = 2\cos x$

C. $f'(x) = -\sin(2x)$

D. $f'(x) = \sin(2x)$

Lời giải**Chọn D**

$$f'(x) = 2\sin x \cdot (\sin x)' = 2\sin x \cdot \cos x = \sin 2x$$

Câu 26: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \tan x$

- A. $y' = -\frac{1}{\cos^2 x}$. B. $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$. C. $y' = \cot x$. D. $y' = -\cot x$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $y = \tan x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

Câu 27: Tính đạo hàm của hàm số $y = x \sin x$

- A. $y' = \sin x - x \cos x$. B. $y' = x \sin x - \cos x$. C. $y' = \sin x + x \cos x$. D. $y' = x \sin x + \cos x$.

Lời giải

Chọn C

Áp dụng công thức tính đạo hàm của một tích $(u.v)' = u'v + v'u$ ta có
 $(x \sin x)' = (x)' \sin x + x(\sin x)' = \sin x + x \cos x$

Vậy $y = x \sin x \Rightarrow y' = \sin x + x \cos x$

Câu 28: Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $\mathbb{R}$. C. $[0; +\infty)$. D. $(0; +\infty)$.

Lời giải

Chọn B

Tập xác định của hàm số $y = 8^x$ là $\mathbb{R}$

Câu 29: Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là

- A. $[0; +\infty)$. B. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Tập xác định của hàm số $y = 6^x$ là $D = \mathbb{R}$.

Câu 30: Tập xác định của hàm số $y = 7^x$ là

- A. $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. B. $[0; +\infty)$. C. $(0; +\infty)$. D. $\mathbb{R}$.

Lời giải

Chọn D

Câu 31: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \log x$.

- A. $y' = \frac{\ln 10}{x}$. B. $y' = \frac{1}{x \ln 10}$. C. $y' = \frac{1}{10 \ln x}$. D. $y' = \frac{1}{x}$.

Lời giải

Chọn B

Áp dụng công thức $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$, ta được $y' = \frac{1}{x \ln 10}$.

Câu 32: Hàm số $y = 2^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $2^{x^2-x} \cdot \ln 2$. B. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.
C. $(x^2-x) \cdot 2^{x^2-x-1}$. D. $(2x-1) \cdot 2^{x^2-x}$.

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (x^2-x)' \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2 = (2x-1) \cdot 2^{x^2-x} \cdot \ln 2$.

Câu 33: Hàm số $y = 3^{x^2-x}$ có đạo hàm là

- A. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x}$. B. $(x^2-x) \cdot 3^{x^2-x-1}$. C. $(2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$. D. $3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a$ nên $(3^{x^2-x})' = (2x-1) \cdot 3^{x^2-x} \cdot \ln 3$.

Câu 34: Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$

- A. $y' = \frac{13^x}{\ln 13}$ B. $y' = x \cdot 13^{x-1}$ C. $y' = 13^x \ln 13$ D. $y' = 13^x$

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = 13^x \ln 13$.

Câu 35: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_2(2x+1)$.

- A. $y' = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$ B. $y' = \frac{1}{(2x+1) \ln 2}$ C. $y' = \frac{2}{2x+1}$ D. $y' = \frac{1}{2x+1}$

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (\log_2(2x+1))' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1) \ln 2} = \frac{2}{(2x+1) \ln 2}$.

Câu 36: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$

A. $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
B. $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$
C. $y' = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$
D. $y' = \frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:
$$y' = \frac{(x+1)' \cdot 4^x - (x+1) \cdot (4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{4^x - (x+1) \cdot 4^x \cdot \ln 4}{(4^x)^2}$$

$$= \frac{4^x \cdot (1 - x \cdot \ln 4 - \ln 4)}{(4^x)^2} = \frac{1 - x \cdot 2 \ln 2 - 2 \ln 2}{4^x} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$$

Câu 37: Hàm số $f(x) = \log_2(x^2 - 2x)$ có đạo hàm

A. $f'(x) = \frac{\ln 2}{x^2 - 2x}$
B. $f'(x) = \frac{1}{(x^2 - 2x)\ln 2}$
C. $f'(x) = \frac{(2x - 2)\ln 2}{x^2 - 2x}$
D. $f'(x) = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$

Lời giải

Chọn D

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$$

Câu 38: Hàm số $y = 2^{x^2 - 3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x - 3)2^{x^2 - 3x} \ln 2$
B. $2^{x^2 - 3x} \ln 2$
C. $(2x - 3)2^{x^2 - 3x}$
D. $(x^2 - 3x)2^{x^2 - 3x + 1}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = (2^{x^2 - 3x})' = (2x - 3)2^{x^2 - 3x} \ln 2$$

Câu 39: Hàm số $y = 3^{x^2 - 3x}$ có đạo hàm là

A. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2 - 3x}$
B. $3^{x^2 - 3x} \cdot \ln 3$
C. $(x^2 - 3x) \cdot 3^{x^2 - 3x - 1}$
D. $(2x - 3) \cdot 3^{x^2 - 3x} \cdot \ln 3$

Lời giải

Chọn D

Ta có: $y' = (3^{x^2-3x})' = (2x-3) \cdot 3^{x^2-3x} \cdot \ln 3$

Câu 40: Tính đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + \sqrt{x+1})$

A. $y' = \frac{1}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$

B. $y' = \frac{2}{\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$

C. $y' = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$

D. $y' = \frac{1}{1 + \sqrt{x+1}}$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y' = (\ln(1 + \sqrt{x+1}))' = \frac{(1 + \sqrt{x+1})'}{1 + \sqrt{x+1}} = \frac{1}{2\sqrt{x+1}(1 + \sqrt{x+1})}$$

Câu 41: Đạo hàm của hàm số $y = e^{1-2x}$ là

A. $y' = 2e^{1-2x}$

B. $y' = -2e^{1-2x}$

C. $y' = -\frac{e^{1-2x}}{2}$

D. $y' = e^{1-2x}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = e^{1-2x} \cdot (1-2x)' = -2e^{1-2x}$$

Câu 42: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3(x^2 + x + 1)$ là:

A. $y' = \frac{(2x+1)\ln 3}{x^2 + x + 1}$

B. $y' = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)\ln 3}$

C. $y' = \frac{2x+1}{x^2 + x + 1}$

D. $y' = \frac{1}{(x^2 + x + 1)\ln 3}$

Lời giải

Chọn B

$$y' = \frac{(x^2 + x + 1)'}{(x^2 + x + 1)\ln 3} = \frac{2x+1}{(x^2 + x + 1)\ln 3}$$

Câu 43: Tính đạo hàm của hàm số $y = e^{x^2+x}$

A. $(2x+1)e^x$

B. $(2x+1)e^{x^2+x}$

C. $(2x+1)e^{2x+1}$

D. $(x^2 + x)e^{2x+1}$

Lời giải

Chọn B

$$(e^{x^2+x})' = e^{x^2+x} \cdot (x^2+x)' = (2x+1)e^{x^2+x}$$

Câu 44: Cho hàm số $f(x) = \log_2(x^2 + 1)$, tính $f'(1)$

A. $f'(1) = 1$. **B.** $f'(1) = \frac{1}{2\ln 2}$. **C.** $f'(1) = \frac{1}{2}$. **D.** $f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$.

Lời giải

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

$$f'(x) = \frac{2x}{(x^2+1) \cdot \ln 2} \Rightarrow f'(1) = \frac{1}{\ln 2}$$

Câu 45: Tìm đạo hàm của hàm số $y = \ln(1 + e^{2x})$.

A. $y' = \frac{-2e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}$. **B.** $y' = \frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$. **C.** $y' = \frac{1}{e^{2x}+1}$. **D.** $y' = \frac{2e^{2x}}{e^{2x}+1}$.

Lời giải

Ta có: $y' = [\ln(1 + e^{2x})]' = \frac{(1 + e^{2x})'}{1 + e^{2x}} = \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$.

Câu 46: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{1-x}{2^x}$

A. $y' = \frac{2-x}{2^x}$. **B.** $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{(2^x)^2}$.
C. $y' = \frac{x-2}{2^x}$. **D.** $y' = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{(1-x)' \cdot 2^x - (2^x)' \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \frac{-1 \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot (1-x)}{(2^x)^2} = \frac{\ln 2 \cdot (x-1) - 1}{2^x}$

Câu 47: Tính đạo hàm của hàm số $y = \log_9(x^2 + 1)$.

A. $y' = \frac{1}{(x^2+1)\ln 9}$. **B.** $y' = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}$. **C.** $y' = \frac{2x \ln 9}{x^2+1}$. **D.** $y' = \frac{2 \ln 3}{x^2+1}$.

Lời giải

$$y' = \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)\ln 9} = \frac{2x}{(x^2+1)\ln 3^2} = \frac{2x}{(x^2+1)2\ln 3} = \frac{x}{(x^2+1)\ln 3}$$

Ta có

Câu 48: Tính đạo hàm hàm số $y = e^x \cdot \sin 2x$

A. $e^x (\sin 2x - \cos 2x)$

B. $e^x \cdot \cos 2x$

C. $e^x (\sin 2x + \cos 2x)$

D. $e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$

Lời giải

Chọn D

$$y' = (e^x \cdot \sin 2x)' = (e^x)' \cdot \sin 2x + e^x \cdot (\sin 2x)' = e^x \cdot \sin 2x + 2e^x \cdot \cos 2x = e^x (\sin 2x + 2 \cos 2x)$$

Câu 49: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+1}{4^x}$ là

A. $\frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

B. $\frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$

C. $\frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

D. $\frac{1 + 2(x+1)\ln 2}{2^{x^2}}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{(x+1)' 4^x - (x+1)(4^x)'}{(4^x)^2} = \frac{1 - 2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$$

Câu 50: Cho hàm số $y = \frac{1}{x+1+\ln x}$ với $x > 0$. Khi đó $-\frac{y'}{y^2}$ bằng

A. $\frac{x}{x+1}$

B. $1 + \frac{1}{x}$

C. $\frac{x}{1+x+\ln x}$

D. $\frac{x+1}{1+x+\ln x}$

Lời giải

$$y = \frac{1}{x+1+\ln x} \Rightarrow \frac{1}{y} = x+1+\ln x \Rightarrow \left(\frac{1}{y}\right)' = (x+1+\ln x)' \Leftrightarrow -\frac{y'}{y^2} = 1 + \frac{1}{x}$$

