

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 16. CHỨNG MINH TÍNH ĐÚNG SAI MỆNH ĐỀ MŨ – LOGARIT.

1) PHƯƠNG PHÁP

Chứng minh tính đúng sai của mệnh đề mũ – logarit là một dạng tổng hợp khó. Vì vậy để làm được bài này ta phải vận dụng một cách khéo léo các phương pháp mà học từ các bài trước. Luyện tập các ví dụ dưới đây để lấy tích lũy kinh nghiệm xử lý.

1) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa THPT Quốc gia 2017] Cho các số thực a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

A. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} \log_a b$

B. $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2 \log_a b$

C. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4} \log_a b$

D. $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \log_a b$

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Ta hiểu, nếu đáp án A đúng thì phương trình $\log_{a^2}(ab) - \frac{1}{2} \log_a b = 0$ (1) với mọi giá trị của a, b thỏa mãn điều kiện a, b thực và $a \neq 1$. Ta chọn bất kì $A=1.15$ và $B=0.73$ chẳng hạn.

Nhập về trái của (1) vào máy tính Casio rồi dùng lệnh tính giá trị **CALC**

$\log_{A^2}(AB) - \frac{1}{2} \log_A B$

Máy tính báo kết quả là một số khác 0 vậy về trái của (1) khác 0 hay đáp án **A** sai.

- Tương tự ta thiết lập phương trình cho đáp án **B** là $\log_{a^2}(ab) - 2 - 2 \log_a b = 0$

Sử dụng chức năng **CALC** gán giá trị $A=1.15$ và $B=0.73$ cho về trái của (2)

$\log_{A^2}(AB) - 2 - 2 \log_A B$

Tiếp tục ra một số khác 0 vậy đáp án **B** cũng sai

- Tiếp tục phép thử này và ta sẽ tìm được đáp án **D** là đáp án chính xác

$\log_{A^2}(AB) - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \log_A B$

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Điều kiện $\begin{cases} a > 0, a \neq 1 \\ b > 0, b \neq 1 \end{cases}$

Ans→A

1

Lưu $b = \frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ vào biến B

Ans→B

$$\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$$

- Nếu đáp án A đúng thì $4\log_2 \frac{a+b}{6} - \log_2 a - \log_2 b = 0$ Để kiểm tra sự đúng sai của hệ thức này ta nhập về trái vào máy tính Casio rồi nhấn nút nếu kết quả ra 0 là đúng còn khác 0 là sai

$$4\log_2\left(\frac{A+B}{6}\right) - \log_2 b - 1.223032345$$

Kết quả biểu thức về trái ra khác 0 vậy đáp án A sai

- Tương tự như vậy với các đáp án B, C, D và cuối cùng ta tìm được đáp án D là đáp án chính xác

$$2\log_2\left(\frac{A+B}{3}\right) - \log_2 b = 0$$

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Biến đổi $a^2 + b^2 = 7ab \Leftrightarrow (a+b)^2 = 9ab \Leftrightarrow \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$
- Logarit cơ số 2 cả 2 vế ta được : $\log_2 \left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2 \frac{a+b}{3} = \log_2 a + \log_2 b$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán biến đổi tương đối là zic zắc đòi hỏi học sinh phải nhuần nhuyễn các công thức và ác phép biến đổi Logarit

VD4-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Nếu $\log_7 x = 8\log_7 ab^2 - 2\log_7 a^3b, (a, b > 0)$ thì x bằng :

A. a^4b^6

B. a^2b^{14}

C. a^6b^{12}

D. a^8b^{14}

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Chọn giá trị a, b thỏa mãn điều kiện $a, b > 0$ thực. Ta tiếp tục chọn $a = 1.15$ và $b = 2.05$
- Ta có $\log_7 x = 8\log_7 ab^2 - 2\log_7 a^3b \Leftrightarrow x = 7^{8\log_7 ab^2 - 2\log_7 a^3b}$

$$7^{\log_7(AB^2)} - 21c_p$$

$$30616.09068$$

Vậy ta biết được $x = 30616.09068$

- Tới đây ta chỉ cần tính giá trị các đáp án A, B, C, D xem đáp án nào bằng 30616.09068 là xong

Và ta thấy đáp số B là đáp số chính xác

$$[ALPHA] [(-)] [x^2] [ALPHA] [x^2] [1] [4] [CALC] [1] [\cdot] [1] [5] [=] [2] [\cdot] [0] [5] [=]$$

$$A^2B^{14}$$

$$30616.09068$$

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Thu gọn $\log_7 x = \log_7 (ab^2)^8 - \log_7 (a^3b)^2 = \log_7 (a^8b^{16}) - \log_7 a^6b^2 = \log_7 \frac{a^8b^{16}}{a^6b^2} = \log_7 a^2b^{14}$
- Vì cơ số $b > 1 \Rightarrow \log_b a < \log_b b \Leftrightarrow \log_b a < 1$ (2)
- Kết hợp (1) và (2) ta có : $\log_b a < 1 < \log_a b \Rightarrow D$ là đáp án chính xác

❖ **Bình luận :**

- Chú ý tính chất của cơ số : Nếu $a > 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u > v$ nhưng nếu $0 < a < 1$ thì $\log_a u > \log_a v \Leftrightarrow u < v$

VD5-[THPT Bảo Lâm – Lâm Đồng 2017] Cho hàm số $f(x) = 3^{x^2} \cdot 4^x$. Khẳng định nào sau đây sai :

- A. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 2 > 2$
- B. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \log_2 3 + 2x > 2 \log_2 3$
- C. $f(x) > 9 \Leftrightarrow 2x \log 3 + x \log 4 > \log 9$
- D. $f(x) > 9 \Leftrightarrow x^2 \ln 3 + x \ln 4 > 2 \ln 3$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Từ điều kiện đề bài, ta khai thác để tìm $x : f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} \cdot 4^x - 9 > 0$ (1)
- Dùng Mode 7 để dò khoảng nghiệm của (1)

$$[MODE] [7] [3] [x^2] [ALPHA] [)] [x^2] [\rightarrow] [X] [4] [x^2] [ALPHA] [)] [\rightarrow] [=] [=] [=] [=] [=] [=] [1] [0] [=] [1] [=]$$

Quan sát bảng giá trị (chú ý lấy phần $F(X) > 0$)

X	F(X)
-3	298.54
-2	-3.937
-1	-8.25

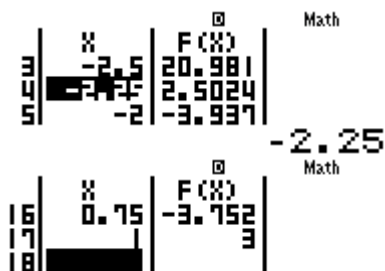
Thấy $x < -2, \dots$ Ta đặt $x < a$

X	F(X)
0	-8
1	3
2	1287

Thấy $x < 0, \dots$ Ta đặt $x > b$

- Để phóng to khoảng nghiệm và tìm chính xác a, b hơn ta chọn lại miền giá trị của X

$$[AC] [=] [=] [=] [3] [=] [1] [=] [0] [\cdot] [2] [5] [=]$$



Vậy $x > 0.75$ và $x < -2.25$

- Việc cuối cùng là ta chỉ cần dò khoảng nghiệm xuất hiện ở đáp án **A, B, C, D** xem khoảng nào trùng với khoảng nghiệm trên thì là đúng.

MODE **7** **ALPHA** **)** **x²** **+** **2** **ALPHA** **)** **log** **3** **▶** **2** **▶** **-** **2** **=** **=** **-** **3** **=**
1 **=** **0** **.** **2** **5** **=**



Ta thấy đáp án **A** trùng khoảng nghiệm vậy đáp án **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Biến đổi $f(x) > 9 \Leftrightarrow 3^{x^2} \cdot 4^x > 9 \Leftrightarrow \frac{3^{x^2}}{9} > \frac{1}{4^x} \Leftrightarrow 3^{x^2-2} > 4^{-x}$
- Logarit cơ số 3 cả 2 vế ta được :
 $\log_3(3^{x^2-2}) > \log_3(4^{-x}) \Leftrightarrow x^2 - 2 > -x \log_3 4 \Leftrightarrow x^2 + 2x \log_3 4 > 2$

❖ **Bình luận :**

- Một bài tự luận ta nhìn là biết dùng phương pháp logarit cả 2 vế luôn vì 2 số hạng trong bất phương trình khác cơ số và số mũ có nhân tử chung x

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào đúng ?

- A. $\log_a b + \log_a c = \log(b + c)$ B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b - c|$
 C. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ D. $\log_a b + \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

Bài 2-[Thi thử tỉnh Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Cho 2 số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{1}{2}\log_a b\right)$ B. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}(1 - 2\log_a b)$
 C. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{2}\log_a b\right)$ D. $\log_{a^3}\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 3\left(1 - \frac{1}{2}\log_a b\right)$

Bài 3-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Nếu $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$ thì ta có :

- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < a < 1$ C. $0 < a < 1 < b$ D. $1 < a < b$

Bài 4-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Khẳng định nào sau đây là đúng ?

A. Hàm số $y = e^{1999x}$ nghịch biến trên R B. Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

C. $\log_3(a+b) = \log_3 a + \log_3 b$ D. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ với mọi $a, b, c \in R$

Bài 5-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Cho $0 < a < 1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

A. $\log_a x > 0$ thì $0 < x < 1$

B. $\log_a x < 0$ thì $x > 1$

C. $x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$

D. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có tiệm cận đứng là trục

tung

Bài 6-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

A. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

B. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

C. Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a; a \neq 1$) có tập xác định R

D. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($0 < a; a \neq 1$) đối xứng nhau qua trục hoành

Bài 7-[THPT HN-Amsterdam 2017] Cho a, b là các số thực dương và $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây đúng ?

A. $\log_{\sqrt{a}}(a^2 + ab) = 2 + 2\log_a(a+b)$ B. $\log_{\sqrt{a}}(a^2 + ab) = 4\log_a(a+b)$

C. $\log_{\sqrt{a}}(a^2 + ab) = 1 + 4\log_a b$ D. $\log_{\sqrt{a}}(a^2 + ab) = 4 + 2\log_a b$

Bài 8-[THPT Kim Liên – HN 2017] Trong các khẳng định sau, khẳng định nào **sai** :

A. Hàm số $y = \log x$ là hàm số logarit

B. Hàm số $y = (3^{-1})^x$ là hàm số mũ

C. Hàm số $y = (\pi)^x$ nghịch biến trên R

D. Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

Bài 9-[Sở GD-ĐT Nam Định 2017] Cho $a > 0; a \neq 1$ và x, y là 2 số dương. Khẳng định nào sau đây là khẳng định **đúng** ?

A. $\log_a \frac{x}{y} = \frac{\log_a x}{\log_a y}$ B. $\log_a(x-y) = \frac{\log_a x}{\log_a y}$

C. $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$ D. $\log_a(x-y) = \log_a x - \log_a y$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Cho các số dương a, b, c và $a \neq 1$. Khẳng định nào đúng ?

A. $\log_a b + \log_a c = \log(b+c)$ B. $\log_a b + \log_a c = \log_a |b-c|$

C. $\log_a b + \log_a c = \log_a(bc)$ D. $\log_a b + \log_a c = \log_a\left(\frac{b}{c}\right)$

GIẢI

▪ Chọn $a = 1.25, b = 1.125, c = 2.175$ rồi lưu các giá trị này vào A, B, C

1 **.** **2** **5** **=** **SHIFT** **RCL** **(←)** **1** **.** **1** **2** **5** **=** **SHIFT** **RCL** **000** **2** **.** **1** **7** **5** **SHIFT** **RCL** **hyp**

Ans→A

Ans→B

2.175→C

$\frac{5}{4}$

$\frac{9}{8}$

$\frac{87}{40}$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Kiểm tra 4 đáp án và ta có đáp án C chính xác vì $\log_a b + \log_a c - \log_a (bc) = 0$

$\log_a(b) + \log_a(c) - \log_a(bc)$
 $= 0$

Bài 2-[Thi thử tính Lâm Đồng - Hà Nội 2017] Cho 2 số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng ?

- A. $\log_{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} \log_a b \right)$ B. $\log_{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) = \frac{1}{3} (1 - 2 \log_a b)$
 C. $\log_{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) = \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \log_a b \right)$ D. $\log_{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) = 3 \left(1 - \frac{1}{2} \log_a b \right)$

GIẢI

- Chọn $a = 1.25, b = 1.125$ rồi lưu các giá trị này vào A, B

$1.25 \rightarrow A$ $1.125 \rightarrow B$
 $\frac{5}{4}$ $\frac{9}{8}$

- Kiểm tra 4 đáp án và ta có đáp án C chính xác vì $\log_{a^3} \left(\frac{a}{\sqrt{b}} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \log_a b \right) = 0$

$\log_{A^3} \left(\frac{A}{\sqrt{B}} \right) - \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{2} \log_A B \right)$
 $= 0$

Bài 3-[Chuyên Nguyễn Thị Minh Khai 2017] Nếu $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}}$ và $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3}$ thì ta có :

- A. $0 < a < b < 1$ B. $0 < b < a < 1$ C. $0 < a < 1 < b$ D. $1 < a < b$

GIẢI

- Từ $a^{\frac{3}{4}} > a^{\frac{4}{5}} \Leftrightarrow a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{4}{5}} > 0$. Tìm miền giá trị của a bằng chức năng MODE 7 $\Rightarrow 0 < a < 1$

$a^{\frac{3}{4}} - a^{\frac{4}{5}}$
 $= 0$
 $a = 1$

- Từ $\log_b \frac{1}{2} < \log_b \frac{2}{3} \Leftrightarrow \log_b \frac{1}{2} - \log_b \frac{2}{3} < 0$. Tìm miền giá trị của b bằng chức năng MODE

$\log_b \frac{1}{2} - \log_b \frac{2}{3}$
 $= 0$
 $b = 1$

Tóm lại $0 < a < 1 < b \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

Bài 4-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Khẳng định nào sau đây là **đúng** ?

