

Bài 1. (1,50 điểm)

- a) Hãy viết biểu thức sau : $\frac{2a+1}{a^2(a+1)}$ thành hiệu hai bình phương

$$M = \frac{2.1+1}{(1^2+1)^2} + \frac{2.2+1}{(2^2+2)^2} + \frac{2.3+1}{(3^2+3)^2} + \dots + \frac{2.2012+1}{(2012^2+2012)^2}$$

- b) Cho

Chứng minh rằng $M < 1$

Bài 2. (2,00 điểm)

- a) Chứng minh rằng $n^3 - 28n$ chia hết cho 48 với mọi n là số nguyên chẵn

$$\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15}$$

- b) Giải phương trình sau:

Bài 3. (2,50 điểm)

Cho biểu thức :
$$P = \left(\frac{x}{x-1} + \frac{1}{x^2-x} \right) : \left(\frac{1}{x+1} + \frac{2}{x^2-1} \right)$$

- a) Rút gọn biểu thức P

- b) Tìm giá trị của x để $P > -1$

- c) Giải phương trình $|P| = 2$

Bài 4. (1,00 điểm)

Cho $a > 0; b > 0$ và $a^2 + b^2 = 10$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $Q = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

Bài 5. (3,00 điểm)

Cho tam giác ABC có $AB = 2a; AC = 3a; BC = 4a$. Đường phân giác AD và BE cắt nhau tại I. Gọi M là trung điểm của AC, G là trọng tâm tam giác ABC

- a) Tính độ dài đoạn thẳng BD theo a

- b) Chứng minh $IG \parallel AC$

- c) Tính tỉ số diện tích của tứ giác $EIGM$ và ΔABC

ĐÁP ÁN

Bài 1.

$$a) \frac{2a+1}{a^2(a+1)^2} = \frac{a^2+2a+1-a^2}{a^2(a+1)^2} = \frac{(a+1)^2-a^2}{a^2(a+1)^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 - \left(\frac{1}{a+1}\right)^2$$

$$b) \frac{2a+1}{(a^2+a)^2} = \frac{1}{a^2} - \frac{1}{(a+1)^2}$$

$$M = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{2012^2} - \frac{1}{2013^2}$$
$$= 1 - \frac{1}{2013^2} < 1 \Rightarrow M < 1$$

Bài 2.

$$a) \begin{aligned} n &= 2k, \text{ với } k \text{ là số nguyên; } n^3 - 28n = (2k)^3 - 28(2k) = 8k^3 - 56k \\ &= 8k(k^2 - 7) = 8k(k^2 - 1 - 6) \\ &= 8k(k^2 - 1) - 48k = 8k(k-1)(k+1) - 48k \end{aligned}$$

$k(k-1)(k+1)$ là tích ba số nguyên liên tiếp nên chia hết cho 6 nên $8k(k-1)(k+1) - 48k$ chia hết cho 48

$$b) \text{ĐKXD: } x \neq -15; x \neq 1; x \neq -6$$

$$\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15} = \frac{x^2+3x+7+3x+2}{x^2+5x-6+x+15} = \frac{x^2+6x+9}{x^2+6x+9} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2}$$

Thay $x = -3$ vào phương trình và kết luận nghiệm của phương trình

Với $x \neq -3$ ta có:

$$\frac{x^2+3x+7}{x^2+5x-6} = \frac{3x+2}{x+15} = \frac{(x+3)^2}{(x+3)^2} = 1 \Leftrightarrow 3x+2 = x+15 \Leftrightarrow x = \frac{13}{2} (tm)$$

$$S = \left\{ \frac{13}{2}; -3 \right\}$$

Vậy

Bài 3.

$$a) \text{ĐKXD: } x \neq 0; x \neq \pm 1$$

$$P = \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} : \frac{x-1+2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x^2 + 1}{x(x-1)} \cdot \frac{(x+1)(x-1)}{x+1} = \frac{x^2 + 1}{x}$$

$$b) \quad P > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} > -1 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} + 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 + x}{x} > 0$$

$$\text{Vì} \quad x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0 \quad \text{với mọi } x$$

$$\text{Để} \quad \frac{x^2 + 1 + x}{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0 \quad P > -1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

. Vậy

$$c) \quad |P| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} P = 2 \\ P = -2 \end{cases}$$

$$P = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = 2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 - 2x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = 1(ktm)$$

$$P = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1}{x} = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 + 1 + 2x}{x} = 0 \Leftrightarrow x = -1(ktm)$$