Câu 51: Tính đạo hàm của hàm số $y = 2^x \ln x - \frac{1}{e^x}$

A. $y' = 2^x \left(\frac{1}{x} + (\ln 2)(\ln x) \right) + \frac{1}{e^x}$

B. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} + e^{-x}$

C. $y' = 2^x \frac{1}{x} \ln 2 + \frac{1}{e^x}$

D. $y' = 2^x \ln 2 + \frac{1}{x} - e^x$

Lời giải

$$y' = 2^x (\ln 2)(\ln x) + \frac{2^x}{x} + \frac{1}{e^x} = \left(\frac{1}{x} + (\ln 2)(\ln x) \right) + \frac{1}{e^x}$$

Ta có

Câu 52: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \log_2 |x^2 - 2x|$ là

- A. $\frac{2x-2}{(x^2-2x)\ln 2}$ B. $\frac{1}{(x^2-2x)\ln 2}$ C. $\frac{(2x-2)\ln 2}{x^2-2x}$ D. $\frac{2x-2}{|x^2-2x|\ln 2}$

Lời giải

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 2x)'}{(x^2 - 2x)\ln 2} = \frac{2x - 2}{(x^2 - 2x)\ln 2}$$

Ta có

Câu 53: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{\ln(\ln x)}$ là:

- A. $f'(x) = \frac{1}{x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$ B. $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{\ln(\ln x)}}$
C. $f'(x) = \frac{1}{2x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$ D. $f'(x) = \frac{1}{\ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$

Lời giải

Chọn C

Áp dụng các công thức $(\ln u)' = \frac{u'}{\ln u}$ và $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ ta có

$$f'(x) = \frac{1}{2x \ln x \sqrt{\ln(\ln x)}}$$

Câu 54: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_2 x$ là:

- A. $y' = \frac{1}{x \ln 2}$ B. $y' = \frac{\ln 2}{x}$ C. $y' = \frac{1}{x}$ D. $y' = \frac{1}{2x}$

Lời giải

Chọn A

Áp dụng quy tắc tính đạo hàm hàm logarit ta có:

$$y' = (\log_2 x)' = \frac{1}{x \ln 2}$$

Câu 55: Trên khoảng $(0; +\infty)$, đạo hàm của hàm số $y = \log_3 x$ là

- A. $y' = \frac{1}{x}$ B. $y' = \frac{1}{x \ln 3}$ C. $y' = \frac{\ln 3}{x}$ D. $y' = -\frac{1}{x \ln 3}$

Lời giải

Chọn B

Ta có $y' = (\log_3 x)' = \frac{1}{x \ln 3}$.

Câu 56: Đạo hàm của hàm số $y = \log_2 (x - 1)$ là:

- A. $y' = \frac{x-1}{\ln 2}$. B. $y' = \frac{1}{\ln 2}$. C. $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$. D. $y' = \frac{1}{x-1}$.

Lời giải

Ta có $y' = \frac{1}{(x-1)\ln 2}$.

Câu 57: Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 (x+1)$ là

- A. $y' = -\frac{1}{\ln 3}$. B. $y' = \frac{1}{(x+1)\ln 3}$. C. $y' = \frac{1}{(x+1)}$. D. $y' = \frac{x+1}{\ln 3}$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số $y = \log_3 (x+1)$ là $y' = \frac{1}{(x+1)\ln 3}$.

Câu 58: Cho hàm số $y = x^5 - 3x^4 + x + 1$ với $x \in \mathbb{R}$. Đạo hàm y'' của hàm số là

- A. $y'' = 5x^3 - 12x^2 + 1$. B. $y'' = 5x^4 - 12x^3$.
C. $y'' = 20x^2 - 36x^3$. D. $y'' = 20x^3 - 36x^2$.

Lời giải

Chọn D

Ta có $y = x^5 - 3x^4 + x + 1 \Rightarrow y' = 5x^4 - 12x^3 + 1 \Rightarrow y'' = 20x^3 - 36x^2$.

Câu 59: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số $y = -3\cos x$ tại điểm $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

- A. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = -3$. B. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$. C. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$. D. $y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 3$.

Lời giải

Chọn C

$y = -3\cos x \Rightarrow y' = 3\sin x; y'' = 3\cos x$.

$y''\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$.

Câu 60: Cho hàm số $f(x) = (3x - 7)^5$. Tính $f''(2)$.

- A. $f''(2) = 0$. B. $f''(2) = 20$. C. $f''(2) = -180$. D. $f''(2) = 30$.

Lời giải

Chọn C

$$f(x) = (3x - 7)^5$$

$$f'(x) = 15(3x - 7)^4$$

$$f''(x) = 180(3x - 7)^3$$

$$\text{Vậy } f''(2) = -180$$

Câu 61: Cho $y = \sqrt{2x - x^2}$, tính giá trị biểu thức $A = y^3 \cdot y''$.

A. 1.

B. 0.

C. -1.

D. Đáp án khác.

Lời giải

Chọn C

$$y' = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}, \quad y'' = \frac{-1}{(\sqrt{2x-x^2})^3}$$

Ta có:

$$\text{Do đó: } A = y^3 \cdot y'' = -1$$

Câu 62: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \frac{3x+1}{x+2}$ là

A. $y'' = \frac{10}{(x+2)^2}$

B. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^4}$

C. $y'' = -\frac{5}{(x+2)^3}$

D. $y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$

Lời giải

Chọn D

$$\text{Ta có } y = 3 - \frac{5}{x+2} \Rightarrow y' = \frac{5}{(x+2)^2}; y'' = -\frac{10}{(x+2)^3}$$

Câu 63: Đạo hàm cấp hai của hàm số $y = \cos^2 x$ là

A. $y'' = -2 \cos 2x$

B. $y'' = -2 \sin 2x$

C. $y'' = 2 \cos 2x$

D. $y'' = 2 \sin 2x$

Lời giải

Chọn A

$$y' = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -\sin 2x \Rightarrow y'' = -2 \cos 2x$$

Câu 64: Cho hàm số $y = x^3 - 3x^2 + x + 1$. Phương trình $y'' = 0$ có nghiệm.

A. $x = 2$.

B. $x = 4$.

C. $x = 1$.

D. $x = 3$.

Lời giải

Chọn C

TXĐ $D = \mathbb{R}$

Ta có $y' = 3x^2 - 6x + 1$, $y'' = 6x - 6 \Rightarrow y'' = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Câu 65: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Khi đó $y''(x)$ bằng

- A. $y'' = \frac{1}{2} \cos 2x$. B. $y'' = 2 \sin 2x$.
C. $y'' = 2 \cos 2x$. D. $y'' = 2 \cos x$.

Lời giải

Chọn C

$y = \sin^2 x \Rightarrow y' = 2 \sin x \cdot \cos x = \sin 2x \Rightarrow y'' = 2 \cos 2x$

Câu 66: Cho hàm số $y = -\frac{1}{x}$. Đạo hàm cấp hai của hàm số là

- A. $y^{(2)} = \frac{2}{x^3}$. B. $y^{(2)} = \frac{-2}{x^2}$. C. $y^{(2)} = \frac{-2}{x^3}$. D. $y^{(2)} = \frac{2}{x^2}$.

Lời giải

Chọn C

Ta có: $y' = \frac{1}{x^2}$ nên $y^{(2)} = -\frac{(x^2)'}{x^4} = -\frac{2x}{x^4} = -\frac{2}{x^3}$.

Câu 67: Cho hàm số $f(x) = x^3 + 2x$, giá trị của $f''(1)$ bằng

- A. 6. B. 8. C. 3. D. 2.

Lời giải

$f'(x) = 3x^2 + 2$, $f''(x) = 6x \Rightarrow f''(1) = 6$.

Câu 68: Cho hàm số $f(x) = \frac{1}{2x-1}$. Tính $f'''(-1)$.

- A. $-\frac{8}{27}$ B. $\frac{2}{9}$ C. $\frac{8}{27}$ D. $-\frac{4}{27}$.

Lời giải

Tập xác định $D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$.

$f'(x) = \frac{-2}{(2x-1)^2}$, $f''(x) = \frac{8}{(2x-1)^3}$.

Khi đó $f'''(-1) = -\frac{8}{27}$.

Câu 69: Cho $f(x) = x^5 + x^3 - 2x - 3$. Tính $f'(1) + f'(-1) + 4f'(0)$?

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

A. 4.

B. 7.

C. 6.

D. 5.

Lời giải

Chọn A

✧ Phương pháp tự luận:

Tập xác định: $D = \mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = 5x^4 + 3x^2 - 2$.

$$\Rightarrow f'(1) = 6; f'(-1) = 6; f'(0) = -2 \Rightarrow f'(1) + f'(-1) + 4f'(0) = 4$$

✧ Phương pháp trắc nghiệm: Sử dụng Casio

$$\text{Bấm } \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=1} + \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=-1} - 4 \left. \frac{d(x^5 + x^3 - 2x - 3)}{dx} \right|_{x=0} = 4$$

Câu 70: Tính đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 5)\sqrt{x}$.

A. $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^2} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$ **B.** $y' = \frac{7}{2}\sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}}$

C. $y' = 3x^2 - \frac{5}{2\sqrt{x}}$ **D.** $y' = 3x^2 - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Lời giải

Chọn B

$$\begin{aligned} \text{Ta} & \quad \text{có} \\ & y' = 3x^2 \cdot \sqrt{x} + (x^3 - 5) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ & = 3x^2 \sqrt{x} + \frac{1}{2} x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2} x^2 \sqrt{x} - \frac{5}{2\sqrt{x}} = \frac{7}{2} \sqrt{x^5} - \frac{5}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Câu 71: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}}$ là:

A. $\frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ **B.** $\frac{1+3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$ **C.** $\frac{1-3x}{x^2+1}$

D. $\frac{2x^2-x-1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$

Lời giải

Chọn A

$$\text{Ta có } y' = \frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{(x+3)x}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1-3x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

Câu 72: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 + 3}$. Tính giá trị của biểu thức $S = f(1) + 4f'(1)$.

A. $S = 4$. B. $S = 2$. C. $S = 6$. D. $S = 8$.

Lời giải

Chọn A

Ta có: $f(x) = \sqrt{x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 3}}$.

Vậy $S = f(1) + 4f'(1) = 4$.

Câu 73: Cho hàm số $y = \sqrt{2x^2 + 5x - 4}$. Đạo hàm y' của hàm số là

A. $y' = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$. B. $y' = \frac{2x+5}{2\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

C. $y' = \frac{2x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$. D. $y' = \frac{4x+5}{\sqrt{2x^2+5x-4}}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có $y' = (\sqrt{2x^2 + 5x - 4})' = \frac{(2x^2 + 5x - 4)'}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}} = \frac{4x+5}{2\sqrt{2x^2 + 5x - 4}}$

Câu 74: Tính đạo hàm của hàm số $y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3}$.