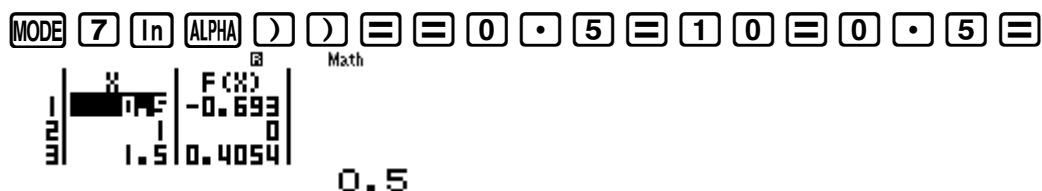
A. Hàm số $y = e^{1999x}$ nghịch biến trên R B. Hàm số $y = \ln x$ đồng biến trên $(0; +\infty)$

C. $\log_3(a+b) = \log_3 a + \log_3 b$

D. $\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1$ với mọi $a, b, c \in R$

GIẢI

- Khẳng định **A** có số mũ quá cao nên ta để lại sau cùng.
- Kiểm tra khẳng định **B** bằng chức năng MODE 7. Ta thấy $F(X)$ luôn tăng $\Rightarrow$ **B** chính xác



- Vì sao đáp án C, D sai thì ta chỉ việc chọn $a = 1.25$, $b = -3.75$ là rõ luôn (vì điều kiện ràng buộc không có nên để đảm bảo tính tổng quát ta sẽ chọn một giá trị dương một giá trị âm)

Bài 5-[Chuyên Vị Thanh – Hậu Giang 2017] Cho $0 < a < 1$. Tìm mệnh đề **sai** trong các mệnh đề sau :

A. $\log_a x > 0$ thì $0 < x < 1$

B. $\log_a x < 0$ thì $x > 1$

C. $x_1 < x_2$ thì $\log_a x_1 < \log_a x_2$

D. Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có tiệm cận đứng là trục tung

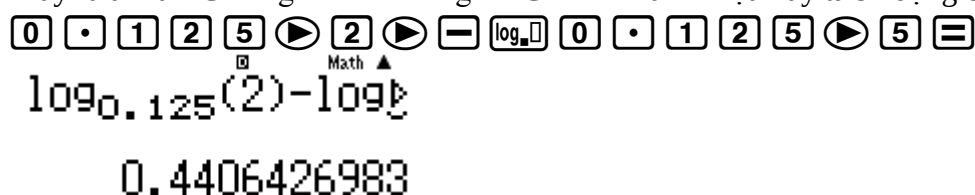
GIẢI

- Cho $0 < a < 1$ vậy ta chọn $a = 0.123$. Kiểm tra đáp số A ta dò miền nghiệm của phương trình $\log_a x > 0$ xem miền nghiệm có trùng với $0 < x < 1$ không là xong. Để làm việc này ta sử dụng chức năng MODE 7



Quan sát bảng giá trị ta được miền nghiệm $0 < x < 1$ (phần làm cho $F(X) > 0$), miền nghiệm này giống miền $0 < x < 1$ vậy đáp số **A** đúng

- Tương tự cách kiểm tra đáp án A ta áp dụng cho đáp án **B** thì thấy **B** đúng
- Để kiểm tra đáp án C ta chọn hai giá trị $x_1 = 2 < x_2 = 5$. Thiết lập hiệu $\log_a x_1 - \log_a x_2$. Nếu hiệu này ra âm thì C đúng còn ra dương thì C sai. Để tính hiệu này ta sử dụng chức năng CALC



Vậy hiệu $\log_a x_1 - \log_a x_2$ lớn hơn 0 hay $\log_a x_1 > \log_a x_2$. Vậy đáp án **C** là sai

Bài 6-[THPT Lương Thế Vinh – HN 2017] Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau ?

A. Hàm số $y = \log_a x$ với $0 < a < 1$ là một hàm số đồng biến trên khoảng $(0; +\infty)$

B. Hàm số $y = \log_a x$ với $a > 1$ là một hàm số nghịch biến trên khoảng $(0; +\infty)$

C. Hàm số $y = \log_a x$ ($0 < a; a \neq 1$) có tập xác định R

D. Đồ thị các hàm số $y = \log_a x$ và $y = \log_{\frac{1}{a}} x$ ($0 < a; a \neq 1$) đối xứng nhau qua trục hoành

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

GIẢI

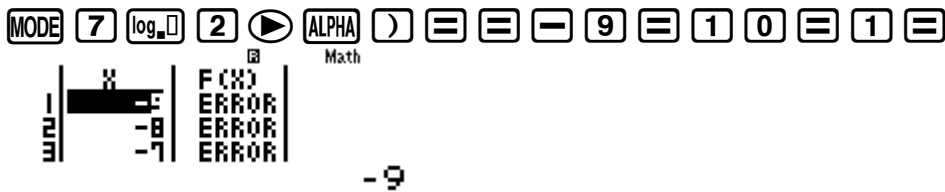
- Câu **D** khó hiểu nhất nên ta ưu tiên đi xác định đúng sai các đáp án **A**, **B**, **C** trước
- Kiểm tra khẳng định đáp án **A** bằng chức năng MODE 7 với $a = 0.5$ thỏa $9 < a < 1$. Ta thấy $F(X)$ giảm

$\Rightarrow$ **A** sai $\Rightarrow$ Đáp án **B** cũng sai



- Kiểm tra khẳng định đáp án **C** bằng chức năng MODE 7. Ta thấy hàm số không xác định khi $x \leq 0$

$\Rightarrow$ Đáp án **C** cũng sai $\Rightarrow$ Tóm lại đáp án chính xác là **D**



- Nếu tím hiểu vì sao hai đồ thị trên đối xứng nhau qua trục hoành thì ta phải hiểu ý nghĩa “nếu đồ thị hàm số $y = f(x)$ và đồ thị hàm số $y = g(x)$ đối xứng nhau qua trục hoành thì $f(x) = -g(x)$ ”

Vậy ta sẽ chọn $a = 2$; $x = 5$ rồi tính $y = \log_2 5 = 2.32...$ và $y = \log_{\frac{1}{2}} x = -2.32... \Rightarrow$ **D** đúng

$$\log_2(5) = 2.321928095 \quad \log_{\frac{1}{2}}(5) = -2.321928095$$

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 17. TÍNH NHANH BÀI TOÁN CÓ THAM SỐ MŨ – LOGARIT.

1) PHƯƠNG PHÁP

- **Bước 1 :** Cô lập m đưa về dạng $m \geq g(x)$ hoặc $m \leq g(x)$
- **Bước 2 :** Đưa bài toán ban đầu về bài toán giải phương trình, bất phương trình đã học.

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tập hợp tất cả các giá trị của m để phương trình $\log_2 x - \log_2 (x-2) = m$ có nghiệm :

A. $1 \leq m < +\infty$

B. $1 < m < +\infty$

C. $0 \leq m < +\infty$

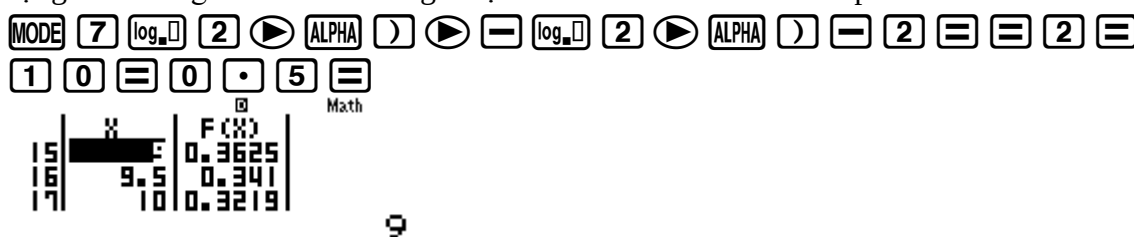
D. $0 < m < +\infty$

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Đặt $\log_2 x - \log_2 (x-2) = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min) \leq m \leq f(\max)$

- Tới đây bài toán tìm tham số m được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 2 End 10 Step 0.5



- Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $f(10) \approx 0.3219$ vậy đáp số **A** và **B** sai. Đồng thời khi x càng tăng vậy thì $F(X)$ càng giảm. Vậy câu hỏi đặt ra là $F(X)$ có giảm được về 0 hay không.

Ta tư duy nếu $F(X)$ giảm được về 0 có nghĩa là phương trình $f(x) = 0$ có nghiệm. Để kiểm tra dự đoán này ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE



[AC] :Cancel
[4][>]:Goto

Máy tính Casio báo phương trình này không có nghiệm. Vậy dấu $\equiv$ không xảy ra

- Tóm lại $f(x) > 0 \Leftrightarrow m > 0$ và **D** là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Điều kiện : $x > 2$

$$\text{Phương trình } \Leftrightarrow m = \log_2 \left(\frac{x}{x-2} \right) \Leftrightarrow m = \log_2 \left(1 + \frac{2}{x-2} \right)$$

- Vì $x > 2$ nên $x-2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-2} > 1 \Rightarrow \log_2 \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) > \log_2 1 = 0$

$$\text{Vậy } m = \log \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) > 0$$

❖ Bình luận :

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m = f(x)$ mà $f(x) > 0$ vậy $m > 0$ một tính chất bắt cầu hay và thường xuyên gặp

VD2-[Thi thử chuyên KHTN lần 2 năm 2017]

Tìm tham số m để phương trình $\ln x = mx^4$ có đúng một nghiệm :

A. $m = \frac{1}{4e}$

B. $m = \frac{1}{4e^4}$

C. $\frac{e^4}{4}$

D. $\frac{4}{\sqrt[4]{e}}$

GIẢI❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Cô lập $m = \frac{\ln x}{x^4} = f(x) \quad (m > 0)$

Tới đây bài toán tìm m trở thành bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có đúng 1 nghiệm thì hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và $y = m$ có đúng 1 giao điểm.

➤ Để khảo sát sự biến thiên của hàm $y = \frac{\ln x}{x^4}$ ta sử dụng chức năng MODE với thiết lập Start 0

End 5 Step 0.3



Quan sát sự biến thiên của $f(x)$ ta thấy $f(0.3) \approx -148.6$ tăng dần tới $f(1.2) \approx 0.0875$ rồi giảm xuống $f(5) \approx 2,9 \cdot 10^{-3} \approx 0$

➤ Ta thấy f cực đại ≈ 0.0875 . Để hai đồ thị $y = \frac{\ln x}{x^4}$ và $y = m$ có đúng 1 giao điểm thì đường thẳng $y = m$ tiếp xúc với đường cong $y = \frac{\ln x}{x^4}$ tại điểm cực đại $\Rightarrow m \approx 0.0875 \approx \frac{1}{4e}$

Vậy đáp án A là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Điều kiện : $x > 2$
- Phương trình $\Leftrightarrow m = \log_2 \left(\frac{x}{x-2} \right) \Leftrightarrow m = \log_2 \left(1 + \frac{2}{x-2} \right)$
- Vì $x > 2$ nên $x-2 > 0 \Rightarrow 1 + \frac{2}{x-2} > 1 \Rightarrow \log_2 \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) > \log_2 1 = 0$

Vậy $m = \log \left(1 + \frac{2}{x-2} \right) > 0$

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán mẫu mực của dạng tìm tham số m ta giải bằng cách kết hợp chức năng lập bảng giá trị MODE 7 và chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE một cách khéo léo
- Chú ý : $m = f(x)$ mà $f(x) > 0$ vậy $m > 0$ một tính chất bắt cầu hay và thường xuyên gặp

VD3-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Tìm m để phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + m = 0$ có nghiệm thuộc khoảng $(0;1)$?

A. $-1 \leq m \leq \frac{1}{4}$

B. $m < \frac{1}{4}$

C. $0 < m \leq \frac{1}{4}$

D. $m \leq \frac{1}{4}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Cô lập $m = -4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}} x$

Đặt $-4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1). Để phương trình (1) có nghiệm

thuộc khoảng $(0;1)$ thì m thuộc miền giá trị của $f(x)$ hay $f(\min) \leq m \leq f(\max)$ khi x chạy trên khoảng $(0;1)$

- Bài toán tìm tham số m lại được quy về bài toán tìm min, max của một hàm số. Ta sử dụng chức năng Mode với miền giá trị của x là Start 0 End 1 Step 0.1

$\boxed{7} \boxed{-} \boxed{4} \boxed{\times} \boxed{\log_2} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\sqrt{}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{\rightarrow} \boxed{x^2} \boxed{+} \boxed{\log_{\frac{1}{2}}} \boxed{=}$
 $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{=}$



Quan sát bảng giá trị $F(X)$ ta thấy $F(X) \leq f(0.7) \approx 0.2497 \approx \frac{1}{4}$ vậy đáp án đúng chỉ có thể là **B** hoặc **D**

- Tuy nhiên vấn đề là $m = \frac{1}{4}$ có nhận hay không. Nếu nhận thì đáp số D là đúng, nếu không nhận thì đáp số B là đúng.

Để kiểm tra tính chất này ta thế $m = \frac{1}{4}$ vào phương trình $4(\log_2 \sqrt{x})^2 - \log_{\frac{1}{2}} x + \frac{1}{4} = 0$ rồi

dùng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để xem có nghiệm x thuộc khoảng $(0;1)$ không là xong.

$\boxed{4} \boxed{\times} \boxed{\log_2} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\sqrt{}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{\rightarrow} \boxed{x^2} \boxed{-} \boxed{\log_{\frac{1}{2}}} \boxed{=}$
 $\boxed{1} \boxed{\rightarrow} \boxed{2} \boxed{\rightarrow} \boxed{\rightarrow} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\rightarrow} \boxed{+} \boxed{=}$
 $\boxed{1} \boxed{\rightarrow} \boxed{4} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{0} \boxed{\cdot} \boxed{5} \boxed{=}$

$X = 0.7071066456$
 $L-R = 0$

Máy tính Casio báo có nghiệm $x = 0.7071...$ thuộc khoảng $(0;1)$. Vậy dấu $\boxed{=}$ có xảy ra

- Tóm lại $m \leq \frac{1}{4}$ và **D** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Điều kiện : $x > 0$

▪ Ta có $m = -4(\log_2 \sqrt{x})^2 + \log_{\frac{1}{2}} x = -4\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 - \log_2 x = -(\log_2 x)^2 - \log_2 x$

Vậy $m = \frac{1}{4} - \left(\log_2 x + \frac{1}{2}\right)^2 \leq \frac{1}{4}$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

❖ **Bình luận :**

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Để xem dấu = xảy ra hay không thì ta sẽ thử cho dấu = xảy ra và sử dụng chức năng dò nghiệm. Nếu xuất hiện nghiệm thỏa mãn yêu cầu đề bài thì dấu = xảy ra.

VD4-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Với giá trị nào của tham số m thì phương trình $\log_{\frac{1}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = m$ có 3 nghiệm phân biệt?

- A. $m > 3$ B. $m < 2$ C. $m > 0$ D. $m = 2$

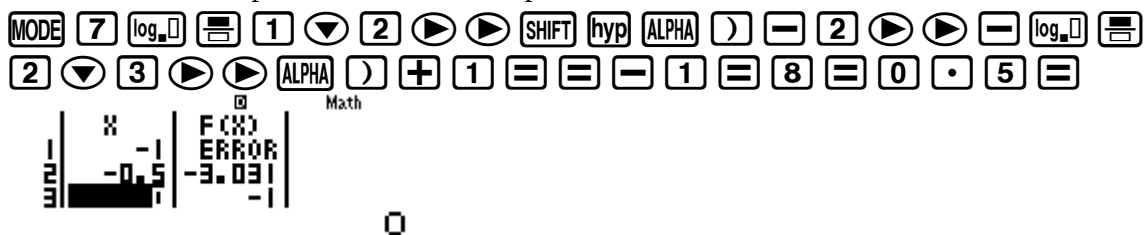
GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

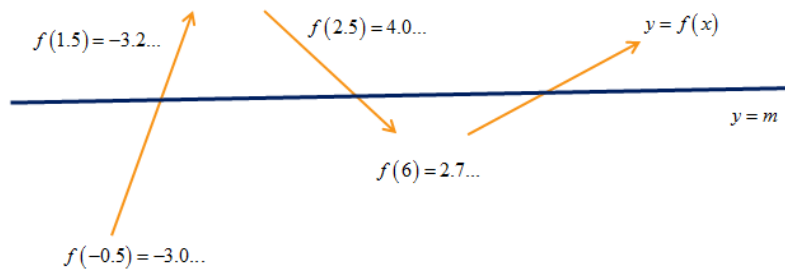
- Đặt $\log_{\frac{1}{2}}|x-2| - \log_{\frac{2}{3}}(x+1) = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1).

Bài toán tìm tham số m trở lại bài toán sự tương giao của 2 đồ thị. Để phương trình ban đầu có 3 nghiệm thì đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt

- Ta có $y = m$ là đường thẳng song song với trục hoành
 ➤ Để khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị TABLE với thiết lập Start -1 End 8 Step 0.5



Quan sát bảng giá trị ta mô tả được sự biến thiên của hàm $f(x)$ như sau



- Rõ ràng $m < 2$ thì 2 đồ thị trên cắt nhau tại 1 điểm $\Rightarrow$ Đáp số B sai
 $m = 2$ cũng cắt nhau tại 1 điểm $\Rightarrow$ Đáp án C và D cùng sai
 Vậy đáp số chính xác là A

❖ Bình luận :

- Bài toán thể hiện được sức mạnh của máy tính Casio đặc biệt trong việc khảo sát các hàm chứa dấu giá trị tuyệt đối. Cách tự luận rất rắc rối vì phải chia làm nhiều khoảng để khảo sát sự biến thiên nên tác giả không đề cập.

