

Người làm: Nguyễn Cường

Zalo: Nguyễn Cường - số đt zalo: 0349906504

Email: caocuongmathus@gmail.com

CD9: CHỨNG MINH BĐT và tìm GTLN, GTNN

Dạng 1. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

A. Trắc nghiệm (nếu có) $C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10$

Câu 1. (HSG 7 huyện Lạng Giang 2022 - 2023)

Giá trị nhỏ nhất của biểu thức: với $x \geq 0$ là:

A. 10

B. 11

C. 1

D. - 10

Lời giải

Ta có: $\sqrt{x} \geq 0, \forall x \geq 0; (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x, y$

$\Rightarrow \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 \geq 0, \forall x \geq 0, \forall y$

$\Rightarrow C = \sqrt{x} + (x - 2y + 1)^2 + 10 \geq 10, \forall x \geq 0, \forall y$

Giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi:

$$\begin{cases} \sqrt{x} = 0 \\ (x - 2y + 1)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 2y + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C bằng 10 khi $x = 0; y = \frac{1}{2}$.

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Tương Dương 2022 - 2023)

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

Lời giải

Ta có: $P = (2x - 5y)^2 - (15y - 6x)^2 - |xy - 90|$

$= (2x - 5y)^2 - (6x - 15y)^2 - |xy - 90|$

$= (2x - 5y)^2 - 9(2x - 5y)^2 - |xy - 90|$

$= - [8(2x - 5y)^2 + |xy - 90|]$

Ta có: $8(2x - 5y)^2 \geq 0$ với mọi giá trị của x, y ;

$|xy - 90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Do đó $8(2x - 5y)^2 + |xy - 90| \geq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Nên $- [8(2x - 5y)^2 + |xy - 90|] \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Hay $P \leq 0$ với mọi giá trị của x, y .

Dấu "=" xảy ra khi và chỉ khi $(2x - 5y)^2 = 0$ và $|xy - 90| = 0$.

+ Với $|xy - 90| = 0$ thì $xy - 90 = 0$ (1).

+ Với $(2x - 5y)^2 = 0$ thì $2x - 5y = 0$. Do đó $2x = 5y \Rightarrow \frac{x}{5} = \frac{y}{2}$.

Đặt $\frac{x}{5} = \frac{y}{2} = k$, khi đó $x = 5k, y = 2k$, thay $x = 5k, y = 2k$ vào (1) ta được:

$$5k \cdot 2k - 90 = 0 \Rightarrow k^2 = 9. \text{ Suy ra } k = 3 \text{ hoặc } k = -3.$$

Nếu $k = 3$ thì $x = 15; y = 6$;

Nếu $k = -3$ thì $x = -15; y = -6$.

Vậy giá trị lớn nhất của biểu thức P là 0 khi và chỉ khi $x = 15; y = 6$ hoặc $x = -15; y = -6$.

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Lang Chánh 2022 - 2023)

Cho các số không âm x, y, z thỏa mãn: $x + 3z = 2022$ và $x + 2y = 2023$. Tính giá trị lớn

nhất của biểu thức: $A = x + y + z + \frac{1}{2}$.

Lời giải

Ta có: $x + 3z = 2022$ (1) và $x + 2y = 2023$ (2)

Từ (1) $\Rightarrow x = 2022 - 3z$

Trừ từng vế của (2) cho (1), ta được: $2y - 3z = 1 \Rightarrow y = \frac{1 + 3z}{2}$
 Khi đó:

$$\begin{aligned} A &= x + y + z + \frac{1}{2} = (2022 - 3z) + \frac{1 + 3z}{2} + z + \frac{1}{2} \\ &= 2022 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 3z + \frac{3}{2}z + z \\ &= 2023 - \frac{1}{2}z \end{aligned}$$

$$\text{Vì } z \geq 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}z \leq 0 \Rightarrow 2023 - \frac{1}{2}z \leq 2023 \Rightarrow A \leq 2023.$$

$$\text{Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: } \begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

$$\text{Vậy: GTLN của A bằng } 2023 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x = 2022 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Câu 3. (HSG 7 TP Bắc Giang 2022 - 2023)

$$C = \frac{|x - 2022| + 2023}{|x - 2022| + 2024}.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

Ta có
$$C = \frac{(|x - 2022| + 2024) - 1}{|x - 2022| + 2024} = 1 - \frac{1}{|x - 2022| + 2024}$$

Ta thấy C đạt giá trị nhỏ nhất khi $\frac{1}{|x - 2022| + 2024}$ đạt giá trị lớn nhất
 $\Rightarrow |x - 2022| + 2024$ đạt giá trị nhỏ nhất (vì $1 > 0$).