A. $y' = \frac{-7x^2 + 2x + 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$. B. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

C. $y' = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)}$. D. $y' = \frac{8x^3 + 3x^2 + 14x + 5}{(x^2 + 2x + 3)^2}$.

Lời giải

Chọn B

$y = \frac{2x^2 - 3x + 7}{x^2 + 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(4x - 3)(x^2 + 2x + 3) - (2x + 2)(2x^2 - 3x + 7)}{(x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{7x^2 - 2x - 23}{(x^2 + 2x + 3)^2}$

Câu 75: Cho hàm số $f(x) = \frac{2x+a}{x-b}$ ($a, b \in \mathbb{R}; b \neq 1$). Ta có $f'(1)$ bằng:

A. $\frac{-a+2b}{(b-1)^2}$. B. $\frac{a-2b}{(b-1)^2}$. C. $\frac{a+2b}{(b-1)^2}$. D. $\frac{-a-2b}{(b-1)^2}$.

Lời giải

Chọn D

Ta có:
$$f'(x) = \frac{2(x-b) - 2x - a}{(x-b)^2} = \frac{-a-2b}{(x-b)^2}$$

Câu 76: Cho $f(x) = \sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3}$. Tính $f'(x)$.

- A. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{x-3}$ B. $\frac{2}{\sqrt{1-4x}} - \frac{2}{(x-3)^2}$
 C. $\frac{1}{2\sqrt{1-4x}} + 1$ D. $\frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2}$

Lời giải

Chọn D

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\sqrt{1-4x} + \frac{1-x}{x-3} \right)' = (\sqrt{1-4x})' + \left(\frac{1-x}{x-3} \right)' \\ &= \frac{(1-4x)'}{2\sqrt{1-4x}} + \frac{(1-x)'(x-3) - (1-x)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-2}{\sqrt{1-4x}} + \frac{2}{(x-3)^2} \end{aligned}$$

Câu 77: Đạo hàm của hàm số $y = (2x-1)\sqrt{x^2+x}$ là

- A. $y' = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$ B. $y' = \frac{8x^2+4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ C. $y' = \frac{4x+1}{2\sqrt{x^2+x}}$ D.
 $y' = \frac{6x^2+2x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$

Lời giải

Chọn A

Ta có:
$$y' = 2\sqrt{x^2+x} + \frac{(2x-1)(2x+1)}{2\sqrt{x^2+x}}$$

$$= \frac{4x^2+4x+4x^2-1}{2\sqrt{x^2+x}} = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Vậy
$$y' = \frac{8x^2+4x-1}{2\sqrt{x^2+x}}$$

Câu 78: Đạo hàm của hàm số $y = (-x^2+3x+7)^7$ là

- A. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$ B. $y' = 7(-x^2+3x+7)^6$
 C. $y' = (-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$ D. $y' = 7(-2x+3)(-x^2+3x+7)^6$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $y' = 7(-x^2 + 3x + 7)^6 (-x^2 + 3x + 7)' = 7(-2x + 3)(-x^2 + 3x + 7)^6$.

Câu 79: Đạo hàm của hàm số $y = \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^3$ bằng

A. $y' = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

B. $y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

C. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

D. $y' = 6\left(x - \frac{1}{x}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2$.

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)' \left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2 = 6\left(x + \frac{1}{x^2}\right)\left(x^2 - \frac{2}{x}\right)^2.$$

Câu 80: Đạo hàm của hàm số $y = (x^2 + x + 1)^{\frac{1}{3}}$ là

A. $y' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$ **B.** $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{2}{3}}$.

C. $y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{8}{3}}$ **D.** $y' = \frac{2x+1}{2\sqrt[3]{x^2+x+1}}$.

Lời giải

$$y' = \frac{1}{3}(x^2+x+1)^{\frac{1}{3}-1} (x^2+x+1)' = \frac{2x+1}{3\sqrt[3]{(x^2+x+1)^2}}$$

Ta có

Câu 81: Đạo hàm của hàm số $y = (x^3 - 2x^2)^2$ bằng:

A. $6x^5 - 20x^4 - 16x^3$ **B.** $6x^5 - 20x^4 + 4x^3$ **C.** $6x^5 + 16x^3$ **D.** $6x^5 - 20x^4 + 16x^3$.

Lời giải

$$y' = 2(x^3 - 2x^2) \cdot (x^3 - 2x^2)' = 2(x^3 - 2x^2)(3x^2 - 4x) = 6x^5 - 20x^4 + 16x^3.$$

Câu 82: Đạo hàm của hàm số $f(x) = \sqrt{2 - 3x^2}$ bằng biểu thức nào sau đây?

A. $\frac{-3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$ **B.** $\frac{1}{2\sqrt{2 - 3x^2}}$ **C.** $\frac{-6x^2}{2\sqrt{2 - 3x^2}}$ **D.** $\frac{3x}{\sqrt{2 - 3x^2}}$.

Lời giải

Ta có $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

$$f'(x) = (\sqrt{2-3x^2})' = \frac{(2-3x^2)'}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-6x}{2\sqrt{2-3x^2}} = \frac{-3x}{\sqrt{2-3x^2}}.$$

- Câu 83:** Cho hàm số $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x$. Tập nghiệm của bất phương trình $y' \geq 0$ là
- A. $[-1; 5]$. B. $\emptyset$.
 C. $(-\infty; -1) \cup (5; +\infty)$. D. $(-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 - 5x \Rightarrow y' = x^2 - 4x - 5$$

$$y' \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 \geq 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty).$$

- Câu 84:** Cho hàm số $y = x^3 + mx^2 + 3x - 5$ với m là tham số. Tìm tập hợp M tất cả các giá trị của m để $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt:

- A. $M = (-3; 3)$. B. $M = (-\infty; -3] \cup [3; +\infty)$.
 C. $M = \mathbb{R}$. D. $M = (-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$.

Lời giải

Chọn D

$$y = x^3 + mx^2 + 3x - 5 \Rightarrow y' = 3x^2 + 2mx + 3.$$

$$y' = 0 \text{ có hai nghiệm phân biệt} \Leftrightarrow \Delta' > 0 \Leftrightarrow m^2 - 9 > 0 \Leftrightarrow m < -3 \vee 3 < m.$$

- Câu 85:** Cho hàm số $y = (m-1)x^3 - 3(m+2)x^2 - 6(m+2)x + 1$. Tập giá trị của m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là

- A. $[3; +\infty)$. B. $\emptyset$. C. $[4\sqrt{2}; +\infty)$. D. $[1; +\infty)$.

Lời giải:

Chọn B

Ta có $y' = 3(m-1)x^2 - 6(m+2)x - 6(m+2)$.

$$\Delta'_{y'} = 27m^2 + 54m.$$

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ \Delta'_{y'} \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2 \leq m \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow m \in \emptyset.$$

- Câu 86:** Cho hàm số $y = (m+2)x^3 + \frac{3}{2}(m+2)x^2 + 3x - 1$, m là tham số. Số các giá trị nguyên m để $y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ là
- A.** 5. **B.** Có vô số giá trị nguyên m .
C. 3. **D.** 4

Lời giải

Chọn A

$$y' = 3(m+2)x^2 + 3(m+2)x + 3 \geq 0 \Rightarrow (m+2)x^2 + (m+2)x + 1 \geq 0 \quad (1)$$

Để phương trình ⁽¹⁾ luôn thỏa mãn $\forall x \in \mathbb{R}$

$$\text{TH1: } m+2=0 \Rightarrow m=-2 \Rightarrow y'=1 \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (\text{Nhận})$$

$$\text{TH2: } m+2 \neq 0 \Rightarrow m \neq -2 \Rightarrow \begin{cases} m+2 > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ m^2 - 4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > -2 \\ -2 \leq m \leq 2 \end{cases} \Rightarrow -2 < m \leq 2$$

Kết hợp hai trường hợp: $m = -2; -1; 0; 1; 2$.

- Câu 87:** Cho hàm số $f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3$ với m là tham số thực. Số giá trị nguyên của m để $f'(x) \leq 0$ với $\forall x \in \mathbb{R}$ là
- A.** 1. **B.** 5. **C.** 4. **D.** 3.

Lời giải

Chọn B

$$f(x) = -x^3 + 3mx^2 - 12x + 3 \Rightarrow f'(x) = -3x^2 + 6mx - 12$$

$$f'(x) \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -3x^2 + 6mx - 12 \leq 0 \text{ với } \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 < 0 \\ 9m^2 - 36 \leq 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$. Vì $m \in \mathbb{Z}$ nên $m \in \{-2; -1; 0; 1; 2\}$. Vậy có 5 giá trị nguyên m thỏa mãn.

- Câu 88:** Cho hàm số $f(x) = \frac{mx^3}{3} - \frac{mx^2}{2} + (3-m)x - 2$. Tìm m để $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

A. $0 \leq m \leq \frac{12}{5}$. **B.** $0 < m < \frac{12}{5}$. **C.** $0 \leq m < \frac{12}{5}$. **D.** $0 < m \leq \frac{12}{5}$.

Lời giải

Chọn C

$$\text{Ta có } f'(x) = mx^2 - mx + (3-m)$$

+ Nếu $m=0$ thì $f'(x) = 3 > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ (thỏa mãn)

+ Nếu $m \neq 0$ thì $f'(x) = mx^2 - mx + (3 - m)$ là tam thức bậc hai,

$$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ \Delta = m^2 - 4m(3 - m) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ 5m^2 - 12m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < \frac{12}{5}$$

Vậy $0 \leq m < \frac{12}{5}$.

Câu 89: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9}$. Tập hợp các giá trị của x để $f'(x) < 0$ là

A. $\left(\frac{7}{5}; +\infty\right)$. **B.** $\left(-\infty; \frac{7}{5}\right)$. **C.** $\left(\frac{7}{5}; \frac{9}{5}\right)$. **D.** $\left[1; \frac{7}{5}\right)$.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định: $D = \left[1; \frac{9}{5}\right]$.

Ta có $f(x) = \sqrt{-5x^2 + 14x - 9} \Rightarrow f'(x) = \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}}, \forall x \in \left[1; \frac{9}{5}\right]$.

$$f'(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{-5x + 7}{\sqrt{-5x^2 + 14x - 9}} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} -5x + 7 < 0 \\ 1 < x < \frac{9}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{7}{5} < x < \frac{9}{5}.$$

Câu 90: Cho hàm số $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$. Tìm tập nghiệm S của phương trình $f'(x) \geq f(x)$ có bao nhiêu giá trị nguyên?