VD5-[Thi HK1 THPT Chu Văn An -HN năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $9^x - 3^{x+2} + m = 0$ có hai nghiệm trái dấu

- A. $m < 0$ B. $0 < m < 8$ C. $m \in \left(0; \frac{81}{4}\right)$ D. Không tồn tại

m

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Cô lập $m = -9^x + 3^{x+2}$

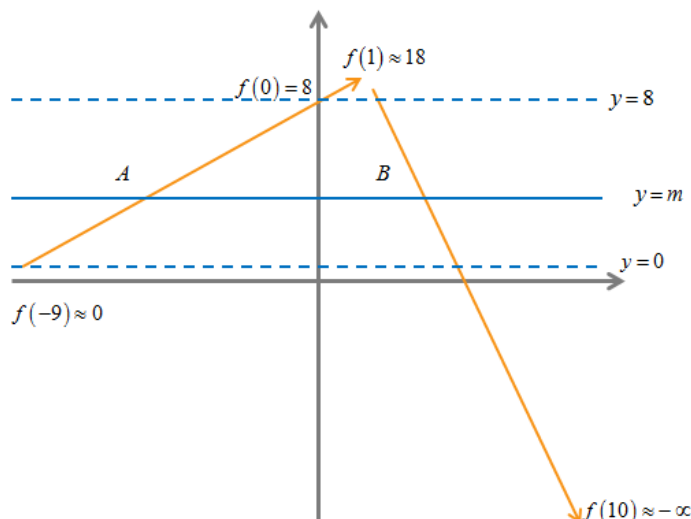
Đặt $-9^x + 3^{x+2} = f(x)$ khi đó $m = f(x)$ (1). Bài toán quy về dạng tương giao của 2 đồ thị.

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Để khảo sát sự biến thiên của hàm số $y = f(x)$ và đường đi của đồ thị ta sử dụng chức năng lập bảng giá trị MODE 7 với thiết lập Start -9 End 10 Step 1.



➤ Quan sát bảng giá trị ta mô tả đường đi của đồ thị hàm $y = f(x)$ như sau :



Nhìn sơ đồ ta thấy để đường thẳng $y = m$ cắt đồ thị $y = f(x)$ tại 2 điểm A và B có hoành độ trái dấu thì $0 < m < 8$

⇒ C là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Đặt $3^x = t$ ($t > 0$). Phương trình $\Leftrightarrow f(t) = t^2 - 9t + m = 0$ (1)
- Khi $x > 0$ thì $t > 3^0 = 1$. Khi $x < 0$ thì $t < 1$. Vậy để phương trình ban đầu có 2 nghiệm trái dấu thì phương trình (1) có 2 nghiệm dương thỏa mãn $t_1 < 1 < t_2$

$$\text{Vậy } \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta > 0 \\ S > 0 \\ P > 0 \\ af(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 81 - 4m > 0 \\ 9 > 0 \\ m > 0 \\ 1.(m - 8) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m < 8$$

$$\text{Dấu} = \text{xảy ra} \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \log_2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

❖ Bình luận :

- Hai giao điểm có hoành độ trái dấu thì phải nằm về 2 phía của trục tung
- Đáp án A sai vì 2 đồ thị chỉ cắt nhau tại 1 điểm nằm ở bên phải trục tung
- Nếu $18 > m > 8$ thì 2 đồ thị cắt nhau tại 2 điểm đều nằm bên phải trục tung vậy đáp án C sai.

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

A. $m = 3$

B. $m > 2$

C. $2 \leq m \leq 3$

D. $2 < m < 3$

Bài 2-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm ?

- A. 20 B. 35 C. 30 D. 25

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5.16^x - 2.81^x = m.36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

- A. $m > 0$ B. $\begin{cases} m \leq -\sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases}$ C. Với mọi m D. Không tồn tại

Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x - \log_3 (x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

- A. $m > 1$ B. $m < 0$ C. $0 < m \leq 1$ D. $m \leq 1$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình năm 2017]

Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để phương trình $4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6 = m$ có 3 nghiệm phân biệt ?

- A. $m = 3$ B. $m > 2$ C. $2 \leq m \leq 3$ D. $2 < m < 3$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

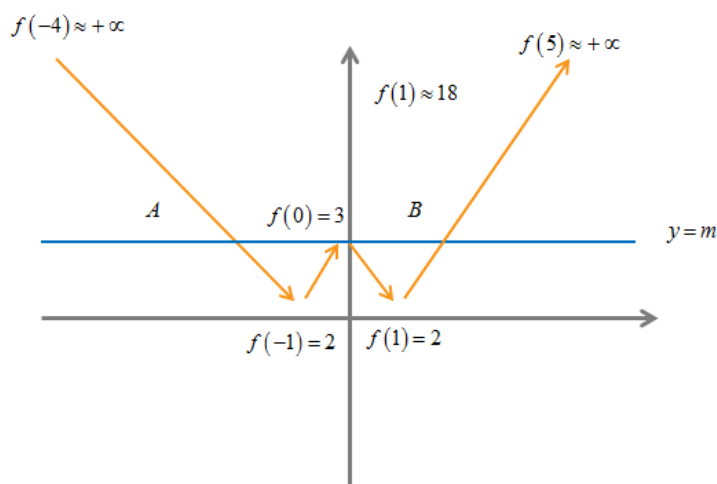
- Đặt $f(x) = 4^{x^2} - 2^{x^2+2} + 6$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start -4 End 5 Step 0.5

MODE **7** **4** **$x^{\square}$** **ALPHA** **)** **x^2** **$\rightarrow$** **-** **2** **$x^{\square}$** **ALPHA** **)** **x^2** **+** **2** **$\rightarrow$** **+** **6** **=** **=** **-** **4**
= **5** **=** **0** **.** **5** **=**



- 1

- Quan sát bảng biến thiên ta vẽ đường đi của hàm số



Rõ ràng $y = 3$ cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 3 điểm phân biệt vậy đáp án A là chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Đặt $2^{x^2} = t$ khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow t^2 - 4t + 6 - m = 0$ (1)
- Ta để ý tính chất sau : Nếu $t = 1$ thì $x = 0$ còn nếu $t > 0; t \neq 1$ thì $x = \pm \sqrt{\log_2 t}$. Vậy để phương trình ban đầu có 3 nghiệm phân biệt thì (1) có 2 nghiệm trong đó có 1 nghiệm $t = 0$ và 1 nghiệm $t > 0$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Với $t = 1 \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow 3 - m = 0 \Leftrightarrow m = 3$

Bài 2-[Thi thử THPT Lục Ngạn – Bắc Giang lần 1 năm 2017]

Số nguyên dương lớn nhất để phương trình $25^{1+\sqrt{1-x^2}} - (m+2)5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 2m+1 = 0$ có nghiệm ?

A. 20

B. 35

C. 30

D. 25

GIẢI

❖ Cách 1: CASIO

- Cô lập m ta được $m = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}} - 2 \cdot 5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}} - 2}$
- Đặt $f(x) = \frac{25^{1+\sqrt{1-x^2}} - 2 \cdot 5^{1+\sqrt{1-x^2}} + 1}{5^{1+\sqrt{1-x^2}} - 2}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start -1 End 1 Step 2

MODE 7 2 5 x[□] 1 + √ 1 - ALPHA) x² ► ► - 2 X 5 x[□] 1 +
√ 1 - ALPHA) x² ► ► + 1 ▼ 5 x[□] 1 + √ 1 - ALPHA) x² ► ►
- 2 = = - 1 = 1 = 0 . 2 =

Math
1 2 3	8	F(x)
-0.8	5.3333	
-0.6	13.222	
18.181		

- 1

- Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x) \leq f(0) = 25.043...$ hay $m \leq f(0)$ vậy m nguyên dương lớn nhất là 25 $\Rightarrow$ D là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo: Tự luận

- Điều kiện $1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$. Ta có $1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 1 + \sqrt{1 - x^2} \leq 2$
Đặt $5^{1+\sqrt{1-x^2}} = t \Rightarrow 5^1 \leq t \leq 5^2 \Leftrightarrow 5 \leq t \leq 25$
- Phương trình ban đầu trở thành $t^2 - (m+2)t + 2m+1 = 0 \Leftrightarrow m = \frac{t^2 - 2t + 1}{t - 2} = f(t)$

Vậy $m \leq f(\max)$

- Khảo sát sự biến thiên của hàm $f(x)$ trên miền $(5; 25)$ ta được $f(\max) = f(25) = 25.043$
Vậy m nguyên dương lớn nhất là 25

Bài 3-[Thi HK1 chuyên Amsterdam -HN năm 2017]

Tập giá trị của tham số m để phương trình $5 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x = m \cdot 36^x$ có đúng 1 nghiệm ?

A. $m > 0$

B. $\begin{cases} m \leq -\sqrt{2} \\ m \geq \sqrt{2} \end{cases}$

C. Với mọi m

D. Không tồn tại

m

GIẢI

❖ Cách 1: CASIO

- Cô lập m ta được $m = \frac{5 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x}{36^x}$
- Đặt $f(x) = \frac{5 \cdot 16^x - 2 \cdot 81^x}{36^x}$. Khi đó phương trình ban đầu $\Leftrightarrow f(x) = m$
- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start -9 End 10 Step 1

MODE 7 5 X 1 6 x[□] ALPHA) ► - 2 X 8 1 x[□] ALPHA) ▼ 3 6 x[□]
ALPHA) = = - 9 = 1 0 = 1 =



Quan sát bảng biến thiên ta thấy $f(x)$ luôn giảm hay hàm số $y = f(x)$ luôn nghịch biến.

Điều này có nghĩa là đường thẳng $y = m$ luôn cắt đồ thị hàm số $y = f(x)$ tại 1 điểm $\Rightarrow C$ chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow 5.16^x - m.36^x - 2.81^x = 0$ (1)

Chia cả 2 vế của (1) cho 81^x ta được : $5.\left(\frac{16}{81}\right)^x - m.\left(\frac{36}{81}\right)^x - 2 = 0 \Leftrightarrow 5\left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - m\left(\frac{4}{9}\right)^x - 2 = 0$ (2)

Đặt $\left(\frac{4}{9}\right)^x = t$ ($t > 0$) (2) $\Leftrightarrow 5t^2 - mt - 2 = 0$ (3)

Phương trình (3) có $5.(-2) = 10 < 0$ tức là (3) luôn có 2 nghiệm trái dấu

$\Rightarrow$ (3) luôn có 1 nghiệm dương 1 nghiệm âm

$\Rightarrow$ Phương trình ban đầu luôn có 1 nghiệm với mọi m

Bài 4-[Thi HK1 THPT Ngô Thì Nhậm - HN năm 2017]

Phương trình $\log_3 x - \log_3(x-2) = \log_{\sqrt{3}} m$ vô nghiệm khi :

- A. $m > 1$ B. $m < 0$ C. $0 < m \leq 1$ D. $m \leq 1$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Điều kiện : $x > 2$. Phương trình ban đầu $\Leftrightarrow \log_3\left(\frac{x}{x-2}\right) = 2\log_3 m \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_3\left(\frac{x}{x-2}\right) = \log_3 m$

$$\Leftrightarrow \log_3 \sqrt{\frac{x}{x-2}} = \log_3 m \Leftrightarrow m = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

Để phương trình ban đầu vô nghiệm thì đường thẳng $y = m$ không cắt đồ thị hàm số

$$y = f(x) = \sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

- Sử dụng Casio khảo sát sự biến thiên của đồ thị hàm số $y = f(x)$ với thiết lập Start 2 End 10 Step 0.5

MODE **7** **√** **□** **ALPHA** **)** **▼** **ALPHA** **)** **-** **2** **=** **=** **2** **=** **1** **0** **=** **0** **.** **5** **=**



- Để khảo sát chính xác hơn ta tính giới hạn của hàm $f(x)$ khi x tiến tới 2 cận là 2 và $+\infty$

√ **□** **ALPHA** **)** **▼** **ALPHA** **)** **-** **2** **CALC** **1** **0** **x^□** **9** **)** **=**

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

1.000000001

Vậy $\lim_{x \rightarrow +\infty} = 1$

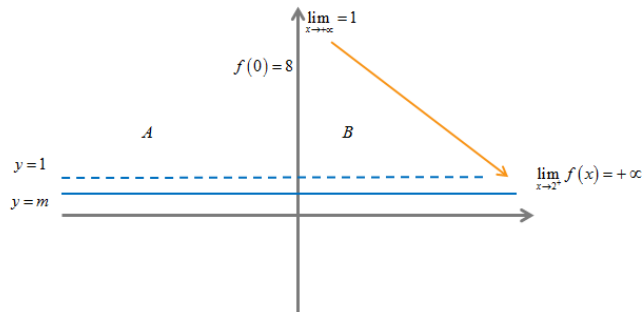
√ **□** **ALPHA** **)** **▼** **ALPHA** **)** **-** **2** **CALC** **2** **+** **0** **.** **0** **0** **0** **0** **0** **0** **0** **0** **1** **=**

$$\sqrt{\frac{x}{x-2}}$$

$$4472.136067$$

Vậy $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

- Quan sát bảng giá trị và 2 giới hạn ta vẽ đường đi cả đồ thị hàm số $y = f(x)$ và sự tương giao



Ta thấy ngay $m \leq 1$ thì 2 đồ thị không cắt nhau hay phương trình ban đầu vô nghiệm

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 18. TÌM NHANH NGUYÊN HÀM CỦA HÀM SỐ.

1) MỞ ĐẦU VỀ NGUYÊN HÀM VÀ TÍCH PHÂN

Hôm nay mình nhận được 1 câu hỏi của thầy Bình Kami, một câu hỏi về tính quãng đường của một vật chuyển động thẳng biến đổi đều, câu hỏi đã được xuất hiện trong đề thi minh họa của BGD-ĐT năm 2017

[Câu 24 đề minh họa 2017] Một ô tô đang chạy với vận tốc $10(m/s)$ thì người lái đạp phanh, từ thời điểm đó, ô tô chuyển động chậm dần đều với vận tốc $v(t) = -2t + 10(m/s)$, trong đó t là khoảng thời gian tính bằng giây, kể từ lúc bắt đầu đạp phanh. Hỏi từ lúc đạp phanh đến khi dừng hẳn, ô tô còn di chuyển được bao nhiêu mét?

A. 15m

B. 20m

C. 25m

D. 40m

Xem nào, khi xe dừng lại vận tốc sẽ về 0 hay $0 = -2t + 10$ vậy thời gian xe còn di chuyển thêm được là 5(s). Vậy quãng đường $s = v.t = 10.5 = 50(m)$ mà xe chạy chậm dần vậy sẽ phải nhỏ hơn 50(m), chắc là 40(m) phải không nhỉ?

Để chắc chắn, có lẽ mình phải lập 1 bảng mô tả quãng đường:

Mốc 0	Hết giây thứ 1	Hết giây thứ 2	Hết giây thứ 3	Hết giây thứ 4	Hết giây thứ 5
Vận tốc	10 → 8	8 → 6	6 → 4	4 → 2	2 → 0
Quãng đường	9	7	5	3	1

Như vậy tổng quãng đường xe đi được khi vận tốc giảm đến 0 là $9 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25(m)$

Cách này có vẻ tin cậy hơn nhiều, nhưng mất của mình thời gian đến hơn 2 phút !!! Vậy còn cách gì nhanh hơn không nhỉ?

Thầy BìnhKami e làm được rồi.