Mặt khác $|x - 2022| \geq 0, \forall x \Rightarrow |x - 2022| + 2024 \geq 2024, \forall x$

Do đó
$$C \geq 1 - \frac{1}{2024} = \frac{2023}{2024}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $x - 2022 = 0$. Suy ra $x = 2022$

Vậy giá trị nhỏ nhất của C là $\frac{2023}{2024}$.

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm giá trị nhỏ nhất của $A = |3x - 4| + |5x - 7| - x + 2025$.

Lời giải

Ta có:
$$3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{4}{3}$$

$$5x - 7 = 0 \Rightarrow x = \frac{7}{5}$$

Ta có bảng xét dấu sau:

		$\frac{4}{3}$		$\frac{7}{5}$	
$3x - 4$	-	0	+	II	+
$5x - 7$	-	II	-	0	+

TH1: với $x \leq \frac{4}{3} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 4| = 4 - 3x \\ |5x - 7| = 7 - 5x \end{cases}$

Khi đó
$$A = 4 - 3x + 7 - 5x - x + 2025 = 2036 - 9x \geq 2036 - 9 \cdot \frac{4}{3} = 2024 \quad (1)$$

TH2: với $\frac{4}{3} < x < \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 4| = 3x - 4 \\ |5x - 7| = 5x - 7 \end{cases}$

Khi đó
$$A = 3x - 4 + 7 - 5x - x + 2025 = -3x + 2028 \geq -3 \cdot \frac{7}{5} + 2028 = \frac{10119}{5} \quad (2)$$

TH3: Với $x \geq \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} |3x - 4| = 3x - 4 \\ |5x - 7| = 5x - 7 \end{cases}$

Khi đó
$$A = 3x - 4 + 5x - 7 - x + 2025 = 7x - 2014 \geq 7 \cdot \frac{7}{5} - 2014 = \frac{10119}{5} \quad (3)$$

Từ (1); (2) và (3) suy ra $A \geq \frac{10119}{5} \quad \forall x$. Dấu "=" xảy ra khi $x = \frac{7}{5}$.

Vậy giá trị nhỏ nhất của A là $\frac{10119}{5}$ khi $x = \frac{7}{5}$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Gia Viễn, Ninh Bình 2022 - 2023)

$$P = 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Lời giải

$$P = 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| + x^2 - 4x + 7.$$

Ta có:

$$6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| \geq 0, \forall y$$

$$x^2 - 4x + 7 = x^2 - 2x - 2x + 4 + 3 = x(x - 2) - 2(x - 2) + 3$$

$$= (x - 2) \cdot (x - 2) + 3 = (x - 2)^2 + 3 > 0, \forall x \quad (\text{vì } (x - 2)^2 \geq 0, \forall x).$$

$$\Rightarrow P \geq 3, \forall x, y. \quad \text{Dấu “=” xảy ra khi: } \begin{cases} 6 \cdot \left| y - \frac{1}{8} \right| = 0 \\ (x - 2)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}$$

$$\text{Vậy giá trị nhỏ nhất của biểu thức P là 3 khi } \begin{cases} y = \frac{1}{8} \\ x = 2 \end{cases}.$$

Dạng 2.1. Bất đẳng thức về chứng minh tổng phân số tự nhiên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Đồng Xuân 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100}$. Chứng minh rằng $\frac{7}{12} < A < \frac{5}{6}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100} \\ &= \frac{5}{6} - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) - \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{7} \right) - \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9} \right) - \dots - \left(\frac{1}{98} - \frac{1}{99} \right) - \frac{1}{100} < \frac{5}{6} \quad (1) \end{aligned}$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \dots + \frac{1}{99.100} = \frac{1}{2} + \frac{1}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} \\ A &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \right) + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} = \frac{7}{12} + \frac{1}{30} + \dots + \frac{1}{9900} > \frac{7}{12} \quad (2) \end{aligned}$$

Từ (1) và (2) ta suy ra điều phải chứng minh.