A. 1. **B.** 2. **C.** 0. **D.** 3.

Lời giải

Chọn C

Tập xác định của hàm số là: $D = (-\infty; 0] \cup [2; +\infty)$.

Ta có: $f'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$. Vậy $f'(x) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq \sqrt{x^2-2x} \Leftrightarrow \frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0$.

Với $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có:

$$\frac{-x^2+3x-1}{\sqrt{x^2-2x}} \geq 0 \Leftrightarrow -x^2+3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{3-\sqrt{5}}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$$

Kết hợp với điều kiện $x \in (-\infty; 0) \cup (2; +\infty)$, ta có: $x \in \left[2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$. Mà $x \in \mathbb{Z}$ nên suy ra $x \in \emptyset$. Vậy $S = \emptyset$.

Câu 91: Cho $\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{ax-b}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}, \forall x > \frac{1}{4}$. Tính $\frac{a}{b}$.

A. -16. **B.** -4. **C.** -1. **D.** 4.

Lời giải

Chọn C

Với $\forall x > \frac{1}{4}$, ta có:

$$\left(\frac{3-2x}{\sqrt{4x-1}}\right)' = \frac{(3-2x)' \sqrt{4x-1} - (3-2x)(\sqrt{4x-1})'}{(4x-1)} = \frac{-2\sqrt{4x-1} - \frac{6-4x}{\sqrt{4x-1}}}{(4x-1)} = \frac{-4x-4}{(4x-1)\sqrt{4x-1}}.$$

Do đó $a = -4, b = 4 \Rightarrow \frac{a}{b} = -1$.

Câu 92: Cho hàm số $y = \sqrt{x^2 - 1}$. Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x + 1$ là:

A. $x = 2$. **B.** $x = 1$. **C.** Vô nghiệm. **D.** $x = -1$.

Lời giải

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 1$ suy ra
 $x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$.

Tuy nhiên do điều kiện xác định nên phương trình vô nghiệm.

Trình bày lại

Tập xác định của hàm số là $D = (-\infty; -1] \cup [1; +\infty)$. Khi đó ta có $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Nghiệm của phương trình $y' \cdot y = 2x + 1 \Leftrightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \cdot \sqrt{x^2 - 1} = 2x + 1$. ĐK:
 $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$.

$\Leftrightarrow x = 2x + 1 \Leftrightarrow x = -1$: Không thỏa mãn.

KL: phương trình vô nghiệm.

Câu 93: Cho $y = \sqrt{x^2 - 2x + 3}$, $y' = \frac{ax+b}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$. Khi đó giá trị $a.b$ là:

A. -4. **B.** -1. **C.** 0. **D.** 1.

Lời giải

$$y = \sqrt{x^2 - 2x + 3} \Rightarrow y' = \frac{(x^2 - 2x + 3)'}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{2x - 2}{2\sqrt{x^2 - 2x + 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow a = 1; b = -1.$$

Câu 94: Cho hàm số $y = \frac{-2x^2 + x - 7}{x^2 + 3}$. Tập nghiệm của phương trình $y' = 0$ là
A. $\{-1; 3\}$ **B.** $\{1; 3\}$ **C.** $\{-3; 1\}$ **D.** $\{-3; -1\}$

Lời giải

Chọn A

$$y' = \frac{-x^2 + 2x + 3}{(x^2 + 3)^2}$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -1 \vee x = 3.$$

•Dạng ②: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hàm số $y = -4x^3 + \frac{x^2}{2} - 2x + 3$, biết $y' = ax^2 + bx + c$. Khi đó:

- a) $a + b + c = -10$
- b) Phương trình $y' = 0$ có hai nghiệm phân biệt
- c) Đồ thị hàm số y' cắt trục tung tại điểm $(0; -2)$
- d) Đồ thị hàm số y' cắt đường thẳng $y = 3$ tại hai điểm phân biệt

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

$$y' = -4 \cdot 3 \cdot x^2 + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x - 2 + 0 = -12x^2 + x - 2$$

Câu 2: Cho hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3\sqrt{x} + 2 - \frac{1}{x}$. Khi đó:

a) $y'(1) = -\frac{3}{2}$

b) Đồ thị của hàm số y' đi qua điểm $A\left(1; \frac{3}{2}\right)$

c) $y'(4) = \frac{3597}{16}$

d) Điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = x^4 - 4x^2 + 3\sqrt{x} + 2 - \frac{1}{x}$ có hoành độ $x_0 = 1$. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng $y = \frac{2}{3}x$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng

$$y' = 4 \cdot x^3 - 4 \cdot 2 \cdot x + 3 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} + 0 - \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 4x^3 - 8x + \frac{3}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^2}$$

Câu 3: Cho hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$. Khi đó:

a) $y'(0) = 7$

b) Đồ thị của hàm số y' đi qua điểm $A\left(1; \frac{7}{3}\right)$

c) $y'(1) < y'(2)$

d) Điểm M thuộc đồ thị (C) của hàm số $y = \frac{x-3}{2x+1}$ có hoành độ $x_0 = 0$. Khi đó, phương trình tiếp tuyến của (C) tại M song song với đường thẳng $y = 7x + 2024$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Đúng

$$y' = \frac{(x-3)'(2x+1) - (2x+1)'(x-3)}{(2x+1)^2} = \frac{2x+1 - 2(x-3)}{(2x+1)^2} = \frac{7}{(2x+1)^2}$$

Câu 4: Cho hàm số $y = \frac{x^2+1}{x-3}$. Khi đó:

a) $y'(1) = \frac{3}{2}$

b) Tổng các nghiệm của phương trình $y' = 0$ bằng -6

c) Đồ thị của hàm số y' đi qua điểm $A\left(1; -\frac{3}{2}\right)$

d) $y'(1) < y'(2)$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

$$y' = \frac{(x^2 + 1)'(x - 3) - (x - 3)'(x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{2x(x - 3) - 1(x^2 + 1)}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 1}{(x - 3)^2}$$

Câu 5: Cho hàm số $y = (-2x - 3)(x^2 + 3x - 1)$. Khi đó:

- a) $y'(1) = -31$
- b) Tổng các nghiệm của phương trình $y' = 0$ bằng -3
- c) Đồ thị của hàm số y' đi qua điểm $A(0; 7)$
- d) $y'(1) > y'(2)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$\begin{aligned} y' &= (-2x - 3)'(x^2 + 3x - 1) + (x^2 + 3x - 1)'(-2x - 3) \\ &= -2(x^2 + 3x - 1) + (2x + 3)(-2x - 3) = -6x^2 - 18x - 7 \end{aligned}$$

Câu 6: Cho hàm số $y = (2\sqrt{x} + 3)(4\sqrt{x} - 1)$. Khi đó:

- a) $y'(1) = 13$
- b) $y'(1) + y'(25) = 22$
- c) Đồ thị của hàm số y' đi qua điểm $A(25; -9)$
- d) $y'(1) > y'(2)$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$\begin{aligned} y' &= (2\sqrt{x} + 3)'(4\sqrt{x} - 1) + (4\sqrt{x} - 1)'(2\sqrt{x} + 3) \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(4\sqrt{x} - 1) + 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}(2\sqrt{x} + 3) = 8 + \frac{5}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Câu 7: Tính được đạo hàm của các hàm số sau. Khi đó:

- a) $y = 2\sin x - 3\cos x$ có $y' = 2\cos x - 3\sin x$
- b) $y = 3\cot x - \tan x$ có $y' = -\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}$
- c) $y = x\cos x$ có $y' = \cos x + x\sin x$
- d) $y = 2x\sin^2 x$ có $y' = 2\sin^2 x + 2x\sin 2x$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$a) y' = 2(\sin x)' - 3(\cos x)' = 2\cos x + 3\sin x$$

$$b) \quad y' = 2(\cot x)' - (\tan x)' = -\frac{2}{\sin^2 x} - \frac{1}{\cos^2 x}.$$

$$c) \quad y' = x' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = \cos x - x \sin x.$$

d)

$$\begin{aligned} y' &= (2x)' \cdot \sin^2 x + (\sin^2 x)' \cdot 2x = 2\sin^2 x + 2\sin x(\sin x)' \cdot 2x \\ &= 2\sin^2 x + 4x \sin x \cos x = 2\sin^2 x + 2x \sin 2x \end{aligned}$$

Câu 8: Tính được đạo hàm của các hàm số sau. Khi đó:

$$a) \quad y = \log_2(9x - 5) \quad \text{có} \quad y' = \frac{9}{(9x - 5) \ln 2}$$

$$b) \quad y = 2e^{3x+1} \quad \text{có} \quad y' = 6e^{3x+1}$$

$$c) \quad y = 3^{x^3-1} \quad \text{có} \quad y' = 3 \cdot \ln 3 \cdot x^2 \cdot 3^{x^3-1}$$

$$d) \quad y = \ln \sqrt{x} \quad \text{có} \quad y' = -\frac{1}{2x}$$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

$$a) \quad y' = \frac{(9x - 5)'}{(9x - 5) \ln 2} = \frac{9}{(9x - 5) \ln 2}$$

$$b) \quad y' = 2(3x + 1)' \cdot e^{3x+1} = 6e^{3x+1}.$$

$$c) \quad y' = (x^3 - 1)' \cdot 3^{x^3-1} \cdot \ln 3 = 3 \cdot \ln 3 \cdot x^2 \cdot 3^{x^3-1}.$$

$$d) \quad y' = \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

Câu 9: Tính được đạo hàm cấp hai của các hàm số sau. Khi đó:

$$a) \quad y = x^3 - x^2 + 9x - 5 \quad \text{có} \quad y''(-2) = 14$$

$$b) \quad y = 2\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{có} \quad y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = 9\sqrt{2}$$

$$c) \quad y = 2e^{2x-1} \quad \text{có} \quad y''(1) = 8e$$

$$d) \quad y = \ln(1 - 2x) \quad \text{có} \quad y''(-3) = \frac{-4}{49}$$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Đúng

a) Ta có: $y' = 3x^2 - 2x + 9 \Rightarrow y'' = 6x - 2$.

Vậy $y''(-2) = -14$.

b) Ta có: $y' = -6 \sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow y'' = -18 \cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Vậy $y''\left(\frac{\pi}{6}\right) = -9\sqrt{2}$.

c) Ta có: $y' = 4e^{2x-1} \Rightarrow y'' = 8e^{2x-1}$.