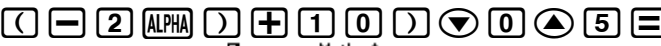
Minh Nguyệt đã giải được bài toán và tìm ra đáp án chính xác 25(m), rất tốt về mặt kết quả nhưng về mặt thời gian tính lại hơi lâu. Bài này ta có thể hoàn thành trong thời gian 20(s) nhờ 1 công cụ gọi là tích phân

$$S = \int_0^5 (-2t + 10) dt = 25(m)$$

Ta bấm máy tính như sau:

Khởi động chức năng tính tích phân: 

Nhập biểu thức cần tính tích phân và nhấn nút 



$$\int_0^5 (-2x + 10) dx$$

25

Máy tính sẽ cho chúng ta kết quả là 25(m). Chỉ mất 20(s) thật tuyệt vời phải không nào !!!

Thầy BìnhKami, Tích phân là công cụ gì mà hay vậy ạ ???

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Tích phân là 1 trong những công cụ tuyệt vời nhất mà nền toán học đã tạo ra, sử dụng tích phân có thể tính được quãng đường, vận tốc của 1 vật thể hoặc có thể tính được diện tích của 1 hình rất phức tạp ví dụ như hình tròn, hình tam giác, hình e líp ... thì còn có công thức nhưng diện tích của mặt ao hồ hình thù phức tạp thì chỉ có tích phân mới xử lý được, hoặc tính thể tích của 1 khoang tàu thủy có hình dạng phức tạp thì lại phải nhờ đến tích phân.

Tích phân hiện đại được nhà toán học Anh Isac Newton và nhà toán học Pháp Laibonit công bố khoảng cuối thế kỉ 17 nhưng người đặt nền móng cho sự hình thành và phát triển của Tích phân là nhà toán học, vật lý học, triết học, thiên văn học thiên tài người Hi Lạp Ac-si-met

Tích phân chia làm 2 dạng : Tích phân bất định (không cận) thường được biết tới tên là Nguyên hàm và Tích phân xác định (có cận) thường được biết đến với tên Tích phân mà các e sẽ được học ở học kì 2 lớp 12.

2) CÁCH TÍNH NGUYÊN HÀM

❖ Xây dựng công thức tính nguyên hàm :

Ta có $(x^5)' = 5x^4$ vậy ta nói nguyên hàm của $5x^4$ là x^5 kí hiệu $\int 5x^4 dx = x^5 + C$

Tương tự $(\sin x)' = \cos x$ vậy ta nói nguyên hàm của $\cos x$ là $\sin x$, kí hiệu

$$\int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\text{Tổng quát : } \int f(x) dx = F(x) + C \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

VD1-[Sách BT Nâng cao 12] Hàm số $F(x) = e^{x^2}$ là nguyên hàm của hàm số nào :

A. $f(x) = e^{2x}$

B. $f(x) = 2x.e^{2x}$

C. $f(x) = \frac{e^{x^2}}{2x}$

D.

$f(x) = x^2 e^{x^2} - 1$

GIẢI

Thưa thầy, bài này e làm được ạ !

- Đầu tiên e tính đạo hàm của $F(x)$, vì $F(x)$ là một hàm hợp của e nên em áp dụng công thức $(e^u)' = e^u \cdot u'$ ạ.
- Khi đó : $F'(x) = (e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot (x^2)' = 2x.e^{x^2}$
- Vậy $F(x)$ là nguyên hàm của hàm của hàm $f(x) = 2x.e^{x^2}$ và ta chọn đáp án B ạ.

VD2-[Đề thi minh họa ĐHQG 2016] Nguyên hàm của hàm số $y = x.e^{2x}$ là :

A. $2e^{2x}(x-2) + C$

B. $\frac{1}{2}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

C. $2e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C$

D. $\frac{1}{2}e^{2x}(x-2) + C$

GIẢI

Thưa thầy, chúng ta sẽ thử lần lượt, với đáp án A thì $F(x) = 2e^{2x}(x-2)$. Nhưng việc tính đạo hàm của $F(x)$ là $2e^{2x}(x-2)$ thì e thấy khó quá ạ, e quên mất công thức ạ !!

Trong phòng thi gặp nhiều áp lực, nhiều khi chúng ta đột nhiên bị quên công thức đạo hàm hay bản thân chúng ta chưa học phần này thì làm sao ?? Thầy sẽ cho các e một thủ thuật Casio để các e quên công thức vẫn biết đâu là đáp án đúng :

- Ta biết $F'(x) = f(x)$ việc này đúng với mọi x thuộc tập xác định
- Vậy sẽ đúng với $x=1$ chẳng hạn. Khi đó $F'(1) = f(1)$
- Tính giá trị $f(1) = 7,3890...$

ALPHA) ALPHA $\times 10^x$ x^y 2 ALPHA) CALC 1 =

- Theo đúng quy trình ta sẽ chọn đáp án $F(x)$ ở 4 đáp án **A, B, C, D** nếu đáp án nào thỏa mãn $F'(2) = f(2) = 1,732...$

Thử với đáp án **A** khi đó $F(x) = \frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} \right)$$

$$3.464101615$$

Vậy $F'(2) = 3,4641...$ là một giá trị khác $f(2) = 1,732...$ điều đó có nghĩa là điều kiện $F'(x) = f(x)$ không được đáp ứng. Vậy đáp án **A** là sai.

- Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án **B**. Khi này $F(x) = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1}$

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} \right)$$

$$1.732050808$$

Ta được $F'(2) = 1,732...$ giống hệt $f(2) = 1,732...$ có nghĩa là điều kiện $F'(x) = f(x)$ được thỏa mãn. Vậy đáp án chính xác là **B**

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Dựa vào đặc điểm của hàm $f(x)$ ta thấy $\sqrt{2x-1}$ về mặt bản chất sẽ có dạng $(2x-1)^{\frac{1}{2}}$. Ta nghĩ ngay đến công thức đạo hàm $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

+) Trong công thức đạo hàm này số mũ của u bị giảm đi 1. Vậy hàm $F(x)$ có số mũ lớn hơn hàm $f(x)$ là 1 đơn vị. Vậy $F(x)$ phải có số mũ là $\frac{3}{2}$

+) Vậy chỉ có đáp án **A** hoặc **B** là thỏa mãn vì $(2x-1)\sqrt{2x-1} = (2x-1)^{\frac{3}{2}}$

- Ta thực hiện phép đạo hàm $\left[(2x-1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}}(2x-1)' = 3\sqrt{2x-1}$
- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3} \left[(2x-1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \sqrt{2x-1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm

$$F(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}(2x-1)\sqrt{2x-1} \Rightarrow \mathbf{B} \text{ là đáp án đúng.}$$

❖ **Bình luận :**

- Nếu chúng ta có một chút kiến thức cơ bản về đạo hàm thì việc sử dụng máy tính Casio để tìm đáp án sẽ nhẹ nhàng hơn. Chúng ta chỉ việc thử với đáp án **A** và **B** vì 2 đáp án này mới có số mũ là $\frac{3}{2}$
- Điều đặc biệt của dạng này là số mũ của nguyên hàm $F(x)$ lúc nào cũng lớn hơn số mũ của hàm số $f(x)$ là 1 đơn vị.

- +) Chúng ta có thể áp dụng 1 cách linh hoạt. Ví dụ tìm nguyên hàm của hàm số $y = \frac{m}{\sqrt{x}}$ thì cũng vô cùng đơn giản. Ta thấy $y = m \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ về mặt bản chất thì $\frac{1}{\sqrt{x}}$ là x mũ $-\frac{1}{2}$ vậy chắc chắn nguyên hàm phải là x mũ $-\frac{1}{2} + 1 = \frac{1}{2}$ hay là $\sqrt{x}$
- +) Ta xét đạo hàm gốc $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (*) Việc còn lại chỉ là cân bằng hệ số, để tạo thành $\frac{m}{\sqrt{x}}$ ta nhân cả 2 vế của (*) với $2m$ là xong. Khi đó $(2m\sqrt{x})' = \frac{m}{\sqrt{x}}$ Thật đơn giản phải không !!

VD4- Một nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ là :

- A. $2x^2 + 3x - 2\ln x$ B. $\frac{x^2}{2} - \frac{3x}{2} + \ln x$
 C. $\frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + 1$ D. $\frac{x^2 + x}{x^2}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định ($x \neq 0$) là $x = 5$

Khi đó $f(5) = 7.6$

- Với đáp án C ta có $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2\ln x + 1$ có

Ta được $F'(5) = 7.6 = f(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Hàm $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ với bậc của tử là bậc 2 lớn hơn bậc của mẫu là bậc 1
- Phương pháp giải : Thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số ta được: $f(x) = x + 3 - \frac{2}{x}$. Khi đó hàm số trở thành dạng đơn giản và ta dễ dàng tìm được nguyên hàm.
 +) Có $\left(\frac{x^2}{2} + 3x\right)' = x + 3$ vậy $\frac{x^2}{2} + 3x$ là nguyên hàm của $x + 3$

+) Có $(\ln x)' = \frac{1}{x}$. Cân bằng hệ số ta có : $(-2 \ln x)' = -\frac{2}{x}$ vậy $-2 \ln x$ là nguyên hàm của $-\frac{2}{x}$

$$\text{Tổng kết } \left(\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x \right)' = x + 3 - \frac{2}{x} = \frac{x^2 + 3x - 2}{x}$$

Hay $\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x$ là một nguyên hàm cần tìm thì $\frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + 5$ cũng là một nguyên hàm

- Cân bằng hệ số ta được $\frac{1}{3} \left[(2x-1)^{\frac{3}{2}} \right]' = \sqrt{2x-1}$. Điều này có nghĩa nguyên hàm

$$F(x) = \frac{1}{3} (2x-1)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2x-1) \sqrt{2x-1} \Rightarrow \mathbf{B} \text{ là đáp án đúng.}$$

❖ **Bình luận :**

- Tìm nguyên hàm của 1 hàm phân thức hữu tỉ là 1 dạng toán hay nếu chúng ta biết nguyên tắc tư duy, và nếu không biết thì sẽ rất khó khăn.
- Ta phải nhớ thế này, nếu **phân thức hữu tỉ có bậc ở tử lớn hơn hoặc bằng bậc ở mẫu thì ta sẽ thực hiện 1 phép chia tử số cho mẫu số** thì sẽ thu được 1 hàm số cực kì dễ tính nguyên hàm.
- Ngoài ra còn 1 dạng hay nữa khi **phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử thì ta sẽ xử lý thế nào ?** Mời các bạn xem ví dụ tiếp theo .

VD5 - Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ là :

A. $\ln(x-2) - 2 \ln(x+2) + C$

B. $2 \ln(x-2) + \ln(x+2) + C$

C. $\ln \left| \frac{x+2}{x-2} \right| + C$

D. $\ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$

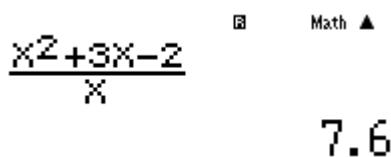
GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

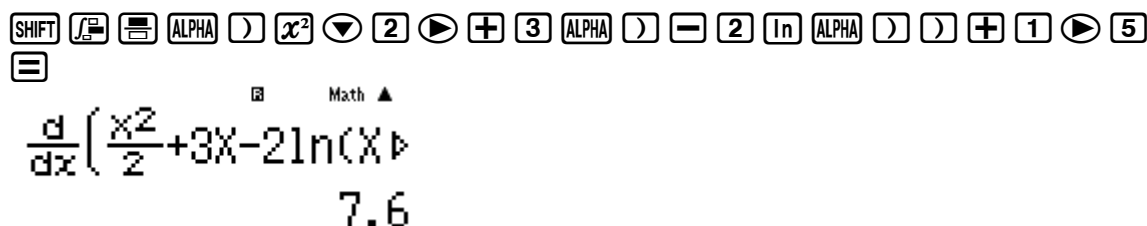
- Ta chọn 1 giá trị x thuộc tập xác định ($x \neq 0$) là $x = 5$

Khi đó $f(5) = 7.6$





- Với đáp án C ta có $F(x) = \frac{x^2}{2} + 3x - 2 \ln x + 1$ có



Ta được $F'(5) = 7.6 = f(5)$. Vậy đáp án **C** là đáp án chính xác.

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Hàm $f(x) = \frac{4}{x^2 - 4}$ có tên gọi là hàm phân thức hữu tỉ có mẫu số phân tích được thành nhân tử
- Phương pháp giải : Chia phân thức phức tạp ban đầu thành các phân thức phức tạp

$$+) \text{ Có } \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{4}{(x-2)(x+2)}$$

$$+) \text{ Ta sẽ tách phân thức lớn này thành 2 phân thức nhỏ đơn giản : } \frac{4}{x^2 - 4} = m \cdot \frac{1}{x-2} + n \cdot \frac{1}{x+2}$$

+) Để tách được ta lại dùng **phương pháp hệ số bất định**:

$$\frac{4}{x^2 - 4} = m \cdot \frac{1}{x-2} + n \cdot \frac{1}{x+2} \Leftrightarrow \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{m(x+2) + n(x-2)}{(x-2)(x+2)}$$

$$\Leftrightarrow 4 = m(x-2) + n(x+2) \Leftrightarrow 0x + 4 = x(m+n) + 2m - 2n \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = m+n \\ 4 = 2m - 2n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=-1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } \frac{4}{x^2 - 4} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

- Thành công trong việc đưa về 2 phân số đơn giản, ta nhớ đến công thức

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}, (\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

Để dàng áp dụng :

$$[\ln(x-2)]' = \frac{1}{x-2} \cdot (x-2)' = \frac{1}{x-2} \quad \text{và} \quad [\ln(x+2)]' = \frac{1}{x+2} \cdot (x+2)' = \frac{1}{x+2}$$

$$\text{Tổng hợp } [\ln(x-2) - \ln(x+2)]' = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \left(\Leftrightarrow \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| \right)' = \frac{4}{x^2 - 4}$$

$$\text{Vậy nguyên hàm của } f(x) \text{ là } F(x) = \ln \left| \frac{x-2}{x+2} \right| + C$$

❖ **Bình luận :**

- Qua ví dụ trên chúng ta thấy được sự hữu hiệu của phương pháp hệ số bất định, 1 phân số phức tạp sẽ được chia thành 2 hoặc 3 phân số đơn giản.
- Về nguyên tắc thì có thể ra 1 bài tích phân hàm phân thức được chia thành hàng chục phân số đơn giản nhưng trong trường học THPT thì cùng lắm là chia làm 3 phân thức con. Chúng ta hãy cùng theo dõi phép chia sau :

$$\frac{4x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{4x^2 - 5x - 1}{(x-2)(x^2 - 1)} = \frac{4x^2 - 5x - 1}{(x-2)(x-1)(x+1)} = \frac{m}{x-2} + \frac{n}{x-1} + \frac{p}{x+1}$$

$\Leftrightarrow$ Tử số về trái = Tử số về phải

$$\Leftrightarrow 4x^2 - 5x - 1 = m(x^2 - 1) + n(x^2 - x - 2) + p(x^2 - 3x + 2)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 = m + 2n + p \\ -5 = -n - 3p \\ -1 = -m + 2p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ n=2 \\ p=1 \end{cases}$$

$$\text{Cuối cùng ta thu được : } \frac{4x^2 - 5x - 1}{x^3 - 2x^2 - x + 2} = \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1}$$

$$\text{Và ta dễ tính được nguyên hàm của } \frac{1}{x-2} + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{x+1} \text{ là}$$

$$\ln(x-2) + 2\ln(x-1) + \ln(x+1) + C$$

Thật hiệu quả phải không !!