Dạng 2.2. Bất đẳng thức về chứng minh tổng lũy thừa

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Ninh Giang 2022 - 2023)

Chứng minh rằng: $A = \frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} < \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có $3A = 3 \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right) = 1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}}$

$$3A - A = \left(1 + \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} + \frac{4}{3^3} + \frac{5}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2021}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{2022}{3^{2022}} \right)$$

$$3A - A = 1 + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right) - \frac{2022}{3^{2022}}$$

Đặt $B = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}}$

$$3B = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}}$$

$$3B - B = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2020}} \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2021}} \right)$$

$$2B = 1 - \frac{1}{3^{2021}}$$

$$B = \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 3^{2021}} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 2A < 1 + \frac{1}{2} - \frac{2022}{3^{2022}} \Rightarrow A < \frac{3}{4} - \frac{1011}{3^{2022}}$$

$$\Rightarrow A < \frac{3}{4}$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Chí Linh 2022 - 2023)

Chứng minh $S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$.

Lời giải

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}}$$

Nên ta có $4S = 1 + \frac{2}{4} + \frac{3}{4^2} + \frac{4}{4^3} + \dots + \frac{2023}{4^{2022}}$

$$4S - S = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}} - \frac{2023}{4^{2023}}$$

$$3S < 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$$

Đặt $A = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \dots + \frac{1}{4^{2022}}$

$$4A = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^{2021}}$$

$$4A - A = 4 - \frac{1}{4^{2022}}$$

$$\Rightarrow 3A < 4 \Rightarrow A < \frac{4}{3}$$

$$S < \frac{4}{9} < \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Suy ra

$$S = \frac{1}{4} + \frac{2}{4^2} + \frac{3}{4^3} + \frac{4}{4^4} + \dots + \frac{2023}{4^{2023}} < \frac{1}{2}$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 huyện Hà Trung 2 2022 - 2023)

Cho biểu thức: $S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$ với $n \in N$ và $n > 2$. Chứng minh rằng S không phải là số tự nhiên.

Lời giải

$$S = \frac{3}{4} + \frac{8}{9} + \frac{15}{16} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2} \text{ với } n \in N \text{ và } n > 2.$$

$$\text{Ta có: } S = \frac{2^2 - 1}{2^2} + \frac{3^2 - 1}{3^2} + \frac{4^2 - 1}{4^2} + \dots + \frac{n^2 - 1}{n^2}$$

$$S = 1 - \frac{1}{2^2} + 1 - \frac{1}{3^2} + 1 - \frac{1}{4^2} + 1 - \frac{1}{5^2} + \dots + 1 - \frac{1}{n^2}$$

$$S = (1 + 1 + 1 + \dots + 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$S = (n - 1) - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\Rightarrow S < (n - 1)$$

Lại có

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{(n - 1)n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n - 1} - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1 - \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{n^2} < 1$$

$$\Rightarrow S > (n - 1) - 1$$

$$\Rightarrow S > n - 2$$

$\Rightarrow n - 2 < S < n - 1$ mà $n - 2$; $n - 1$ là hai số tự nhiên liên tiếp nên S không phải là số tự nhiên.

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Mường Lát 2022 - 2023)

$$\text{Cho } A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}. \text{ Chứng minh: } A < \frac{3}{16}.$$

Lời giải

Ta có:
$$A = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$3A = 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}}$$

$$3A + A = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$$

$$4A = \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \right) - \frac{100}{3^{100}} \quad (1)$$

Đặt
$$B = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}}$$

$$3B = 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}}$$

$$3B + B = 3 - \frac{1}{3^{99}}$$

$$4B = 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow B < \frac{3}{4} \quad (2)$$

$$4A < \frac{3}{4} - \frac{100}{3^{100}} < \frac{3}{4}$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$A < \frac{3}{16}$$

Do đó

Câu 5. (HSG 7 huyện Quảng Xương 2022 - 2023)