Vậy $y''(1) = 8e$.

d) Ta có: $y' = \frac{(1-2x)'}{1-2x} = -\frac{2}{1-2x} \Rightarrow y'' = 2 \frac{(1-2x)'}{(1-2x)^2} = -\frac{4}{(1-2x)^2}$.

Vậy $y''(-3) = \frac{-4}{49}$.

Câu 10: Tính được đạo hàm của các hàm số sau. Khi đó:

a) $y = (x^2 + x)e^x$ có $y' = (x^2 + 3x + 1)e^x$

b) $y = \frac{x^3}{\ln x}$ có $y' = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$

c) $y = \frac{2x^2}{2^x}$ có $y' = \frac{4x - 2 \cdot \ln 2 \cdot x^2}{2^x}$

d) $y = 3x \cdot \log_3 x$ có $y' = 3 \log_3 x + \frac{3}{\ln 3}$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng

a) $y' = (x^2 + x)' \cdot e^x + (e^x)' \cdot (x^2 + x) = (2x + 1)e^x + e^x(x^2 + x) = (x^2 + 3x + 1)e^x$.

b) $y' = \frac{(x^3)' \cdot \ln x - (\ln x)' \cdot x^3}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - \left(\frac{1}{x}\right)x^3}{(\ln x)^2} = \frac{3x^2 \ln x - x^2}{(\ln x)^2}$

c) $y' = \frac{(2x^2)' \cdot 2^x - (2^x)' \cdot 2x^2}{(2^x)^2} = \frac{4x \cdot 2^x - 2^x \cdot \ln 2 \cdot 2x^2}{2^{2x}} = \frac{4x - 2 \cdot \ln 2 \cdot x^2}{2^x}$.

d) $y' = (3x)' \cdot \log_3 x + (\log_3 x)' \cdot 3x = 3 \log_3 x + \frac{1}{x \ln 3} \cdot 3x = 3 \log_3 x + \frac{3}{\ln 3}$

Câu 11: Một vật chuyển động trên đường thẳng được xác định bởi công thức $s(t) = t^3 - 3t^2 + 7t - 2$, trong đó $t > 0$ và tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của vật trong t giây tính bằng mét. Khi đó:

- a) Tốc độ của vật tại thời điểm $t = 2$ là $7(m/s)$
- b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là $6(m/s^2)$
- c) Gia tốc của vật tại thời điểm mà vận tốc của chuyển động bằng $16m/s^2$ là $10(m/s^2)$
- d) Thời điểm $t = 1$ (giây) tại đó vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 7$ và $s''(t) = 6t - 6$.

a) Vận tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $v(2) = s'(2) = 3 \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 7 = 7(m/s)$.

b) Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 2$ là: $a(2) = v'(2) = s''(2) = 6 \cdot 2 - 6 = 6(m/s^2)$.

c) Vận tốc của chuyển động bằng $16m/s^2$ tại thời điểm t nghĩa là:

$$v(t) = s'(t) = 16 \Leftrightarrow 3t^2 - 6t + 7 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 3 \text{ (thỏa mãn)} \\ t = -1 \text{ (loại)} \end{cases}$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3$ là: $a(3) = v'(3) = s''(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12(m/s^2)$.

d) Vận tốc của chuyển động có phương trình $v(t) = 3t^2 - 6t + 7$ là một parabol,

có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 4)$ và hệ số $a = 3 > 0$ nên hàm số có giá trị nhỏ nhất bằng 4 tại $t = 1$.

Vậy tại thời điểm $t = 1$ thì vận tốc của chuyển động đạt giá trị nhỏ nhất bằng $4(m/s)$.

Câu 12: Chuyển động của một vật có phương trình $s(t) = 4\cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)(m)$, với t là thời gian tính bằng giây. Khi đó:

a) $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

b) $s''(t) = 16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$

c) Vận tốc của vật tại thời điểm khi $t=5(s)$ là $\approx 6,505(m/s)$.

d) Gia tốc của vật tại thời điểm khi $t=5(s)$ là $\approx 152,533(m/s^2)$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) b) Ta có $s'(t) = -8\pi \sin\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$ và $s''(t) = -16\pi^2 \cos\left(2\pi t - \frac{\pi}{12}\right)$.

c) Vận tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=5(s)$ là:

$$s'(5) = -8\pi \sin\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx 6,505(m/s).$$

d) Gia tốc tức thời của vật tại thời điểm $t=5(s)$ là:

$$s''(5) = -16\pi^2 \cos\left(10\pi - \frac{\pi}{12}\right) \approx -152,533(m/s^2)$$

Câu 13: Cho $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f'(x) = x^2 + x - 2$

b) $f'(x) = 0$ có 1 nghiệm

c) $f'(x) = -2$ có 2 nghiệm

d) $f'(x) = 10$ có 1 nghiệm

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

a) Ta có $f'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x\right)' = x^2 + x - 2$

b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \vee x = -2$

c) $f'(x) = -2 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = -2 \Leftrightarrow x^2 + x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = -1$

d) $f'(x) = 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 10 \Leftrightarrow x^2 + x - 12 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \vee x = -4$

Câu 14: Cho hai hàm số $f(x)$ và $g(x)$ đều có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và thỏa mãn $f^3(2-x) - 2.f^2(2+3x) + x^2.g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f'(2) = 2$

b) $f(2) = 2$

c) $f(2) + f'(2) = 4$

d) $3.f(2) + 4.f'(2) = 10$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$f^3(2-x) - 2.f^2(2+3x) + x^2.g(x) + 36x = 0, \forall x \in \mathbb{R} \quad (1)$$

Vì (1) đúng $\forall x \in \mathbb{R}$ nên cũng đúng với $x=0 \Rightarrow f^3(2) - 2.f^2(2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} f(2) = 0 \\ f(2) = 2 \end{cases}$

Lấy đạo hàm hai vế của (1) ta có:

$$-3.f^2(2-x).f'(2-x) - 12.f(2+3x).f'(2+3x) + 2x.g(x) + x^2.g'(x) + 36 = 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Cho $x=0 \Rightarrow -3.f^2(2).f'(2) - 12.f(2).f'(2) + 36 = 0 \quad (2)$

Ta thấy $f(2)=0$ không thỏa mãn (2) nên $f(2)=2$, khi đó $f'(2)=1 \Rightarrow 3.f(2) + 4.f'(2) = 10$.

Vậy $A = 3.f(2) + 4.f'(2) = 10$.

Câu 15: Xét hàm số $f(x) = \sqrt[3]{\cos 2x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$

.

b) $f'(x) = \frac{-2 \sin 2x}{3.\sqrt[3]{\cos^2 2x}}$

.

c) $f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

.

d) $3.y^2.y' + 2 \sin 2x = 0$

.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt[3]{\cos 2 \cdot \frac{\pi}{2}} = -1$$

$$y = \sqrt[3]{\cos 2x} \Rightarrow y^3 = \cos 2x \Rightarrow y' \cdot 3y^2 = -2 \sin 2x \Rightarrow y' = \frac{-2 \sin 2x}{3(\sqrt[3]{\cos 2x})^2}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$3 \cdot (\sqrt[3]{\cos 2x})^2 \cdot \frac{-2 \sin 2x}{3(\sqrt[3]{\cos 2x})^2} + 2 \sin 2x = -2 \sin 2x + 2 \sin 2x = 0$$

Câu 16: Cho hàm số $f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x$; $g(x) = \frac{1}{4} \cos 4x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $f'(x) - g'(x) = 0$

b) $f(x) = g(x) + \frac{1}{4}$

c) $2f'(x) - 3g'(x) = 1$

d) $3f'(x) + 2g'(x) = -1$

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

Ta có:

$$f'(x) = 4 \sin^3 x \cos x + 4 \cos^3 x (-\sin x) = 4 \sin x \cos x (\sin^2 x - \cos^2 x) = -\sin 4x$$

$$g'(x) = -\sin 4x$$

$$\text{Vậy } f'(x) - g'(x) = 0$$

Câu 17: Cho hàm số $y = f(x) = \sin 2x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $y^2 + (y')^2 = 4$

b) $4y + y'' = 0$

c) $4y - y'' = 0$

d) $y = y' \tan 2x$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

$$y' = 2 \cos 2x, \quad y'' = -4 \sin 2x.$$

$$y^2 + (y')^2 = \sin^2 2x + 4 \cos^2 2x = 1 + 3 \cos^2 2x.$$

$$4y + y'' = 4 \sin 2x - 4 \sin 2x = 0.$$

$$4y - y'' = 8 \sin 2x.$$

$$y' \tan 2x = 2 \cos 2x \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = 2 \sin 2x.$$

Câu 18: Một chuyển động xác định bởi phương trình $S(t) = t^3 - 3t^2 - 9t + 2$. Trong đó t được tính bằng giây, S được tính bằng mét. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Vận tốc của chuyển động bằng 0 khi $t = 0s$ hoặc $t = 2s$.

b) Gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 3s$ là 12 m/s^2 .

c) Gia tốc của chuyển động bằng 0 m/s^2 khi $t = 0s$.

d) Vận tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 2s$ là $v = 18 \text{ m/s}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

Vận tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $v(t) = S'(t) = 3t^2 - 6t - 9$.

Gia tốc của chuyển động tại thời điểm t có phương trình là $a(t) = v'(t) = 6t - 6$.

Tại thời điểm $t = 3s$ ta có $a(3) = 6 \cdot 3 - 6 = 12 \text{ m/s}^2$.

Câu 19: Cho hàm số $y = \sin^2 x$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $2y' + y'' = \sqrt{2} \cos \left(2x - \frac{\pi}{4} \right).$

b) $2y + y' \cdot \tan x = 0.$

c) $4y - y'' = 2.$

d) $4y' + y''' = 0.$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

Ta có $y' = \sin 2x$, $y'' = 2 \cos 2x$, $y''' = -4 \sin 2x$.

$$2y' + y'' = 2(\sin 2x + \cos 2x) = 2\sqrt{2}\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$2y + y' \cdot \tan x = 2\sin^2 x + 2\sin x \cdot \cos x \cdot \tan x = 4\sin^2 x,$$

$$4y - y'' = 4\sin^2 x - 2\cos 2x = 2 - 4\cos 2x,$$

Câu 20: Cho hàm số $y = \frac{1}{x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $y''y^3 + 2 = 0$.

b) $y''y = 2(y')^2$.

c) $y''y + 2(y')^2 = 0$.

d) $y''y^3 = 2$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai

Ta có $y' = -\frac{1}{x^2}$; $y'' = \frac{2}{x^3}$.

$\square \square y''y^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 + 2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} + 2 = 0$ (vô lí).

$\square y''y = 2(y')^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} = 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^4} = \frac{2}{x^4}$ (đúng).