VD6-[Báo toán học tuổi trẻ tháng 12-2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = \sin x \cdot \cos x$ trên tập số thực là:

A. $\frac{1}{4}\cos 2x + C$

B. $-\frac{1}{4}\cos 2x + C$

C. $-\sin x \cdot \cos x$

D. $-\frac{1}{4}\sin 2x + C$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Chuyển máy tính Casio về chế độ Radian (khi làm các bài toán liên quan đến lượng giác)

➤ Chọn 1 giá trị x bất kì ví dụ như $x = \frac{\pi}{6}$

➤ Khi đó giá trị của $f(x)$ tại $x = \frac{\pi}{6}$ là $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4330\dots$

$\sin(\text{X})\cos(\text{X})$

0.4330127019

➤ Theo đáp án A thì $F(x) = \frac{1}{4}\cos 2x$. Nếu đáp án A đúng thì $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Ta tính được

$F(2) = -0,4430\dots$ là một giá trị khác $f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án A sai

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\cos(2X)\right)|_{x=\frac{\pi}{6}}$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{4}\cos(2X)\right)|_{x=\frac{\pi}{6}}$

-0.4330127019

➤ Ta tiếp tục thử nghiệm với đáp án B.

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}\cos(2X)\right)|_{x=\frac{\pi}{6}}$

$\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{4}\cos(2X)\right)|_{x=\frac{\pi}{6}}$

0.4330127019

Ta được $F'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0,4430\dots = f\left(\frac{\pi}{6}\right)$. Vậy đáp án chính xác là B

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

▪ Dễ thấy cụm $\sin x \cos x$ rất quen thuộc và ta nhớ đến công thức có nhân đôi :
 $\sin 2x = 2\sin x \cos x$

▪ Từ đó ta rút gọn $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x$

▪ Cái gì đạo hàm ra sin thì đó là cos !! Ta nhớ đến công thức : $(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$

Áp dụng $(\cos 2x)' = -\sin 2x \cdot (2x)' = -2\sin 2x$

Cân bằng hệ số bằng cách chia cả 2 vế cho -4 ta được : $\left(-\frac{1}{4}\cos 2x\right)' = \frac{1}{2}\sin 2x$

▪ Từ đây ta biết được $F(x) = -\frac{1}{4}\cos 2x$

❖ **Bình luận :**

• Khi sử dụng máy tính Casio để làm bài tập liên quan đến hàm lượng giác thì ta nên đổi sang chế độ Radian để phép tính của chúng ta đạt độ chuẩn xác cao..

• Ngoài cách gộp hàm $f(x)$ theo công thức góc nhân đôi, ta có thể tư duy như sau :

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Nếu ta coi $\sin x = u$ thì $\cos x = u'$ vậy ta nhớ tới công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$

Ta thiết lập quan hệ $(\sin^2 x)' = 2 \sin x \cos x$ hay $\left(\frac{1}{2} \sin^2 x\right)' = \sin x \cos x$

Vậy ta biết $F(x) = \frac{1}{2} \sin^2 x$ tuy nhiên so sánh đáp án thì lại không có đáp án giống. Vậy ta

tiếp tục biến đổi 1 chút. $\frac{1}{2} \sin^2 x = \frac{1}{2} \frac{1 - \cos 2x}{2} = -\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{4} \Rightarrow F(x)$ cũng là $-\frac{1}{4} \cos 2x$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng :

- A. $\tan^2 x + C$ B. $\frac{1}{3} \tan x + C$ C. $3 \tan^3 x + C$ D. $\frac{1}{3} \tan^3 x + C$

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016^x$ là :

- A. $\frac{2016^x}{\ln 2016} + C$ B. $2016^x \cdot \ln 2016 + C$
C. $x \cdot 2016^{-x} \cdot \ln 2016 + C$ D. $\frac{x \cdot 2016^{x-1}}{\ln 2016} + C$

Bài 3-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

- A. $\frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ B. $\frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$ C. $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$ D. $\frac{x^2}{x + 1}$

Bài 4-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}\right) dx$

- A. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$ B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$
C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$ D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

Bài 5-[THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ 2017] Không tồn tại nguyên hàm :

- A. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$ B. $\int \sqrt{-x^2 + 2x - 2} dx$ C. $\int \sin 3x dx$ D. $\int e^{3x} dx$

Bài 6-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ bằng :

- A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$ C. $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

Bài 7-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = e^x(1 - 2017e^{-2x})$ là :

- A. $e^x + 2017e^{-x} + C$ B. $e^x - 2017e^{-x} + C$
C. $e^x + \frac{2017}{2}e^{-x} + C$ D. $e^x - \frac{2017}{2}e^{-x} + C$

Bài 8-[THPT Triệu Sơn – Thanh Hóa 2017] Họ nguyên hàm của $\int \frac{2x+3}{2x^2 - x - 1} dx$:

A. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

B. $-\frac{2}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

C. $\frac{2}{3}\ln|2x+1| - \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

D. $-\frac{1}{3}\ln|2x+1| + \frac{5}{3}\ln|x-1| + C$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[THPT Phạm Văn Đồng – Phú Yên 2017] Nguyên hàm $\int \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} dx$ bằng :

A. $\tan^2 x + C$

B. $\frac{1}{3}\tan x + C$

C. $3\tan^3 x + C$

D. $\frac{1}{3}\tan^3 x + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn chế độ Radian cho máy tính Casio rồi chọn giá trị $x = \frac{\pi}{6}$ chẳng hạn.

- Ta có $f(x) = \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$ và $F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{4}{9}$

SHIFT MODE 4 $\frac{\square}{\square}$ sin ALPHA)) x^2 ∇ cos ALPHA)) $x^\square$ 4 CALC SHIFT $\times 10^x$ $\div$ 6 =

$\frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^4}$

$\frac{4}{9}$

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x$ tại $x = \frac{\pi}{6}$ ta được $F'(x) = 0,44(4) = \frac{4}{9}$

SHIFT $\int \frac{\square}{\square}$ 1 ∇ 3 $\rightarrow$ tan ALPHA)) $x^\square$ 3 $\rightarrow$ $\rightarrow$ $\frac{\square}{\square}$ SHIFT $\times 10^x$ ∇ 6 =

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3}\tan(x)^3\right)|_{x=\frac{\pi}{6}}$

0.4444444444

- Vậy $F'(x) = f(x) = \frac{4}{9} \Rightarrow$ D là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Biến đổi $\frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$

- Theo công thức đạo hàm $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$. Với $u = \tan x$ và $n = 3$

Ta có $(\tan^3 x)' = 3.\tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\tan^3 x\right)' = \tan^2 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$. Vậy $F(x) = \frac{1}{3}\tan^3 x$ là 1 nguyên

hàm $\Rightarrow \frac{1}{3}\tan^3 x + C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

Bài 2-[Thi HSG tỉnh Ninh Bình 2017] Nguyên hàm của hàm số $f(x) = 2016^x$ là :

A. $\frac{2016^x}{\ln 2016} + C$

B. $2016^x \cdot \ln 2016 + C$

C. $x \cdot 2016^{-x} \cdot \ln 2016 + C$

D. $\frac{x \cdot 2016^{x-1}}{\ln 2016} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = 2016^x$ và $F(2) = 4064256$

2016^x $\frac{d}{dx} \left(\frac{2016^x}{\ln 2016} \right) \Big|_{x=2}$

2016^x

4064256

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{2016^x}{\ln 2016}$ tại 2 ta được $F'(2) = 4064256$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{2016^x}{\ln 2016} \right) \Big|_{x=2}$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{2016^x}{\ln 2016} \right) \Big|_{x=2}$

4064256

- Vậy $F'(x) = f(x) = 4064256 \Rightarrow A$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Theo công thức đạo hàm $(a^x)' = a^x \cdot \ln a$. Với $a = 2016$

Ta có $(2016^x)' = 2016^x \cdot \ln 2016 \Leftrightarrow \left(\frac{2016^x}{\ln 2016} \right)' = 2016^x$. Vậy $F(x) = \frac{2016^x}{\ln 2016}$ là 1 nguyên hàm

$\Rightarrow \frac{2016^x}{\ln 2016} + C$ là họ nguyên hàm cần tìm.

Bài 3-[THPT Quảng Xương I – Thanh Hóa 2017] Hàm số nào sau đây không phải là nguyên hàm của hàm số $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$:

A. $\frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$

B. $\frac{x^2 - x - 1}{x + 1}$

C. $\frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$

D. $\frac{x^2}{x + 1}$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.

- Ta có $f(x) = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$ và $f(2) = \frac{8}{9}$

$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$\frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$

$\frac{8}{9}$

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ tại 2 ta được $F'(2) = 1.11(1) = \frac{10}{9}$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} \right) \Big|_{x=2}$

$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + x - 1}{x + 1} \right) \Big|_{x=2}$

1.111111111

- Vậy $F'(x) \neq f(x) \Rightarrow F(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 1}$ không phải là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow A$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

$$\text{Biến đổi } \frac{x(x+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 1}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$\text{Theo công thức đạo hàm } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u' \text{ . Với } u = x+1$$

$$\text{Ta có } \left(\frac{1}{x+1}\right)' = -\frac{1}{(x+1)^2} \text{ và } x'=1 \Rightarrow \left(x + \frac{1}{x+1}\right)' = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{x^2+x+1}{x+1}\right)' = \frac{x(x+2)}{(x+1)^2}$$

$$\text{Vậy } F(x) = \frac{x^2+x+1}{x+1} \text{ là 1 nguyên hàm} \Rightarrow \text{Đáp số C đúng}$$

$$F(x) - 2 = \frac{x^2-x-1}{x+1} \text{ cũng là 1 nguyên hàm} \Rightarrow \text{Đáp số B đúng}$$

$$F(x) - 1 = \frac{x^2}{x+1} \text{ cũng là 1 nguyên hàm} \Rightarrow \text{Đáp số D đúng}$$

Bài 4-[THPT Hàm Rồng – Thanh Hóa 2017] Tìm nguyên hàm của hàm số $\int \left(x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}\right) dx$

A. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

B. $\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

C. $\frac{x^3}{3} + 3\ln|x| + \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

D. $\frac{x^3}{3} - 3\ln|x| - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

▪ Chọn giá trị $x=2$ chẳng hạn.

$$\text{Ta có } f(x) = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x} \text{ và } f(2) = \frac{11-4\sqrt{2}}{2}$$

ALPHA) x^2 + $\frac{3}{x}$ - 2 $\sqrt{x}$ = 2.671572875

$$x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$$

$$\frac{11-4\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{▪ Tính đạo hàm của } F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \text{ tại 2 ta được } F'(2) = 2.6715... = \frac{11-4\sqrt{2}}{2}$$

SHIFT $\int$ $\frac{x^3}{3} + 3\ln(x) - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ = 2.671572875

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^3}{3} + 3\ln(x) - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \right)$$

$$\text{▪ Vậy } F'(x) = f(x) = \frac{11-4\sqrt{2}}{2} \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3} \text{ là nguyên hàm của } f(x) \Rightarrow \text{C là đáp án chính xác}$$

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

$$\text{▪ Theo công thức đạo hàm } (\ln x)' = \frac{1}{x} \Rightarrow (3\ln x)' = \frac{3}{x}$$

$$\text{▪ Theo công thức } (x^n)' = n \cdot x^{n-1} \text{ với } n = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = 2x^{\frac{1}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)' = 2\sqrt{x}$$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Vậy $\left(\frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}\right)' = x^2 + \frac{3}{x} - 2\sqrt{x}$ hay $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3\ln x - \frac{4}{3}\sqrt{x^3}$ là 1 nguyên hàm

Bài 5-[THPT Vĩnh Chân – Phú Thọ 2017] Không tồn tại nguyên hàm :

A. $\int \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} dx$ B. $\int \sqrt{-x^2 + 2x - 2} dx$ C. $\int \sin 3x dx$ D. $\int e^{3x} dx$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = \sqrt{-x^2 + 2x - 2}$ và $f(2)$ không tồn tại

$\sqrt{\square} \quad \square \quad \text{[ALPHA]} \quad \square \quad \text{[x²]} \quad \text{[+]} \quad \text{[2]} \quad \text{[ALPHA]} \quad \square \quad \text{[-]} \quad \text{[2]} \quad \text{[CALC]} \quad \text{[2]} \quad \text{[=]}$
Math ERROR

[AC] : Cancel

[◀][▶]: Goto

Vậy hàm số ở đáp số C không tồn tại

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Dễ thấy $-x^2 + 2x - 2 = -(x-1)^2 - 1 < 0$ với mọi giá trị $x \in R$
- Vậy $\sqrt{-x^2 + 2x - 2}$ không tồn tại

Bài 6-[Chuyên Lam Sơn – Thanh Hóa 2017] $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx$ bằng :

A. $2(\ln x)^{\frac{1}{2}} + C$ B. $\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3} + C$ C. $\frac{1}{2\sqrt{\ln x}} + C$ D. $\frac{3}{2}\sqrt{(\ln x)^3} + C$

GIẢI

❖ **Cách 1: CASIO**

- Chọn giá trị $x = 2$ chẳng hạn.
- Ta có $f(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$ và $f(2) = 0.4162...$

$\square \quad \sqrt{\square} \quad \ln \quad \text{[ALPHA]} \quad \square \quad \square \quad \text{[ALPHA]} \quad \square \quad \text{[CALC]} \quad \text{[2]} \quad \text{[=]}$
 $\frac{\sqrt{\ln(X)}}{X}$
0.4162773056

- Tính đạo hàm của $F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ tại 2 ta được $F'(2) = 0.4612...$

$\text{[SHIFT]} \quad \text{[f(x)]} \quad \square \quad \text{[2]} \quad \text{[ALPHA]} \quad \text{[3]} \quad \text{[x²]} \quad \text{[ALPHA]} \quad \text{[3]} \quad \text{[CALC]} \quad \text{[2]} \quad \text{[=]}$
 $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{3} \sqrt{\ln(X)^3} \right) |_{x=2}$
0.4162773056

- Vậy $F'(x) = f(x) = 0.4162... \Rightarrow F(x) = \frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}$ là nguyên hàm của $f(x) \Rightarrow B$ là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo: Tự luận**

- Theo công thức $(u^n)' = n.u^{n-1}.u'$ với $u = \ln x$

$$\Rightarrow \left(\ln x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2} \cdot \ln x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right)' = \ln x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{x} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\sqrt{(\ln x)^3}\right)' = \frac{\sqrt{\ln x}}{x}$$

PHƯƠNG PHÁP CASIO – VINACAL

BÀI 19. TÍNH NHANH TÍCH PHÂN XÁC ĐỊNH.

1) LỆNH TÍNH TÍCH PHÂN

Để tính giá trị 1 tích phân xác định ta sử dụng lệnh $\int_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx$$

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Câu 25 đề minh họa 2017] Tính giá trị tích phân $I = \int_0^{\pi} \cos^3 x \cdot \sin x dx$

A. $I = -\frac{1}{4}\pi^4$

B. $-\pi^4$

C. 0

D. $-\frac{1}{4}$

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

- Vì bài toán liên quan đến các đại lượng tính π nên ta chuyển máy tính về chế độ Radian

SHIFT MODE 4

- Gọi lệnh tính giá trị tích phân

$\int_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx$$

Điền hàm $f(x) = \cos^3 x \cdot \sin x$ và các cận 0 và π vào máy tính Casio

COS ALPHA $)$ $)$ x^y 3 ▶ sin ALPHA $)$ $)$ ▼ 0 ▲ SHIFT x10^x

$$\int_0^{\pi} \cos(X)^3 \sin(X) dx$$

Rồi nhấn nút = ta nhận được ngay kết quả của tích phân là 0

$$\int_0^{\pi} \cos(X)^3 \sin(X) dx = 0$$

- So sánh với các đáp án A, B, C, D thì ta thấy C là đáp án chính xác

❖ Cách tham khảo : Tự luận

- Đặt $t = \cos x$ khi đó $\cos^3 x = t^3$
- Vì phân 2 vế phương trình ẩn phụ $\cos x = t \Leftrightarrow (\cos x)' dx = t' dt \Leftrightarrow -\sin x dx = dt$
- Đổi cận dưới : $x = 0$ khi đó $t = \cos 0 = 1$
Đổi cận trên : $x = \pi$ khi đó $t = \cos \pi = -1$
- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I = -\int_1^{-1} t^3 dt = -\frac{t^4}{4} \Big|_1^{-1} = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\right) = 0$$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO – VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

❖ Bình luận :

- Có 10 phép đặt ẩn phụ tính nguyên hàm tích phân. Bài toán trên có tính chất của phép số 2 : “nếu tích phân chứa cụm $\sin x dx$ thì đặt ẩn phụ $\cos x = t$ ”
- Trong thực tế học tập, việc đổi vi phân (đổi đuôi) thường bị các bạn lãng quên , chúng ta chú ý điều này.