Vậy phương trình vô nghiệm

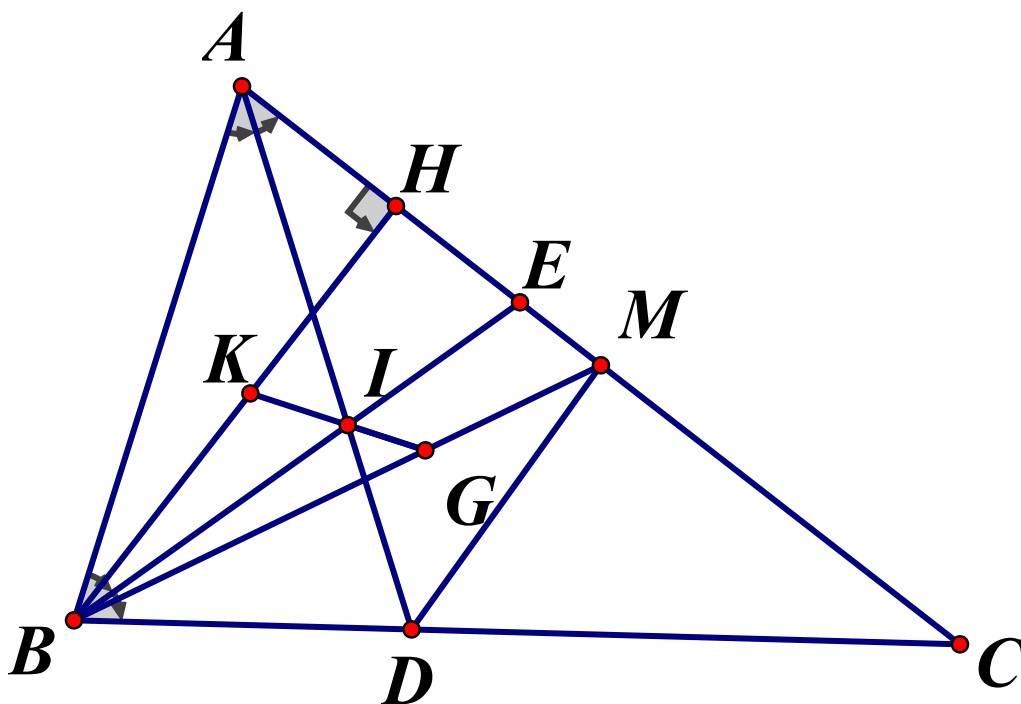
Bài 4.

$$a^2 + b^2 \geq 2ab; \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq 2 \frac{1}{ab}$$

$$(a^2 + b^2) \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) \geq 2ab \cdot \frac{2}{ab} \geq 4 \Rightarrow \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \geq \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\text{Vậy} \quad \text{Min} Q = \frac{2}{5} \Leftrightarrow a = b = \sqrt{5}$$

Bài 5.



$$\text{a) } \frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC}$$

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AC} = \frac{BD + DC}{AB + AC} = \frac{BC}{AB + AC} = \frac{4a}{5a} = \frac{4}{5} \Rightarrow BD = \frac{8a}{5}$$

$$\text{b) } \frac{EA}{AB} = \frac{EC}{BC} = \frac{EA + EC}{AB + BC} = \frac{AC}{AB + BC} = \frac{3a}{6a} = \frac{1}{2}$$

$$EA = a; EC = 2a$$

$$\Rightarrow \frac{IE}{IB} = \frac{EA}{AB} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta ABC \Rightarrow \frac{GM}{GB} = \frac{1}{2}$$

G là trọng tâm

$$\frac{GM}{GB} = \frac{IE}{IB} = \frac{1}{2} \Rightarrow IG \parallel EM$$

(ta lại đăo) $\Rightarrow IG \parallel AC$

$$\text{c) } \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} = \left(\frac{2}{3} \right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$EM = 0,5a; \quad \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{0,5a}{3a} = \frac{1}{6}; \quad \frac{S_{BIG}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BIG}}{S_{BEM}} \cdot \frac{S_{BEM}}{S_{ABC}} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{27}$$

Tính

$$\frac{S_{EIGM}}{S_{ABC}} = \frac{S_{BEM} - S_{AIG}}{S_{ABC}} = \frac{1}{6} - \frac{2}{27} = \frac{5}{54}$$