$\square y''y + 2(y')^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \frac{1}{x} + 2\left(-\frac{1}{x^2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{4}{x^4} = 0$ (vô lí).

$\square y''y^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^3} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^3 = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^6} = 2$ (vô lí).

Câu 21: Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(\sin x)' = \cos x$.

b) $(x^n)' = nx^{n-1}$ với $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$.

c) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ với $x \neq 0$.

d) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ với $x > 0$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

$$\text{Với } x > 0, \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Câu 22: Cho hàm số $y = \sqrt{1+3x-x^2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(y')^2 + y \cdot y'' = -1$.

b) $(y')^2 + 2y \cdot y'' = 1$.

c) $y \cdot y'' - (y')^2 = 1$.

d) $(y')^2 + y \cdot y'' = 1$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

$$y = \sqrt{1+3x-x^2} \Rightarrow y^2 = 1+3x-x^2$$

$$\Rightarrow 2y \cdot y' = 3 - 2x \Rightarrow 2 \cdot (y')^2 + 2y \cdot y'' = -2 \Rightarrow (y')^2 + y \cdot y'' = -1.$$

Câu 23: Cho hàm số $y = x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)]$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $x^2 y'' + xy' - 2y = 0$.

b) $x^2 y'' - xy' - 2y = 0$.

c) $x^2 y'' - xy' + 2y = 0$.

d) $x^2 y' - xy'' + 2y = 0$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

$$\text{Ta có: } y' = \cos(\ln x) + \sin(\ln x) + x \left[-\frac{\sin(\ln x)}{x} + \frac{\cos(\ln x)}{x} \right]$$

$$= \cos(\ln x) + \sin(\ln x) - \sin(\ln x) + \cos(\ln x) = 2\cos(\ln x).$$

$$\text{Suy ra: } y'' = -\frac{2\sin(\ln x)}{x}.$$

Ta có:

$$\Rightarrow x^2 y'' + xy' - 2y = -2x \sin(\ln x) + 2x \cos(\ln x) - 2x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] = -4x \sin(\ln x).$$

Vậy a sai.

$$\begin{aligned} &\triangleright x^2 y'' - xy' - 2y = -2x \sin(\ln x) - 2x \cos(\ln x) - 2x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] \\ &= -4x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] \end{aligned}$$

Vậy b sai.

$$\triangleright x^2 y'' - xy' + 2y = -2x \sin(\ln x) - 2x \cos(\ln x) + 2x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] = 0$$

Vậy c đúng.

$$\triangleright x^2 y' - xy'' + 2y = 2x^2 \cos(\ln x) + 2\sin(\ln x) + 2x [\cos(\ln x) + \sin(\ln x)] \neq 0$$

Vậy d sai.

Câu 24: Cho hàm số $y = e^{\sin x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 1$

b) $2y' \sin x = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$

c) $y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$

d) $y' \cdot \cos x - y \cdot \sin x - y'' = 0$

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Ta có:

$$y' = \cos x \cdot e^{\sin x}$$

$$2y' \sin x = 2 \cos x \cdot e^{\sin x} \cdot \sin x = \sin 2x \cdot e^{\sin x}$$

$$y'' = -\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}$$

$$D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 2\} = \cos^2 x \cdot e^{\sin x} - \sin x \cdot e^{\sin x} - (-\sin x \cdot e^{\sin x} + \cos^2 x \cdot e^{\sin x}) = 0$$

Câu 25: Cho hàm số $y = -2017e^{-x} - 3e^{-2x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $y'' + 3y' + 2y = -2017$

b) $y'' + 3y' + 2y = -3$

c) $y'' + 3y' + 2y = 0$

d) $y'' + 3y' + 2y = 2$

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

Ta có $y' = 2017e^{-x} + 6e^{-2x}$; $y'' = -2017e^{-x} - 12e^{-2x}$

Do đó, ta có

$$y'' + 3y' + 2y = -2017e^{-x} - 12e^{-2x} + 3(2017e^{-x} + 6e^{-2x}) + 2(-2017e^{-x} - 3e^{-2x})$$

$$= e^{-x}(-2017 + 3 \cdot 2017 - 2 \cdot 2017) + e^{-2x}(-12 + 18 - 6) = 0$$

Câu 26: Cho hàm số $y = \frac{\ln x}{x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $2y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

b) $y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

c) $y' + xy'' = -\frac{1}{x^2}$.

d) $2y' + xy'' = \frac{1}{x^2}$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Sai d) Sai

$$y' = \frac{(\ln x)' \cdot x - x' \cdot \ln x}{x^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

$$y'' = \frac{(1 - \ln x)' \cdot x^2 - (x^2)'(1 - \ln x)}{x^4} = \frac{-\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x(1 - \ln x)}{x^4}$$

$$= \frac{-x - 2x(1 - \ln x)}{x^4} = -\frac{1 + 2(1 - \ln x)}{x^3} = -\frac{3 - 2\ln x}{x^3}$$

$$2y' + xy'' = 2 \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2} - x \frac{3 - 2\ln x}{x^3} = \frac{2 - 2\ln x - 3 + 2\ln x}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$$

Suy ra:

Câu 27: Cho hàm số $y = \frac{e^{2x}}{2x}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\frac{1}{2}y' - xy'' = e^{2x}$.

b) $\frac{1}{2}y' + xy'' = e^{2x}$.

c) $y' - \frac{1}{2}xy'' = e^{2x}$.

d) $y' + \frac{1}{2}xy'' = e^{2x}$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Sai d) Đúng

Ta có $y' = e^{2x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right), y'' = e^{2x} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right)$.

Vậy $y' + \frac{1}{2}xy'' = e^{2x} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} \right) + \frac{1}{2}xe^{2x} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^3} \right) = e^{2x}$.

•Dạng ③: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \tan \left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right)$.

Trả lời: $\frac{4x}{\cos^2 \left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right)}$

Lời giải

$$y' = \left(\tan \left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right) \right)' = \frac{\left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right)'}{\cos^2 \left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right)} = \frac{4x}{\cos^2 \left(2x^2 + \frac{\pi}{3} \right)}$$

Câu 2: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 2e^{2x-1}$;

Trả lời: $4e^{2x-1}$

Lời giải

$$y' = (2e^{2x-1})' = 2 \cdot (2x-1)' e^{2x-1} = 4e^{2x-1}$$

Câu 3: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = 3\ln(x^2 + 1)$;

Trả lời: $\frac{6x}{x^2 + 1}$

Lời giải

$$y' = (3\ln(x^2 + 1))' = 3 \frac{(x^2 + 1)'}{x^2 + 1} = \frac{6x}{x^2 + 1}$$

Câu 4: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = 2\sin x - \ln x$;

Trả lời: $-2\sin x + \frac{1}{x^2}$

Lời giải

Ta có: $y' = (2\sin x - \ln x)' = 2\cos x - \frac{1}{x}$;

$$y'' = \left(2\cos x - \frac{1}{x} \right)' = 2(\cos x)' - \left(\frac{1}{x} \right)' = -2\sin x + \frac{1}{x^2}$$

Câu 5: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \cdot 2^{2x}$

Trả lời: $4^x \cdot \ln 4(2 + x \ln 4)$

Lời giải

Ta có: $y' = (x \cdot 2^{2x})' = (x \cdot 4^x)' = x' \cdot 4^x + (4^x)' \cdot x = 4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x$;

$$y'' = (4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x)' = (4^x)' + \ln 4 \cdot (x \cdot 4^x)' \quad (x \cdot 4^x) \text{ làm giống bước trên)}$$

$$= 4^x \ln 4 + \ln 4 \cdot (4^x + 4^x \cdot \ln 4 \cdot x) = 2 \cdot 4^x \ln 4 + \ln^2 4 \cdot 4^x \cdot x = 4^x \cdot \ln 4(2 + x \ln 4).$$

Câu 6: Tính đạo hàm cấp hai của hàm số sau: $y = x \sin x$.

Trả lời: $2\cos x - x \sin x$

Lời giải

Ta có:

$$y' = (x \sin x)' = x' \cdot \sin x + (\sin x)' \cdot x = \sin x + x \cos x$$

$$y'' = (\sin x + x \cos x)' = (\sin x)' + (x \cos x)' \\ = \cos x + x' \cdot \cos x + (\cos x)' \cdot x = 2\cos x - x \sin x$$

Câu 7: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = x^3 - x - 3 \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2;$$

Trả lời: $y = 11x - 19$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 3$, gọi điểm $M(2;3)$ là tọa độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (x^3 - x - 3)' = 3x^2 - 1$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là $y'(2) = 11$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y - 3 = 11(x - 2) \Leftrightarrow y = 11x - 19.$$

Câu 8: Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số sau:

$$y = -\log_2 x \text{ tại điểm có hoành độ } x_0 = 2.$$

Trả lời: $y = \frac{-1}{2 \ln 2} x + \frac{1}{\ln 2} - 1$

Lời giải

Theo giả thiết, ta có: $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = -1$, gọi điểm $M(2; -1)$ là toạ độ tiếp điểm.

Ta có: $y' = (-\log_2 x)' = -\frac{1}{x \ln 2}$ nên tiếp tuyến của đồ thị tại điểm M có hệ số góc là $y'(2) = \frac{-1}{2 \ln 2}$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị đã cho tại điểm M là:

$$y + 1 = \frac{-1}{2 \ln 2}(x - 2) \Leftrightarrow y = \frac{-1}{2 \ln 2} x + \frac{1}{\ln 2} - 1.$$

Câu 9: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 3 \sin 2t + 2 \cos 2t$, trong đó t là thời gian tính bằng giây và s là quãng đường chuyển động được của chất điểm trong t giây tính bằng mét. Tính gia tốc của chất điểm đó khi $t = \frac{\pi}{4}$.

Trả lời: - 12

Lời giải

Ta có: $s'(t) = 3(\sin 2t)' + 2(\cos 2t)' = 6 \cos 2t - 4 \sin 2t$.

Và $s''(t) = 6(\cos 2t)' - 4(\sin 2t)' = -12 \sin 2t - 8 \cos 2t$.

Gia tốc của chất điểm tại thời điểm $t = \frac{\pi}{4}$ là:

$$a\left(\frac{\pi}{4}\right) = s''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -12 \left[\sin \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] - 8 \left[\cos \left(2 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right] = -12$$

Câu 10: Dân số (tính theo nghìn người) của một thành phố được cho bởi công thức

$f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$, trong đó t (được tính bằng năm) là khoảng thời gian kể từ năm 2015. Tìm tốc độ tăng dân số trong năm 2025 của thành phố đó.