PHỤ LỤC : 10 PHÉP ĐẶT ẨN PHỤ THƯỜNG GẶP

❖ **Phương pháp đặt ẩn phụ** thường dùng để đưa 1 tích phân phức tạp, khó tính trở về một tích phân đơn giản, dễ tính hơn. Sau đây là 10 phép đặt ẩn phụ với 10 dấu hiệu khác nhau thường gặp.

- Phép 1 :** Nếu xuất hiện căn thức thì đặt cả căn bằng t
- Phép 2 :** Nếu xuất hiện cụm $\sin x dx$ thì đặt $\cos x = t$
- Phép 3 :** Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\cos^2 x} dx$ thì đặt $\tan x = t$
- Phép 4 :** Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{\sin^2 x} dx$ thì đặt $\cot x = t$
- Phép 5 :** Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x} dx$ thì đặt $\ln x = t$
- Phép 6 :** Nếu xuất hiện $e^x dx$ thì đặt $e^x = t$
- Phép 7 :** Nếu xuất hiện cụm $\frac{1}{x^2 + a^2} dx$ thì đặt $x = \tan t$
- Phép 8 :** Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{x^2 - a^2}$ thì đặt $x = a \sin t$
- Phép 9 :** Nếu xuất hiện cụm $\sqrt{a^2 - x^2}$ thì đặt $x = \frac{a}{\cos t}$
- Phép 10 :** Nếu xuất hiện biểu thức trong hàm $\ln, \log, e, \dots$ thì đặt cả biểu thức là t

❖ Việc đặt ẩn phụ thường tiến hành theo 3 bước

- Bước 1 :** Đặt ẩn phụ theo dấu hiệu
- Bước 2 :** Vi phân 2 vế phương trình ẩn phụ để đổi đuôi
- Bước 3 :** Đổi căn dưới và căn trên sau đó thế tất cả 3 đại lượng trên vào tích phân ban đầu để tạo thành một tích phân đơn giản hơn.

VD2-[Chuyên Khoa Học Tự Nhiên 2017] Tính tích phân $I = \int_1^{\ln 2} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}} dx$

A. $\sqrt{3} - \sqrt{e^2 - 1}$

B. $2\sqrt{\ln 2 - 1}$

C. $\sqrt{\ln^2 2 - 1}$

D. Cả 3 đáp án trên đều

sai

GIẢI

❖ Cách 1 : CASIO

➤ Gọi lệnh tính giá trị tích phân $\int_a^b$

$$\int_a^b f(x) dx$$

➤ Điền hàm $f(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x} - 1}}$ và các cận 1 và $\ln 2$ vào máy tính Casio Rồi nhấn nút $\boxed{=}$ ta nhận được ngay kết quả của tích phân là $-0,7956\dots$

$\boxed{\int_a^b} \boxed{\boxed{=}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^y} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\boxed{=}} \boxed{\boxed{=}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^y} \boxed{2} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\boxed{=}} \boxed{\boxed{=}} \boxed{1} \boxed{\boxed{=}}$

$$\int_1^{\ln(2)} \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}-1}} dx = -0.7956074167$$

- Giữ nguyên kết quả này ở máy tính Casio số 1, dùng máy tính Casio thứ 2 để tính kết quả của các đáp án A, B, C, D ta thấy đáp số C

$$\sqrt{3} - \sqrt{e^2 - 1} = -0.7956074167$$

Đây là giá trị giống hệt tích phân, vậy C là đáp số chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Đặt $t = \sqrt{e^{2x} - 1}$
- Vì phân 2 về phương trình ẩn phụ
- $t = \sqrt{e^{2x} - 1} \Leftrightarrow t^2 = e^{2x} - 1 \Leftrightarrow (t^2)' dt = (e^{2x} - 1)' dx \Leftrightarrow 2t dt = 2e^{2x} dx \Leftrightarrow t dt = e^{2x} dx$
- Đổi cận dưới : $x=1$ khi đó $t = \sqrt{e^2 - 1}$
Đổi cận trên : $x = \ln 2$ khi đó $t = \sqrt{e^{2\ln 2} - 1} = \sqrt{3}$
- Lúc này tích phân phức tạp ban đầu đã trở thành tích phân đơn giản

$$I = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} \frac{1}{t} \cdot t dt = \int_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} dt = t \Big|_{\sqrt{e^2-1}}^{\sqrt{3}} = \sqrt{3} - \sqrt{e^2 - 1}$$

❖ **Bình luận :**

- Bài toán trên chứa nội dung của phép đặt ẩn phụ số 1 “nếu tích phân chứa căn thì ta đặt cả căn là ẩn phụ t ”
- Việc vi phân luôn phương trình đặt ẩn phụ $t = \sqrt{e^{2x} - 1}$ thường khó khăn vì chứa căn, do đó ta thường khử căn $t^2 = e^{2x} - 1$ bằng cách bình phương 2 vế. Sau đó ta mới vi phân

VD3-[THP Nguyễn Đình Chiểu – Bình Dương 2017] Giá trị của a để tích phân $\int_0^a \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx$ có giá trị $\frac{a^2}{2} + a + \ln 3$ là :

A. 5 B. 4 C. 3 D. 2

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Về mặt bản chất nếu tích phân $\int_0^a \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx$ có giá trị bằng biểu thức $\frac{a^2}{2} + a + \ln 3$ thì

hiệu của chúng phải bằng nhau. Vậy ta thiết lập hiệu $\int_0^a \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx - \left(\frac{a^2}{2} + a + \ln 3 \right)$ và bài

toán trở thành tìm a để hiệu trên bằng 0

- Thử với giá trị $a=5$ Ta nhập hiệu trên vào máy tính Casio hiệu

$$\int_0^5 \frac{x^2 + 2x + 2}{x+1} dx - \left(\frac{5^2}{2} + 5 + \ln 3 \right)$$

$$\left[\frac{1}{x} \right] \left[\frac{2}{x} \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[x^2 \right] \left[+ \right] \left[2 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[+ \right] \left[2 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[+ \right] \left[1 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[0 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[5 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[5 \right] \left[x^2 \right] \left[\text{ALPHA} \right] \left[\frac{1}{x} \right] \left[+ \right] \left[5 \right] \left[+ \right] \left[\ln \right] \left[3 \right] \left[\text{DEL} \right] \left[\right] \left[\right]$$

Rồi nhấn phím $\left[\frac{1}{x} \right]$

$$\int_0^5 \frac{x^2+2x+2}{x+1} dx = \left(\frac{5^2}{2} \right) - 0.6931471807$$

Máy tính Casio báo một giá trị khác 0 vậy đảo số **A** là sai.

- Sửa vị trí a thành số 4 và số 3 ta đều nhận được kết quả khác 0 vậy đáp án **B** và **C** đều sai
- Thử với giá trị $a = 2$ ta được :

$$\int_0^2 \frac{x^2+2x+2}{x+1} dx = \left(\frac{2^2}{2} \right) - 0$$

Khi đó hiệu trên bằng 0 tức là **A** là đáp án chính xác

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- Tách tích phân thành : $\int_0^a \frac{x^2+2x+2}{x+1} dx = \int_0^a \left(x+1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$
- Vì $\left(\frac{x^2}{2} + x \right)' = x+1$ nên nguyên hàm của $x+1$ là $\frac{x^2}{2} + x$
- Vì $(\ln|x+1|)' = \frac{1}{x+1}$ nên nguyên hàm của $\frac{1}{x+1}$ là $\ln|x+1|$

$$\text{Tóm lại } \int_0^a \left(x+1 + \frac{1}{x+1} \right) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x + \ln|x+1| \right) \Big|_0^a = \frac{a^2}{2} + a + \ln|a+1|$$

- Thiết lập quan hệ $\frac{a^2}{2} + a + \ln|a+1| = \frac{a^2}{2} + a + \ln 3 \Leftrightarrow \ln|a+1| = \ln 3 \Leftrightarrow a = 2$

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này còn có mẹo giải nhanh dành cho các bạn tinh ý, chúng ta quan sát hàm $f(x)$ chứa thành phần $\frac{1}{x+1}$ có mối liên hệ với nguyên hàm của nó là $\ln|x+1|$. Ta đặt câu hỏi vậy phải chăng $\ln|x+1|$ khi thế cận sẽ là $\ln|a+1|$ có mối liên hệ với $\ln 3 = \ln|a+1|$ suy ra $a = 2$
- Hầu hết bài toán chứa tham số tích phân tác giả xin khuyến các bạn nên dùng phương pháp Casio chứ phương pháp tự luận nhiều khi rất loằng ngoằng và dễ sai.

VD4-[Báo Toán học tuổi trẻ T11 năm 2016] So sánh các tích phân

$$I = \int_1^4 \sqrt{x} dx, J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx, K = \int_0^1 x.e^x$$

Ta có kết quả nào sau đây

- A.** $I > K > J$ **B.** $I > J > K$ **C.** $J > I > K$ **D.** $K > I > J$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Tính giá trị tích phân I ta được $I = 4.6666...$ và ghi giá trị này ra nháp.

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx = 4.6666...$$

$$\int_1^4 \sqrt{x} dx$$

4.(6)

- Tính giá trị tích phân J ta được $J = 0.3333...$ và lại ghi giá trị này ra nháp

$\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{4} \boxed{\int \frac{\square}{\square}} \boxed{\sin} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{x^2} \boxed{\cos} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{\nabla} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x} \boxed{\blacktriangledown}$
 $\boxed{2} \boxed{=}$

$$\int_0^2 \sin(X)^2 \cos(X) dx$$

0.(3)

- Tính tiếp giá trị cuối cùng $K = 1$

- $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{MODE}} \boxed{3} \boxed{\int \frac{\square}{\square}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\times} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\times 10^x} \boxed{x^n} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\nabla} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle} \boxed{1} \boxed{=}$

$$\int_0^1 x \times e^x dx$$

1

- Rõ ràng $4.6666 > 1 > 0.3333$ hay $I > K > J$. Vậy đáp án chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Qua bài toán trên ta thấy rõ hơn sức mạnh của Casio khi giải nhanh những bài tích phân xác định, phương pháp tự luận cũng có nhưng rất dài dòng, tác giả xin không đề cập tới dành thời gian cho các bài khác quan trọng hơn.

VD 5-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^1 (|3x-1|-2|x|) dx$ bằng

- A. $-\frac{1}{6}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $-\frac{11}{6}$ D. 0

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

- Cách gọi lệnh giá trị tuyệt đối $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}}$

$$|0|$$

- Khi biết lệnh giá trị tuyệt đối rồi chúng ta nhập tích phân và tính giá trị một cách bình thường

- $\boxed{\int \frac{\square}{\square}} \boxed{(} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{3} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{-} \boxed{1} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{-} \boxed{2} \boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{hyp}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{\blacktriangleright} \boxed{)} \boxed{\nabla} \boxed{0} \boxed{\blacktriangle}$
 $\boxed{1}$

$$\int_0^1 (|3X-1|-2|X|) dx$$

- Nhấn nút $\boxed{=}$ ta sẽ nhận được giá trị tích phân là $I = -0,016666...$

$$\int_0^1 (|3X-1|-2|X|) dx$$

-0.166666589

- Đây chính là giá trị xuất hiện ở đáp số A. Vậy A là đáp số chính xác của bài toán

❖ **Cách tham khảo : Tự luận**

- $\int_0^1 (|3x-1| - 2|x|) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1| - 2|x|) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1| - 2|x|) dx$
- Khi $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ thì $\int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1| - 2|x|) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-3x-2x) dx = \int_0^{\frac{1}{3}} (1-5x) dx = \left(x - \frac{5x^2}{2} \right) \Big|_0^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{18}$
- Khi $\frac{1}{3} \leq x \leq 1$ thì $\int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1| - 2|x|) dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (3x-1-2x) dx = \int_{\frac{1}{3}}^1 (x-1) dx = \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \Big|_{\frac{1}{3}}^1 = -\frac{2}{9}$
- Vậy $I = \int_0^{\frac{1}{3}} (|3x-1| - 2|x|) dx + \int_{\frac{1}{3}}^1 (|3x-1| - 2|x|) dx = \frac{1}{18} - \frac{2}{9} = -\frac{1}{6}$

❖ **Bình luận :**

- Để giải các bài toán tích phân chứa dấu giá trị tuyệt đối ta phải sử dụng **phương pháp chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối**.

Ta biết $3x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ và $3x-1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$ vậy ta sẽ chia đoạn $[0;1]$ thành 2 đoạn

$$\left[0; \frac{1}{3} \right] \text{ và } \left[\frac{1}{3}; 1 \right]$$

- Để tách 1 tích phân thành 2 tích phân ta sử dụng công thức chèn cận : Với giá trị c bất kì thuộc đoạn $[a;b]$ thì $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

VD 6-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Cho biết $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = a\pi + \frac{1}{4} \ln b$ ($0 < a < 1.1 < b < 3$) . Tích ab bằng bao nhiêu ?