Chứng minh rằng:
$$\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} < \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Lời giải

Ta có

$$VT = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \quad (1)$$

$$3.VT = 3. \left(\frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{2023}} \right) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{2022}} \quad (2)$$

$$2.VT = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3^{2023}} \right) < \frac{1}{3}$$

Lấy (2) trừ (1) theo vế với vế ta được :

$$VT < \frac{1}{6} \quad (3)$$

Vậy :

$$VP = \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2}$$

Ta thấy
$$\frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \dots + \frac{1}{100^2} > \frac{1}{5.6} + \frac{1}{6.7} + \dots + \frac{1}{100.101}$$

$$VP > \frac{1}{5} - \frac{1}{101} = \frac{96}{505} > \frac{96}{576} = \frac{1}{6} \quad (4)$$

Nên

Từ (3) và (4) suy ra: $VP > VT$

Câu 6. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Quỳnh Phụ 2022 - 2023)

$$P = \frac{3 - 2x}{2 - x}$$

Cho biểu thức: $\frac{3 - 2x}{2 - x}$ với x là số nguyên. Tìm giá trị lớn nhất của P .

Lời giải

Ta có
$$P = \frac{3-2x}{2-x} = \frac{2x-3}{x-2} = \frac{2(x-2)+1}{x-2} = 2 + \frac{1}{x-2}.$$

Để P có giá trị lớn nhất khi và chỉ khi $\frac{1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất.

+ Với $x < 2 \Rightarrow x-2 < 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} < 0$ (1)

+ Với $x = 2 \Rightarrow x-2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2}$ không có nghĩa (2)

+ Với $x > 2 \Rightarrow x-2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{x-2} > 0$

Phân số $\frac{1}{x-2}$ có tử và mẫu đều dương, tử không đổi nên phân số đạt giá trị lớn nhất khi mẫu đạt giá trị nhỏ nhất.

Vì $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x-2 \in \mathbb{Z}$ và $x-2 > 0$ nên $x-2$ đạt giá trị nhỏ nhất khi

$x-2=1 \Leftrightarrow x=3 \Rightarrow \frac{1}{x-2}=1$ (3)

Từ (1), (2), (3) suy ra $\frac{1}{x-2}$ có giá trị lớn nhất là 1 khi $x=3$.

Vậy giá trị lớn nhất của P là 3 khi $x=3$.

Dạng 2.3. Bất đẳng thức về chứng minh tích của một dãy

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 2. Bất đẳng thức dạng chữ

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Kinh Môn 2022 - 2023)

Cho ba số dương $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng
$$\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2.$$

Lời giải

Ta có $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-a \geq 0 \\ 1-b \geq 0 \end{cases} \Rightarrow (1-a)(1-b) \geq 0$
 $\Leftrightarrow 1-a-b+ab \geq 0 \Leftrightarrow 1+ab \geq a+b$ (1)

Có: $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1 \Leftrightarrow \begin{cases} ab \geq 0 \\ 1 \geq c \end{cases}$ (2)

Cộng từng vế của (1) và (2) suy ra $1+ab+1+ab \geq a+b+c+0 \Rightarrow 2(1+ab) \geq a+b+c$

$\Rightarrow \frac{c}{2(1+ab)} \leq \frac{c}{a+b+c} \Rightarrow \frac{c}{1+ab} \leq \frac{2c}{a+b+c}.$

Chứng minh tương tự có: $\frac{a}{1+bc} \leq \frac{2a}{a+b+c}; \frac{b}{1+ac} \leq \frac{2b}{a+b+c}.$

$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c}$

$$\Leftrightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

$$\text{Vậy } \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Sơn 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$. Chứng minh rằng: $\frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$

Lời giải

Với $0 \leq a \leq b \leq c \leq 1$:

So sánh được: $(b-1)(c-1) \geq 0 \Rightarrow bc+1 \geq b+c \Rightarrow \frac{1}{bc+1} \leq \frac{1}{b+c} \Rightarrow \frac{a}{bc+1} \leq \frac{a}{b+c}$

$$\text{Tương tự: } \frac{b}{ac+1} \leq \frac{b}{a+c}; \quad \frac{c}{ab+1} \leq \frac{c}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \quad (1)$$

$$\text{Ta có: } \frac{a}{b+c} \leq 1 \Rightarrow \frac{a}{b+c} \leq \frac{a+a}{a+b+c}$$

$$\frac{b}{a+c} \leq 1 \Rightarrow \frac{b}{a+c} \leq \frac{b+b}{a+b+c}$$

$$\frac{c}{a+b} \leq 1 \Rightarrow \frac{c}{a+b} \leq \frac{c+c}{a+b+c}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \leq \frac{2a}{a+b+c} + \frac{2b}{a+b+c} + \frac{2c}{a+b+c} = 2 \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{a}{bc+1} + \frac{b}{ac+1} + \frac{c}{ab+1} \leq 2$$

Từ (1) và (2)

Câu 3. (HSG 7 Thị Xã Bỉnh Sơn 2022 - 2023)

Cho ba số x, y, z thỏa mãn $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$. Chứng minh $\frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$

Lời giải

Vì $0 \leq x \leq y \leq z \leq 1$ nên $x-1 \leq 0; y-1 \leq 0 \Rightarrow (x-1)(y-1) \geq 0 \Rightarrow xy+1 \geq x+y$

$$\Rightarrow \frac{1}{xy+1} \leq \frac{1}{x+y} \Rightarrow \frac{z}{xy+1} \leq \frac{z}{x+y} \quad (1)$$

$$\text{Tương tự } \frac{x}{yz+1} \leq \frac{x}{z+y} \quad (2)$$

$$\frac{y}{xz+1} \leq \frac{y}{x+z} \quad (3)$$

$$\text{Cộng từng vế (1), (2), (3) ta có } \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq \frac{x}{x+y} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{y+x} \quad (4)$$

$$\text{Mà } \frac{x}{y+z} \leq \frac{x+x}{x+y+z} \Rightarrow \frac{x}{y+z} \leq \frac{2x}{x+y+z}$$

$$\text{Chứng minh tương tự } \frac{y}{x+z} \leq \frac{2y}{x+y+z}; \quad \frac{z}{x+y} \leq \frac{2z}{x+y+z}$$

$$\text{Suy ra } \frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y} \leq \frac{2(x+y+z)}{x+y+z} \leq 2 \quad (5)$$

$$\text{Từ (4) và (5) suy ra } \frac{x}{yz+1} + \frac{y}{xz+1} + \frac{z}{xy+1} \leq 2$$

Câu 4. (HSG 7 TP Bắc Ninh 2022 - 2023)

Cho ba số a, b, c thỏa mãn $0 \leq a \leq b+1 \leq c+2$ và $a+b+c=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của c .

Lời giải

$$\begin{aligned} 0 \leq a \leq b+1 \leq c+2 & \quad 0 \leq a+b+1+c+2 \leq c+2+c+2+c+2 \\ \text{Vì} & \quad \text{nên} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 0 \leq 4 \leq 3c+6 \quad (\text{vì } a+b+c=1)$$

$$3c \geq -2 \Rightarrow c \geq \frac{-2}{3} \quad c = \frac{-2}{3} \quad a+b = \frac{5}{3}$$

Hay . Vậy giá trị nhỏ nhất của c là $\frac{-2}{3}$ khi đó $a+b = \frac{5}{3}$.

Câu 5. (HSG 7 Thị Xã Hoàng Mai 2022 - 2023)

Cho a, b, c là các số thỏa mãn: $a+b+c=0$. Chứng minh rằng $2022ab + 2023bc + 4045ca \leq 0$.

Lời giải

$$\begin{aligned} \text{Từ } a+b+c=0 & \Rightarrow b+c=-a; a+b=-c. \text{ Do đó} \\ 2022ab + 2023bc + 4045ca &= 2022ab + 2022ca + 2023bc + 2023ca \\ &= 2022a(b+c) + 2023c(b+a) \\ &= 2022a(-a) + 2023c(-c) \\ &= -2022a^2 - 2023c^2 \\ &= -(2022a^2 + 2023c^2) \leq 0 \end{aligned}$$

Vậy $2022ab + 2023bc + 4045ca \leq 0$ nếu $a+b+c=0$.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>