0,533 (nghìn người/năm)

Trả lời:

Lời giải

Đạo hàm của hàm số f biểu thị tốc độ tăng dân số của thành phố đó (tính bằng nghìn người/ năm), ta có: $f'(t) = \frac{120}{(t+5)^2}$.

Từ năm 2015 đến năm 2025 nghĩa là $t=10$.

Vậy tốc độ tăng dân số tại thời điểm $t=10$ là:

$$f'(10) = \frac{120}{(10+5)^2} = \frac{8}{15} \approx 0,533 \quad (\text{nghìn người/năm})$$

Câu 11: Nhiệt độ cơ thể của một người trong thời gian bị bệnh được cho bởi công thức $T(t) = -0,1t^2 + 1,2t + 98,6$, trong đó T là nhiệt độ (tính theo đơn vị đo Fahrenheit) tại thời điểm t (tính theo ngày). Tìm tốc độ thay đổi nhiệt độ ở thời điểm $t=2$.

Trả lời: $0,8 (^{\circ}F / \text{ngày})$.

Lời giải

Đạo hàm của hàm số T biểu thị tốc độ thay đổi của nhiệt độ.

Ta có: $T'(t) = -0,2t + 1,2$.

Vậy tốc độ thay đổi nhiệt độ tại thời điểm $t=2$ là:

$$T'(2) = -0,2 \cdot 2 + 1,2 = 0,8 (^{\circ}F / \text{ngày}).$$

Câu 12: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2 + 4x - 1}{2x + 3}$

Trả lời: $\frac{2x^2 + 6x + 14}{(2x + 3)^2}$

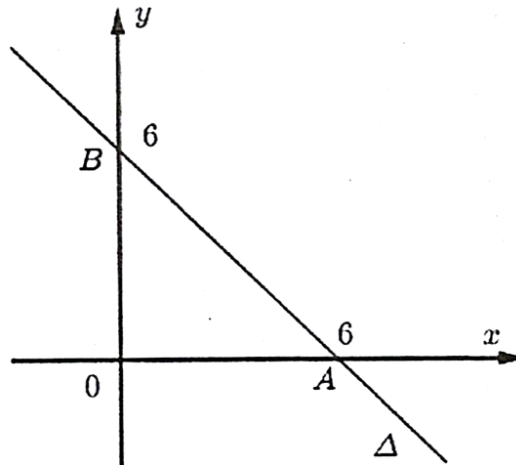
Lời giải

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(x^2 + 4x - 1)' \cdot (2x + 3) - (2x + 3)' \cdot (x^2 + 4x - 1)}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{(2x + 4)(2x + 3) - 2(x^2 + 4x - 1)}{(2x + 3)^2} = \frac{4x^2 + 14x + 12 - 2x^2 - 8x + 2}{(2x + 3)^2} \\ &= \frac{2x^2 + 6x + 14}{(2x + 3)^2} \end{aligned}$$

Câu 13: Cho hàm số $y = \frac{9}{x}$ có đồ thị là (C) . Biết tiếp tuyến của đồ thị (C) tại điểm $M(3;3)$ tạo với hai trục toạ độ một tam giác. Tính diện tích tam giác đó.

Trả lời: 18

Lời giải



Ta có $y' = -9 \cdot \frac{1}{x^2}$, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(3) = \frac{-9}{3^2} = -1$.

Phương trình tiếp tuyến (Δ) với (C) tại tiếp điểm M là:

$$y - 3 = -1(x - 3) \Leftrightarrow y = -x + 6$$

Biết (Δ) cắt trục hoành và trục tung lần lượt tại hai điểm $A(6;0), B(0;6)$ nên diện tích tam giác OAB vuông tại O bằng:

$$S_{\Delta OAB} = \frac{1}{2} OA \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \quad (\text{đơn vị diện tích})$$

Câu 14: Một con lắc lò xo dao động điều hoà theo phương ngang trên mặt phẳng

không ma sát, có phương trình chuyển động $x = 4\cos\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) + 4(\text{cm})$, trong đó t là thời gian tính bằng giây. Tìm thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng $0(\text{cm/s})$.

Trả lời: $t = \frac{2}{3} + k(k \in \mathbb{Z})(s)$

Lời giải

Ta có:
$$v(t) = x' = -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right).$$

Thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 nghĩa là $v(t) = 0$

$$\Leftrightarrow -4\pi \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\pi t - \frac{2\pi}{3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \pi t - \frac{2\pi}{3} = k\pi \Leftrightarrow t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z}).$$

Vậy các thời điểm mà vận tốc tức thời của con lắc bằng 0 là:

$$t = \frac{2}{3} + k (k \in \mathbb{Z}) (s)$$

Câu 15: Cân nặng trung bình của một em bé trong độ tuổi từ 0 đến 36 tháng có thể được tính gần đúng bởi hàm số $w(t) = 0,00076t^3 - 0,06t^2 + 1,8t + 8,2$, trong đó t được tính bằng tháng và w được tính bằng pound. Tính tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi.

Trả lời: 0,513 (pound/tháng)

Lời giải

Ta có:
$$w'(t) = \frac{57}{25000}t^2 - \frac{3}{25}t + 1,8.$$

Tốc độ thay đổi cân nặng của em bé đó tại thời điểm 15 tháng tuổi là:

$$w'(15) = \frac{57}{25000} \cdot 15^2 - \frac{3}{25} \cdot 15 + 1,8 = 0,513 \text{ (pound/tháng)}$$

Câu 16: Cho hàm số $y = -x^3 + 3x^2 + 9x - 1$ có đồ thị là (C) . Tìm hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến tại một điểm M trên đồ thị (C) .

Trả lời: $y'(1) = 12$

Lời giải

Gọi điểm $M(x_0; y_0) \in (C)$ là toạ độ tiếp điểm và $y' = -3x^2 + 6x + 9$.

Hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là $y'(x_0) = -3x_0^2 + 6x_0 + 9$.

Ta thấy, hệ số góc của tiếp tuyến tại điểm M là một hàm số có đồ thị là một

parabol, có đỉnh $S\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) \Rightarrow S(1; 12)$ và hệ số $a = -3 < 0$ nên hàm số có giá trị lớn nhất bằng 12 tại $x_0 = 1$.

Vậy hệ số góc lớn nhất của tiếp tuyến là $y'(1)=12$

Câu 17: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

Trả lời: $\frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(1+x-x^2)'(1-x+x^2) - (1-x+x^2)'(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} \\&= \frac{(1-2x)(1-x+x^2) - (-1+2x)(1+x-x^2)}{(1-x+x^2)^2} = \frac{2-4x}{(1-x+x^2)^2}\end{aligned}$$

Câu 18: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = \frac{x^2-3x+3}{x-1}$

Trả lời: $\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$

Lời giải

$$\begin{aligned}y' &= \frac{(x^2-3x+3)'(x-1) - (x-1)'(x^2-3x+3)}{(x-1)^2} \\&= \frac{(2x-3)(x-1) - (x^2-3x+3)}{(x-1)^2} = \frac{x^2-2x}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

Câu 19: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = -\frac{2x+1}{(x+1)^2}$

Trả lời: $\frac{2x}{(x+1)^3}$

Lời giải

$$\begin{aligned}y' &= -\frac{(2x+1)' \cdot (x+1)^2 - [(x+1)^2]' \cdot (2x+1)}{(x+1)^4} = -\frac{2(x+1)^2 - 2(x+1)(2x+1)}{(x+1)^4} \\&= \frac{2x^2+2x}{(x+1)^4} \Rightarrow y' = \frac{2x}{(x+1)^3}\end{aligned}$$

Câu 20: Đạo hàm của hàm số $y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x}$ tại điểm $x = \frac{\pi}{6}$

Trả lời: $\frac{16}{3}$

Lời giải

$$y = \frac{\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin x \cdot \cos x} = \frac{-\cos 2x}{\frac{1}{2} \sin 2x} = -2 \cot 2x$$

$$\Rightarrow y' = -2 \frac{-2}{\sin^2 2x} = \frac{4}{\sin^2 2x} \Rightarrow y' \left(\frac{\pi}{6} \right) = \frac{16}{3}$$

Câu 21: Cho hàm số $y = f(x) = \sqrt{\tan x + \cot x}$. Tính $f' \left(\frac{\pi}{4} \right)$.

Lời giải

Trả lời: 0

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x - (1 + \cot^2 x)}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} = \frac{\tan^2 x - \cot^2 x}{2\sqrt{\tan x + \cot x}} \Rightarrow f'(0) = \frac{\tan^2 \frac{\pi}{4} - \cot^2 \frac{\pi}{4}}{2\sqrt{\tan \frac{\pi}{4} + \cot \frac{\pi}{4}}} = 0$$

Câu 22: Tính đạo hàm của hàm số sau: $y = (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x$

Trả lời: $(2x + 2) \cdot 5^x + (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x \ln 5$

Lời giải

$$y' = (x^2 + 2x - 2)' \cdot 5^x + (5^x)' \cdot (x^2 + 2x - 2) = (2x + 2) \cdot 5^x + (x^2 + 2x - 2) \cdot 5^x \ln 5$$

Câu 23: Tính đạo hàm của hàm số $y = 5^x + \log_2 x + \ln(2x) + e^{-x} + \sqrt{3}$.

Trả lời: $5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x} - e^{-x}$

Lời giải

$$y = 5^x + \log_2 x + \ln(2x) + e^{-x} + \sqrt{3} \Rightarrow y' = 5^x \cdot \ln 5 + \frac{1}{x \ln 2} + \frac{1}{x} - e^{-x}$$

Câu 24: Cho hàm số $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}}$.

Tính tổng $T = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2023)$.

Trả lời: $\frac{\sqrt{2024} - 1}{2\sqrt{2024}}$

Lời giải

Tập xác định $D = [0; +\infty)$.

Ta có $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{x+1}} = (\sqrt{x+2} + \sqrt{x}) - (\sqrt{x+2} + \sqrt{x+1})$
 $= \sqrt{x} - \sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x+1}} \right).$$

$$T = f'(1) + f'(2) + f'(3) + \dots + f'(2023)$$

Vậy

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \dots + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{2023}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{1}} - \frac{1}{\sqrt{2024}} \right)$$

$$= \frac{\sqrt{2024} - 1}{2\sqrt{2024}}.$$

Câu 25: Chứng minh hàm số $f(x) = \sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 2x$ có đạo hàm không phụ thuộc x .