A. $\frac{1}{2}$

B. $\frac{1}{4}$

C. $\frac{1}{6}$

D. $\frac{1}{8}$

GIẢI

❖ **Cách 1 : CASIO**

➤ Tính $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx = 0.5659... = A$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(X)}{\sin(X) + \cos(X)} dx$$

$$0.5659858768$$

Lưu giá trị này vào biến A

Ans→A

0.5659858768

Vậy ta có : $a\pi + \frac{1}{4} \ln b = 0.5659... = A \Rightarrow a = \frac{A - \frac{1}{4} \ln b}{\pi}$

➤ Nếu đáp số A đúng thì $ab = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{A - \frac{1}{4} \ln b}{\pi} \cdot b = \frac{1}{2} \Leftrightarrow b \left(A - \frac{1}{4} \ln b \right) - \frac{\pi}{2} = 0$

Sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE để tìm b

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(-)} \boxed{=}$ $\boxed{\frac{1}{\square}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\nabla}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{\ln}$ $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-}$ $\boxed{\frac{\pi}{\square}}$
 $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x}$ $\boxed{\nabla}$ $\boxed{2}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$
 Can't Solve

$\boxed{[\text{AC}]}$: Cancel
 $\boxed{[\leftarrow]} \boxed{[\rightarrow]}$: Goto

Không tìm được $b \Rightarrow$ Đáp án A sai

➤ Với đáp án B ta có $b \left(A - \frac{1}{4} \ln b \right) - \frac{\pi}{4} = 0$

$\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{(} \boxed{\text{ALPHA}} \boxed{(-)} \boxed{=}$ $\boxed{\frac{1}{\square}}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\nabla}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\rightarrow}$ $\boxed{\ln}$ $\boxed{\text{ALPHA}} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{)} \boxed{-}$ $\boxed{\frac{\pi}{\square}}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\times 10^x}$
 $\boxed{\nabla}$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{SHIFT}} \boxed{\text{CALC}} \boxed{=}$ $\boxed{0}$ $\boxed{\cdot}$ $\boxed{5}$ $\boxed{=}$

$$X(A - \frac{1}{4} \ln(X)) - \frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow b = 2 \Rightarrow a = \frac{1}{8}$ thỏa điều kiện $0 < a < 1.1 < b < 3$

$\Rightarrow$ Đáp số **B** chính xác của bài toán

❖ **Bình luận :**

- Một bài toán rất hay kết hợp lệnh tính tích phân và lệnh dò nghiệm SHIFT SOLVE

- Cách Casio có thêm một ưu điểm là tránh được các bài tích phân khó như $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} dx$

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} dx$ bằng :

A. 3 B. 7 C. -5 D. -3

Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ bằng :

A. $\ln 3$ B. $\ln \frac{3}{4}$ C. $\ln \frac{3}{2}$ D. $\ln \frac{1}{2}$

Bài 4-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{a}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3 B. 2 C. 4 D. 6

Bài 5-[Báo THPT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a (3x^2 + 2) dx = a^3 + 2$?:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$:

A. $I = e^2 - \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{e^2 + 1}{2}$

C. $I = e^2 + 1$

D. $I = \frac{e^2}{2}$

Bài 1-[Chuyên Khoa học tự nhiên 2017] Nếu $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^n x \cos x dx = \frac{1}{64}$ thì n bằng :

A. 2

B. 3

C. 5

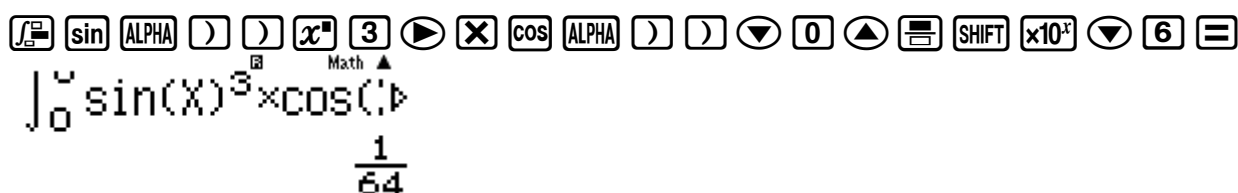
D. 6

GIẢI

- Với $n = 2$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x dx = \frac{1}{24} \neq \frac{1}{64} \Rightarrow$ Đáp án **A** sai



- Với $n = 3$ tính giá trị tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 x \cos x dx = \frac{1}{64} \Rightarrow$ Đáp án **B** chính xác



- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu “xuất hiện cụm $\cos x dx$ ” ta sẽ đặt $t = \sin x$

Bài 2-[Báo Toán Học Tuổi Trẻ tháng 12 năm 2016] Tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} dx$ bằng :

A. 3

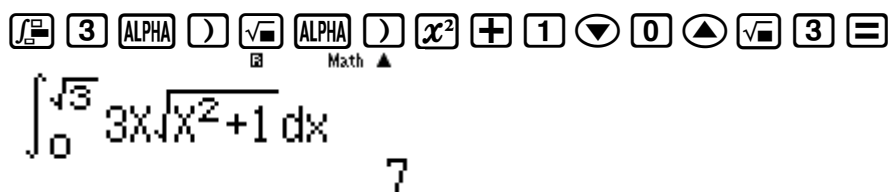
B. 7

C. -5

D. -3

GIẢI

- Tính tích phân $\int_0^{\sqrt{3}} 3x\sqrt{x^2+1} dx = 7 \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**



- Chú ý: Tự luận với dấu hiệu “xuất hiện căn thức” ta sẽ đặt căn thức là ẩn phụ

Đặt $t = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow t^2 = x^2+1$ Vi phân hai vế $\Rightarrow 2x dx = 2t dt \Rightarrow x dx = t dt$.

Đổi biến: $\begin{cases} x=0 \Rightarrow t=1 \\ x=\sqrt{3} \Rightarrow t=2 \end{cases}$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^2 3t \cdot t dt = t^3 \Big|_1^2 = 7$

Bài 3-[Group Nhóm Toán 2107] Tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3}$ bằng :

A. $\ln 3$

B. $\ln \frac{3}{4}$

C. $\ln \frac{3}{2}$

D. $\ln \frac{1}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{dx}{e^x + 2e^{-x} - 3} = 0.4054... = \ln\left(\frac{3}{2}\right) \Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

Calculator interface showing the integral calculation of $\int_{\ln(3)}^{\ln(5)} \frac{1}{e^x + 2e^{-x} - 3} dx$, resulting in 0.4054651081.

- Chú ý:** Tự luận với dấu hiệu “xuất hiện e^x ” ta sẽ đặt e^x là ẩn phụ
Đặt $t = e^x$ Vì phân hai vế $\Rightarrow e^x dx = dt$.

Đổi biến : $\begin{cases} x = \ln 3 \Rightarrow t = 3 \\ x = \ln 5 \Rightarrow t = 5 \end{cases}$. Khi đó tích phân trở thành $\int_{\ln 3}^{\ln 5} \frac{e^x dx}{e^{2x} - 3e^x + 2} = \int_3^5 \frac{dt}{t^2 - 3t + 2} = ... = \ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Bài 4-[THPT Nho Quan – Ninh Bình 2017] Cho $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = \frac{1}{4} \ln 3$. Tìm giá trị của a :

A. 3

B. 2

C. 4

D. 6

GIẢI

- Thử với $a = 3$. Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = 0.2512... \neq \frac{1}{4} \ln 3 \Rightarrow$ Đáp số A sai

Calculator interface showing the integral calculation of $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos(2x)}{1+2\sin(2x)} dx$, resulting in 0.2512631347.

- Thử với $a = 4$ Tính tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos 2x}{1 + 2 \sin 2x} dx = 0.2746 = \frac{1}{4} \ln 3 \Rightarrow$ Đáp số C sai

Calculator interface showing the integral calculation of $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos(2x)}{1+2\sin(2x)} dx$, resulting in 0.2746530722.

- Chú ý:** Tự luận với dấu hiệu “xuất hiện cụm $\cos 2x dx$ ” ta sẽ đặt $\sin 2x = t$ là ẩn phụ

Bài 5-[Báo THPT tháng 11 năm 2016] Giá trị nào của a để $\int_0^a (3x^2 + 2) dx = a^3 + 2$?:

A. 0

B. 1

C. 2

D. 3

GIẢI

- Thiết lập phương trình $\int_0^a (3x^2 + 2) dx - (a^3 + 2) = 0$. Vì đề bài cho sẵn các nghiệm nên ta sử dụng phép thử

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Với $a=1$ về trái phương trình là : $\int_0^1 (3x^2 + 2) dx - (1^3 + 2) = 0 \Rightarrow$ Đáp án đúng là **B**

Bài 6-[THPT Thuận Thành 1 – Bắc Ninh 2017] Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx$:

A. $I = e^2 - \frac{1}{2}$

B. $I = \frac{e^2 + 1}{2}$

C. $I = e^2 + 1$

D. $I = \frac{e^2}{2}$

GIẢI

- Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{x^2 + 2 \ln x}{x} dx = 4.1945... = \frac{e^2 + 1}{2} \Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Tự luận ta nên tách tích phân thành 2 tích phân con để dễ xử lý : $I = \int_1^e x dx + 2 \int_1^e \ln x \cdot \frac{1}{x} dx$

Nếu tích phân “xuất hiện cụm $\frac{1}{x} dx$ “ thì Đặt $\ln x = t$ Vì phân hai vế $\Rightarrow \frac{1}{x} dx = dt$.

Đổi biến : $\begin{cases} x=1 \Rightarrow t=0 \\ x=e \Rightarrow t=1 \end{cases}$. Khi đó tích phân trở thành $\int_1^e x dx + 2 \int_0^1 t dt = \frac{e^2 + 1}{2}$

PHƯƠNG PHÁP CASIO - VINACAL

BÀI 20. TÍNH NHANH DIỆN TÍCH HÌNH PHẪNG.

1) KIẾN THỨC NỀN TẢNG

1. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $y = f(x)$, $y = g(x)$ và hai đường thẳng $x = a$, $x = b$ được tính theo công thức

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx \quad (1) \quad (\text{Dạng 1})$$

Quy ước: Trong bài học này ta gọi đường thẳng $x = a$ là cận thứ nhất, $x = b$ là cận thứ hai

Chú ý: Khi đề bài không cho hai cận thì hai cận sẽ có dạng $x = x_1$, $x = x_2$ với x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm

2. Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = f(y)$, $x = g(y)$ và hai cận $y = a$, $y = b$ được tính theo công thức:

$$S = \int_a^b |f(y) - g(y)| dy \quad (2) \quad (\text{Dạng 2})$$

3. Tổng hợp phương pháp (gồm 3 bước)

+) **Bước 1**: Xác định rõ hai hàm $y = f(x)$, $y = g(x)$ hoặc $x = f(y)$, $x = g(y)$

+) **Bước 2**: Xác định rõ 2 cận $x = a$, $x = b$ hoặc $y = a$, $y = b$

+) **Bước 3**: Lấp vào công thức (1) hoặc (2) rồi sử dụng máy tính casio

2) VÍ DỤ MINH HỌA

VD1-[Đề minh họa môn Toán Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = x^3 - x$ và đồ thị hàm số $y = x - x^2$

A. $\frac{37}{12}$

B. $\frac{9}{4}$

C. $\frac{81}{12}$

D. $\frac{13}{13}$

GIẢI

➤ Ta có hai hàm số $y = x^3 - x$ và $y = x - x^2$

➤ Giải phương trình hoành độ giao điểm $x^3 - x = x - x^2 \Leftrightarrow x^3 + x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$

Ta có 3 cận $x = 0$; $x = 1$; $x = -2$ mà công thức chỉ có 2 cận vậy ta chia thành 2 khoảng cận $-2 \leq x \leq 0$ và $0 \leq x \leq 1$

➤ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 - x$ và hai đường thẳng

$$x = -2; x = 0 \text{ là } S_1 = \int_{-2}^0 |(x^3 - x) - (x - x^2)| dx$$

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = x^3 - x$, $y = 3 - x$ và hai đường thẳng

$$x = 0; x = 1 \text{ là } S_2 = \int_0^1 |(x^3 - x) - (x - x^2)| dx$$

➤ Vậy tổng diện tích $S = \int_{-2}^0 |(x^3 - x) - (x - x^2)| dx + \int_0^1 |(x^3 - x) - (x - x^2)| dx$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

$$\int_{-2}^0 (x^3 - x) - (x - 2) dx = \frac{37}{12}$$

Vậy $S = \frac{37}{12}$ ta chọn đáp án chính xác là **A**

❖ Bình luận :

- Thật tuyệt vời phải không, và từ đây theo 3 bước kết hợp Casio ta sẽ làm mọi bài liên quan đến tính diện tích hình phẳng.

VD2-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Cho miền (D) giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = \ln(x+1)$, $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$, $x = 2$. Diện tích miền phẳng (D) bằng :

- A. $\ln \sqrt[3]{16} \cdot (\sqrt{2} + 1) - 3 \ln 3 + 1$ B. $-\frac{4}{3} \ln 2 \cdot (\sqrt{2} + 1) + 3 \ln 3 - 1$
 C. $\ln \frac{16}{27} + \frac{4}{3} \sqrt{2} \ln 2 + 1$ D. $\ln \frac{\sqrt[3]{16}}{27} + \frac{4}{3} \ln 2^{\sqrt{2}} + 1$

GIẢI

- Ta có hai hàm số $y = \ln(x+1)$ và $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$
- Cận đầu tiên là $x = 2$ ta đi tìm cận tiếp theo bằng cách giải phương trình hoành độ giao điểm $\ln(x+1) = \ln 2 \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow \ln(x+1) - \ln 2 \cdot \sqrt{x} = 0$

Để giải nhanh phương trình này ta sẽ sử dụng Casio với chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

$$\ln(x+1) - \ln(2) \times \sqrt{x}$$

Ta được nghiệm $x = 1$

Vậy ta tìm được hai cận $x = 1$; $x = 2$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai hàm số $y = \ln(x+1)$, $y = \ln 2 \cdot \sqrt{x}$ và hai đường

thẳng $x = 1$; $x = 2$ là $S = \int_1^2 |\ln(x+1) - \ln 2 \cdot \sqrt{x}| dx$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

$$\int_1^2 |\ln(x+1) - \ln(2) \cdot \sqrt{x}| dx = 0.0646297673$$

Vậy $S = 0,0646...$ Tính giá trị xem đáp án nào có kết quả $0,0646...$ thì là đáp án chính xác. $\Rightarrow$ ta chọn **B**

❖ Bình luận :

- Việc tìm nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm hay tung độ giao điểm mà phức tạp ta có thể tính nhanh bằng kỹ thuật dò nghiệm với chức năng SHIFT SOLVE đã được học ở bài trước.

VD3-[Th thử website Vnmath.com lần 1 năm 2017]

A. $\sqrt[3]{16}$ **B.** $\sqrt[3]{9}$ **C.** $2\sqrt{2}$ **D.** $3\sqrt{3}$

➤ Hai hàm số $y = x^2$ và $y = 4$

Vậy cân thứ nhất là $x = -2$ cân thứ hai là $x = 2$

- $$x = -2, x = 2 \text{ là : } S = \int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx$$

$$\int_{-2}^2 |x^2 - 4| dx = \frac{32}{3}$$

➤ Vì đường thẳng $y=c$ chia hình phẳng S thành 2 phần bằng nhau $\Rightarrow$ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y=x^2$, đường thẳng $y=c$ có độ lớn là $\frac{16}{3}$

- $$x^2 = \sqrt[3]{16} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[6]{16}$$

$$\Rightarrow S_1 = \int_{-\sqrt[6]{16}}^{\sqrt[6]{16}} |x^2 - \sqrt[3]{16}| dx$$

x^2 x^n
 x^n

VD4-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

A. 2 **B.** $\frac{8}{3}$ **C.** $\frac{4}{3}$ **D.** $\frac{16}{3}$

➤ Hai hàm số $x = y^2 - 1$ và trục Oy có phương trình $x = 0$

Vậy cân thứ nhất là $y = -1$ cân thứ hai là $y = 1$

- $$y = -1, y = 1 \text{ là : } S = \int_{-1}^1 |(y^2 - 1) - 0| dy$$

SHIFT **hyp** **ALPHA** **)** **x^2** **-** **1** **-** **1** **1** **=**

$$\int_{-1}^1 |x^2-1| dx = \frac{4}{3}$$

Vậy $S = \frac{4}{3} \Rightarrow$ đáp số chính xác là **C**

❖ **Bình luận :**

- Bài toán này nên đưa về dạng 2 thì sẽ dễ dàng tính toán hơn. Nếu đưa về dạng 1 ta phải tính $y = \pm\sqrt{x+1}$ rồi lại phải tìm cận sẽ khó hơn
- Ta hiểu với máy tính X hay Y chỉ là kí hiệu nên $S = \int_{-1}^1 |(y^2-1)-0| dy = \int_{-1}^1 |(x^2-1)-0| dx$

Nên ta có thể thực hiện phép tính với máy tính casio như trên

VD5-[Sách bài tập Nâng cao Giải tích lớp 12 t.153]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $x = y^{\frac{2}{3}}$, đường cong $x + y^4 = 2$ và trục hoành

- A. $\frac{6}{5}$ B. $\frac{8}{5}$ C. $\frac{5}{5}$ D. $\frac{7}{4}$

GIẢI

- Hai hàm số $x = y^{\frac{2}{3}}$ và $x = 2 - y^4$

Trục hoành có phương trình $y = 0 \Rightarrow$ cận thứ nhất $y = 0$

Để tìm cận thứ hai ta giải phương trình tung độ giao điểm : $y^{\frac{2}{3}} = 2 - y^4$. Để giải nhanh ta sử dụng chức năng dò nghiệm SHIFT SOLVE

$$x^3 + x^4 - 2 = 0$$

$$x = 1$$

vậy cận thứ hai là $y = 1$

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = y^{\frac{2}{3}}$, $x = 2 - y^4$ và hai đường thẳng

$$y = 0, y = 1 \text{ là : } S = \int_0^1 \left(y^{\frac{2}{3}} - (2 - y^4) \right) dy$$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân

$$\int_0^1 \left(x^{\frac{2}{3}} - 2 + x^4 \right) dx = 1.199999964$$

Vậy $S = 2 \Rightarrow$ đáp số chính xác là **A**

❖ **Bình luận :**

- Do cài đặt làm tròn của máy tính của mỗi máy là khác nhau nên ta nhanh nhạy trong việc làm tròn để tìm đáp án đúng nhất.