Trả lời: -2

Lời giải

$$f'(x) = (\sin^6 x + \cos^6 x + 3 \sin^2 x \cos^2 x - 2x)'$$

$$= 6 \sin^5 x \cos x - 6 \cos^5 x \sin x + 6 \sin x \cos^3 x - 6 \sin^3 x \cos x - 2$$

$$= 6 \sin x \cos x (\sin^4 x - \cos^4 x + \cos^2 x - \sin^2 x) - 2$$

$$= 6 \sin x \cos x (\sin^2 x (\sin^2 x - 1) + \cos^2 x (1 - \cos^2 x)) - 2$$

$$= 6 \sin x \cos x (-\cos^2 x \sin^2 x + \cos^2 x \sin^2 x) - 2 = -2.$$

Câu 26: Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm có hoành độ bằng 2;

Trả lời: $y = -x + 5$

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ và $y(2) = 3$

$$y'(2) = -\frac{1}{(2-1)^2} = -1$$

Do đó phương trình tiếp tuyến với (C) tại điểm $(2;3)$ là:
 $y = -1(x-2) + 3 \Rightarrow y = -x + 5$

Câu 27: Cho đường cong $(C): y = \frac{2x-1}{x-1}$.

Viết phương trình tiếp tuyến với (C) biết hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$.

Trả lời: $y = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$; $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Lời giải

Ta có: $y' = -\frac{1}{(x-1)^2}$ và $y(2) = 3$

Hệ số góc của tiếp tuyến bằng $-\frac{1}{4}$

$$\Rightarrow -\frac{1}{(x_0-1)^2} = -\frac{1}{4} \Rightarrow (x_0-1)^2 = 4 \Rightarrow x_0 = 3, x_0 = -1$$

+ Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = \frac{5}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{4}(x-3) + \frac{5}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{13}{4}$

+ Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = \frac{3}{2}$. Phương trình tiếp tuyến là: $y = -\frac{1}{4}(x+1) + \frac{3}{2} = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$

Câu 28: Một chất điểm chuyển động theo phương trình $s(t) = 10 + t + 9t^2 - t^3$ trong đó s tính bằng mét, t tính bằng giây. Tính thời gian để vận tốc của chất điểm đạt giá trị lớn nhất (tính từ thời điểm ban đầu)?

Trả lời: $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$

Lời giải

Ta có $v(t) = s'(t) = -3t^2 + 9t + 1$ có đồ thị là Parabol, do đó $v(t)_{\max} \Leftrightarrow t = \frac{-9}{-6} = \frac{3}{2}$.

Câu 29: Một vật chuyển động theo quy luật $s = \frac{1}{3}t^3 - t^2 + 9t$, với t (giây) là khoảng thời gian tính từ lúc vật bắt đầu chuyển động và s (mét) là quãng đường vật đi được trong thời gian đó. Hỏi trong khoảng thời gian 10 giây, kể từ lúc bắt đầu chuyển động, vận tốc nhỏ nhất của vật đạt được bằng bao nhiêu?

Trả lời: $8(m/s)$

Lời giải

Vận tốc v của vật được tính theo công thức: $v(t) = s'(t) = t^2 - 2t + 9$.

Ta có: $t^2 - 2t + 9 = (t - 1)^2 + 8 \geq 8 \Rightarrow v \geq 8$.

Vậy vận tốc nhỏ nhất của vật là $8(m/s)$ đạt được tại thời điểm $t = 1$ (giây).

Câu 30: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời: $12m/s^2$

Lời giải

Gia tốc chuyển động tại $t = 3s$ là $s''(3)$

Ta có: $s'(t) = 3t^2 - 6t + 9; s''(t) = 6t - 6 \Rightarrow s''(3) = 12m/s^2$.

Câu 31: Một vật dao động điều hòa có phương trình $x = 2\sin \pi t$ (x tính bằng cm, t tính bằng giây). Tính thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Trả lời: $t = \frac{3}{2}$

Lời giải

Gia tốc của vật bằng đạo hàm cấp hai của phương trình chuyển động

Ta có: $x' = 2\pi \cos \pi t \Rightarrow a(t) = x''(t) = -2\pi^2 \sin \pi t$

$$V_1 \quad -1 \leq \sin \pi t \leq 1 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq -2\pi^2 \sin \pi t \leq 2\pi^2 \Leftrightarrow -2\pi^2 \leq a(t) \leq 2\pi^2$$

Gia tốc lớn nhất khi $\sin \pi t = -1 \Leftrightarrow \pi t = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} + 2k$

Với $k=0 \Rightarrow t = -\frac{1}{2}(l); k=1 \Rightarrow t = \frac{3}{2}$

Vậy tại $t = \frac{3}{2}$ giây là thời điểm đầu tiên vật có gia tốc lớn nhất.

Câu 32: Một vật chuyển động có phương trình $S = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1(m), t$ là thời gian tính bằng giây. Tính gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$.

Trả lời: $48m/s^2$

Lời giải

$$S = f(t) = t^4 - 3t^3 - 3t^2 + 2t + 1 \Rightarrow f'(t) = 4t^3 - 9t^2 - 6t + 2 \\ \Rightarrow a(t) = f''(t) = 12t^2 - 18t - 6$$

Gia tốc của vật tại thời điểm $t = 3s$ là $a(3) = 12.3^2 - 18.3 - 6 = 48m/s^2$.

Câu 33: Một chất điểm chuyển động có phương trình $s = -t^3 + t^2 + t + 4$ (t là thời gian tính bằng giây). Gia tốc của chuyển động tại thời điểm vận tốc đạt giá trị lớn nhất là bao nhiêu?

Trả lời: $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

Lời giải

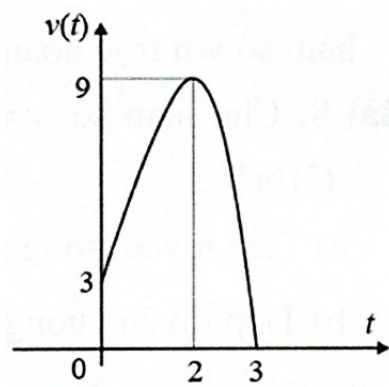
Vận tốc của chất điểm có phương trình là: $v = s' = -3t^2 + 2t + 1$.

Vận tốc của chất điểm đạt GTLN khi $t = \frac{-b}{2a} = \frac{1}{3}$.

Gia tốc của chất điểm có phương trình là: $s'' = -6t + 2$.

Tại thời điểm vận tốc đạt GTLN thì gia tốc bằng $s''\left(\frac{1}{3}\right) = 0$.

Câu 34: Một chuyển động có vận tốc được biểu diễn theo đồ thị hình bên. Tính gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$.



Trả lời: 3

Lời giải

Đồ thị của vận tốc là một Parabol có phương trình $v(t) = at^2 + bt + c$.

Trên hình vẽ đồ thị qua các điểm $(0;3), (2;9), (3;0)$ nên có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4a + 2b = 6 \\ 9a + 3b + c = 9 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -4 \\ b = 11 \\ c = 3 \end{cases}$$

Do đó phương trình của vận tốc là $v(t) = -4t^2 + 11t + 3$.

Vậy gia tốc của chuyển động tại thời điểm $t = 1(s)$ là: $a(1) = v'(1) = 3$

Câu 35: Một tên lửa bay vào không trung với quãng đường đi được là $S(t)(km)$ là hàm số phụ thuộc theo biến t (giây) theo biểu thức sau $s(t) = e^{t^2+3} + 2t \cdot e^{3t+1}(km)$. Tính vận tốc của tên lửa sau 1 giây?

Trả lời: $10e^4(km/s)$

Lời giải

$$v(t) = s'(t) = 2t \cdot e^{t^2+3} + 2e^{3t+1} + 6t \cdot e^{3t+1} \Rightarrow v(1) = 2 \cdot 1 \cdot e^4 + 2 \cdot e^4 + 6e^4 = 10e^4(km/s)$$

Câu 36: Sau khi phát hiện một dịch bệnh, các chuyên gia y tế ước tính số người nhiễm bệnh kể từ ngày xuất hiện bệnh nhân đầu tiên đến ngày thứ t là $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3$ (kết quả khảo sát trong 12 tháng liên tục). Nếu xem $f'(t)$ là tốc độ truyền bệnh (người/ngày) tại thời điểm t thì tốc độ truyền bệnh lớn nhất vào ngày thứ mấy?

Trả lời: ngày thứ 7

Lời giải

Ta có $f(t) = 35t^2 - \frac{5}{3}t^3 \Rightarrow f'(t) = 70t - 5t^2 (t > 0)$

Vì $f'(t)$ có đồ thị là một parabol có bề lõm quay xuống nên đạt giá trị cực đại tại $t = -\frac{70}{2(-5)} = 7$. Vậy vào ngày thứ 7 tốc độ truyền bệnh là nhanh nhất.

Câu 37: Một vật chuyển động với phương trình $S(t) = 4t^2 + t^3$, trong đó $t > 0, t$ tính bằng giây, $S(t)$ tính bằng m . Tìm gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11.

Trả lời: $14m/s^2$

Lời giải

Ta có: $v(t) = S'(t) = 8t + 3t^2$ và $a(t) = v'(t) = 6t + 8$.

Theo đề bài, ta có: $v = 11 \Rightarrow 3t^2 + 8t = 11 \Rightarrow t = 1 (t > 0)$.

Vậy gia tốc của vật tại thời điểm vận tốc của vật bằng 11 là $a(1) = 14m/s^2$.

Câu 38: Tính đạo hàm hàm số sau: $y = \frac{3^x - 3^{-x}}{3^x + 3^{-x}}$

Trả lời: $\frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}$

Lời giải

$$y' = \frac{(3^x \ln 3 + 3^{-x} \ln 3)(3^x + 3^{-x}) - (3^x - 3^{-x})(3^x \ln 3 - 3^{-x} \ln 3)}{(3^x + 3^{-x})^2}$$

$$= \frac{(3^x + 3^{-x})^2 - (3^x - 3^{-x})^2}{(3^x + 3^{-x})^2} \ln 3 = \frac{4 \ln 3}{(3^x + 3^{-x})^2}$$

Câu 39: Cho chuyển động thẳng xác định bởi phương trình $S = -t^3 + 3t^2 + 9t$, trong đó t tính bằng giây và S tính bằng mét. Tính vận tốc của chuyển động tại thời điểm gia tốc triệt tiêu.

Trả lời: 12 m/s

Lời giải

Ta có: $v = S' = -3t^2 + 6t + 9$ và $a = v' = -6t + 6$.

Gia tốc triệt tiêu khi $a = 0 \Rightarrow t = 1$.

Khi đó vận tốc của chuyển động là $v(1) = 12\text{ m/s}$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>