VD6-[Thi thử lớp toán thầy Bình lần 2 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi Elip có phương trình $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

A. π

B. 3π

C. $\frac{9\pi}{5}$

D. $\frac{7\pi}{3}$

GIẢI

➤ Ta có $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1 \Leftrightarrow x^2 = 1 - \frac{y^2}{9} \Leftrightarrow x = \pm \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \Rightarrow$ Hai hàm số $x = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ và $x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$

Để tìm hai cận ta giải phương trình tung độ giao điểm :

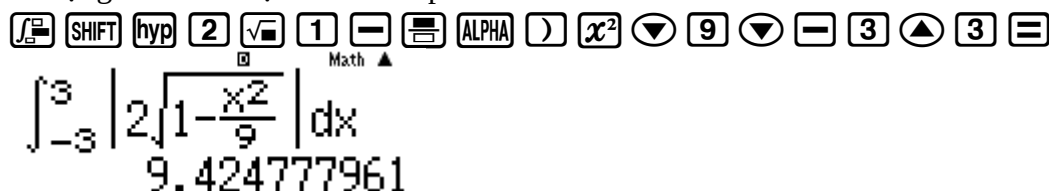
$$-\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \Leftrightarrow \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} = 0 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

vậy cận thứ nhất $y = -3$ và cận thứ hai $y = 3$

➤ Diện tích hình phẳng giới hạn bởi hai đồ thị hàm số $x = -\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$, $x = \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}}$ và hai

$$\text{đường thẳng } y = -3, y = 3 \text{ là : } S = \int_{-3}^3 \left| \sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} - \left(-\sqrt{1 - \frac{y^2}{9}} \right) \right| dy$$

Sử dụng Casio với lệnh tính tích phân



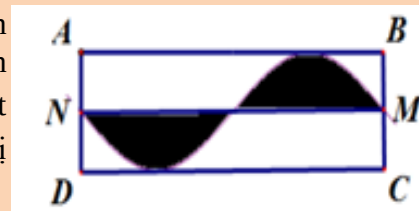
Vậy $S = 9.4247... = 3\pi \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

❖ **Bình luận :**

- Trong chương trình lớp 10 sách giáo khoa đã đề cập đến các tính chất cơ bản của hình Elip nhưng chưa đề cập đến công thức tính diện tích của Elip và việc sử dụng tích phân để tính diện tích Elip là một ứng dụng tuyệt vời.

VD7-[Thi học sinh giỏi tỉnh Phú Thọ năm 2017]

Người ta trồng hoa vào phần đất được tô màu đen được giới hạn bởi các cạnh AB, CD đường trung bình MN của mảnh đất hình chữ nhật $ABCD$ và một đường cong hình sin (như hình vẽ). Biết $AB = 2\pi(m)$, $AD = 2(m)$. Tính diện tích đất phần còn lại (đơn vị tính m^2)



A. $4\pi - 1$

B. $4(\pi - 1)$

C. $4\pi - 2$

D. $4\pi - 3$

GIẢI

➤ Diện tích hình chữ nhật $ABCD$ là : $S_1 = AB \cdot CD = 4\pi(m^2)$

➤ Hình sin có biên độ ± 1 và chu kỳ 2π nên có phương trình là : $y = \sin x$

Gắn hình trên lên trục tọa độ Oxy với gốc tọa độ O là giao điểm của đồ thị hình sin với trục hoành MN

$$\text{Ta có diện tích hình màu đen bên phải trục hoành là : } S_2 = \int_0^\pi |\sin x - 0| dx = 2$$



$$\int_0^{\pi} |\sin(x) - 0| dx = 2$$

- Diện tích cần tìm $= S_1 - 2S_2 = 4\pi - 4 \Rightarrow$ đáp số chính xác là **B**

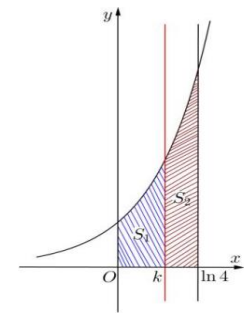
❖ **Bình luận :**

Nếu đề bài thay đổi thành $AD = 4$ như vậy biên độ hình sin là ± 2 vậy sẽ có phương trình là $y = 2\sin x$

VD8-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 2 năm 2017]

Cho hình thang cong (H) giới hạn bởi các đường $y = e^x, y = 0, x = 0$ và $x = \ln 4$. Đường thẳng $x = k$ ($0 < k < \ln 4$) chia (H) thành hai phần có diện tích S_1, S_2 như hình vẽ bên. Tìm k để $S_1 = 2S_2$

- A. $k = \frac{2}{3} \ln 4$ B. $k = \ln 2$
C. $k = \ln \frac{8}{3}$ D. $k = \ln 3$



GIẢI

- Gọi S là diện tích hình (H) ta có $S = \int_0^{\ln 4} |e^x - 0| dx = 3$

$$\int_0^{\ln(4)} |e^x| dx = 3$$

- Vì $S_1 = 2S_2$ mà tổng diện tích là 3 $\Rightarrow S_1 = 2 \Rightarrow \int_0^k |e^x| dx = 2$. Thử các đáp án ta có $k = \ln 3$

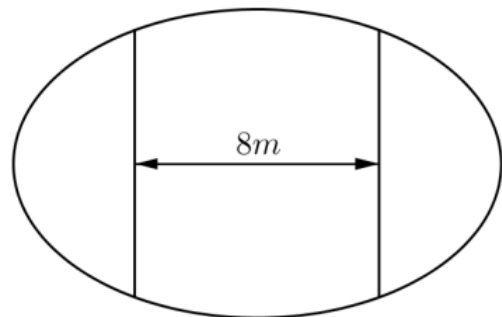
$$\int_0^{\ln(3)} |e^x| dx = 2$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **D**

VD9-[Đề minh họa Bộ GD-ĐT lần 1 năm 2017]

Ông An có một mảnh vườn hình Elip có độ dài trục lớn bằng $16m$ và độ dài trục bé bằng $10m$. Ông muốn trồng hoa trên một dải đất rộng $8m$ và nhận trục bé của Elip làm trục đối xứng (như hình vẽ). Biết kinh phí để trồng hoa là 100.000 đồng $1m^2$. Hỏi ông An cần bao nhiêu tiền để trồng hoa trên dải đất đó? (Số tiền làm tròn đến hàng ngàn)

- A. 7.862.000 B. 7.653.000
C. 7.128.000 D. 7.826.000



GIẢI

- Xét hệ tọa độ Oxy đặt vào tâm khu vườn, phương trình Elip viền khu vườn là $\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{25} = 1$

Xét phần đồ thị Elip nằm phía trên trục hoành có $y = 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}}$

- Diện tích S của dải đất cũng chính bằng 2 lần phần hình phẳng giới hạn bởi đồ thị $y = f(x)$, trục hoành, đường thẳng $x = -4$, đường thẳng $x = 4$

$$\Rightarrow S = 2 \int_{-4}^4 \left| 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} - 0 \right| dx = 76.5389182$$



$$2 \int_{-4}^4 \left| 5\sqrt{1 - \frac{x^2}{64}} \right| dx = 76.5289182$$

$\Rightarrow$ Số tiền cần là 100.000S



Ans x 100000

7652891.82

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành trong miền $x \geq 0$ bằng :

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

Bài 2-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$

- A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{14}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{6}{15}$

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = |x^2 + 1|$ và $y = |x| + 3$ bằng :

- A. $\frac{10}{4}$ B. $\frac{20}{3}$ C. $\frac{40}{3}$ D. $\frac{52}{3}$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đồ thị hàm số $y = 3 - x$ và trục tung

- A. $\frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$ B. $3 - \frac{1}{\ln 2}$ C. $5 - \frac{3}{\ln 2}$ D. $2 + \frac{1}{\ln 2}$

Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y = 0$, $x = \frac{1}{e}$, $x = e$ có thể

được viết dưới dạng $S = a \left(1 - \frac{1}{e} \right)$. Tìm khẳng định sai :

- A. $a^2 - 3a + 2 = 0$ B. $a^2 - a - 2 = 0$ C. $a^2 + 3a - 4 = 0$ D. $2a^2 - 3a - 2 = 0$

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2; -2)$ là :

- A. $\frac{8}{3}$ B. $\frac{64}{3}$ C. $\frac{16}{3}$ D. $\frac{40}{3}$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ ($a > 0$), trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

- A. $k = \frac{7}{3}$ B. $k = \frac{4}{3}$ C. $k = \frac{12}{5}$ D. $k = \frac{6}{5}$

LỜI GIẢI BÀI TẬP TỰ LUYỆN

Bài 1-[Thi thử chuyên KHTN Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = x^2$, đường thẳng $y = 2 - x$ và trục hoành trong miền $x \geq 0$ bằng :

- A. $\frac{9}{2}$ B. $\frac{7}{6}$ C. $\frac{10}{3}$ D. $\frac{5}{6}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 = 2 - x \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = -2 \end{cases}$. Tuy nhiên đề bài yêu cầu tính diện tích

trên miền $x \geq 0 \Rightarrow$ Ta tính diện tích hình phẳng trên miền $[0; 1]$

$\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x = 0$, cận thứ hai $x = 1$.

- Diện tích cần tính là : $S = \int_0^1 |x^2 - (2 - x)| dx = \frac{7}{6}$

$$\int_0^1 |x^2 - (2 - x)| dx = \frac{7}{6}$$

- Chú ý:** Nếu đề bài không yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \geq 0$ thì ta tính trên toàn bộ miền $[-2; 0]$. Ta có : $S = \int_{-2}^1 |x^2 - (2 - x)| dx = \frac{9}{2}$

Nếu đề bài yêu cầu tính diện tích hình phẳng trên miền $x \leq 0$ thì ta tính trên miền $[-2; 0]$. Ta có :

$$S = \int_{-2}^0 |x^2 - (2 - x)| dx = \frac{10}{3}$$

Các e học sinh chú ý điều này vì rất dễ gây nhầm lẫn.

Bài 2-[Thi thử chuyên Vĩ Thanh – Hậu Giang năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = x^2 + x - 1$ và $y = x^4 + x - 1$

- A. $\frac{8}{15}$ B. $\frac{14}{15}$ C. $\frac{4}{15}$ D. $\frac{6}{15}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $x^2 + x - 1 = x^4 + x - 1 \Leftrightarrow x^4 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 1 \\ x = -1 \end{cases}$.

$\Rightarrow$ Ta có cận thứ nhất $x = -1$, cận thứ hai 0 , cận thứ ba $x = 1$

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Diện tích cần tính là : $S = \int_{-1}^0 \left| (x^2 + x - 1) - (x^4 + x - 1) \right| dx + \int_0^1 \left| (x^2 + x - 1) - (x^4 + x - 1) \right| dx = \frac{4}{15}$

$\int_{-1}^0 \left| (x^2 + x - 1) - (x^4 + x - 1) \right| dx + \int_0^1 \left| (x^2 + x - 1) - (x^4 + x - 1) \right| dx = \frac{4}{15}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **C**

- Chú ý:** Em nào hiểu phép biến đổi tính diện tích thì có thể bấm máy theo công thức

$S = \int_{-1}^0 |x^2 - x^4| dx + \int_0^1 |x^2 - x^4| dx$ sẽ rút gọn được thao tác bấm máy.

Bài 3-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đồ thị hàm số $y = |x^2 + 1|$ và $y = |x| + 3$ bằng :

A. $\frac{10}{4}$

B. $\frac{20}{3}$

C. $\frac{40}{3}$

D. $\frac{52}{3}$

GIẢI

- Phương trình hoành độ giao điểm $|x^2 + 1| = |x| + 3 \Leftrightarrow x^2 + 1 = |x| + 3 \Leftrightarrow x^2 - |x| - 2 = 0$ (1).

Với $x \geq 0 \Leftrightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ (vì $x \geq 0$)

Với $x < 0 \Rightarrow (1) \Leftrightarrow x^2 + x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = -2$ (vì $x < 0$)

$\Rightarrow$ Cận thứ nhất $x = -2$, cận thứ hai $x = 2$.

- Diện tích cần tính là : $S = \int_{-2}^2 \left| x^2 + 1 - (|x| + 3) \right| dx = \frac{20}{3}$

$\int_{-2}^2 \left| x^2 + 1 - (|x| + 3) \right| dx = \frac{20}{3}$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý:** Phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối $x^2 - |x| - 2 = 0$ có thể giải bằng Casio thay vì chia khoảng để phá dấu giá trị tuyệt đối.

$x^2 - |x| - 2 = 0$
 $x = -2$
 $x = 2$

$\Rightarrow$ Ta tìm được hai nghiệm $x = -2; x = 2$

Bài 4-[Thi thử nhóm toán Đoàn Trí Dũng lần 3 năm 2017]

Tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $y = 2^x$ và đồ thị hàm số $y = 3 - x$ và trục tung

A. $\frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$

B. $3 - \frac{1}{\ln 2}$

C. $5 - \frac{3}{\ln 2}$

D. $2 + \frac{1}{\ln 2}$

GIẢI

TÓM TẮT KỸ THUẬT SỬ DỤNG CASIO - VINACAL HỖ TRỢ GIẢI ĐỀ THI MÔN TOÁN 2017.

- Đề bài cho trục tung có phương trình $x=0$ nên cận thứ nhất là $x=0$
Phương trình hoành độ giao điểm $2^x = 3-x$. $\Leftrightarrow x=1$ là nghiệm duy nhất $\Rightarrow$ cận thứ hai $x=1$
- Diện tích cần tính là : $S = \int_0^1 |2^x - (3-x)| dx = 1.0573... = \frac{5}{2} - \frac{1}{\ln 2}$

$\int_0^1 |2^x - (3-x)| dx$

$$1.057304959$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là **A**

- Chú ý:** Để giải phương trình $2^x = 3-x$ ta có thể sử dụng máy tính Casio

$2^x = 3-x$

$$x=1$$

Ta nhận được nghiệm $x=1$. Tuy nhiên vì sao $x=1$ lại là nghiệm duy nhất thì xem lại ở bài “Sử dụng Casio tìm nghiệm phương trình mũ.”

Bài 5-[Đoàn Quỳnh -Sách bài tập trắc nghiệm toán 12]

Biết diện tích S của hình phẳng giới hạn bởi các đường $y = \ln x$, $y=0$, $x = \frac{1}{e}$, $x=e$ có thể được viết dưới dạng $S = a \left(1 - \frac{1}{e}\right)$. Tìm khẳng định sai :

A. $a^2 - 3a + 2 = 0$

B. $a^2 - a - 2 = 0$

C. $a^2 + 3a - 4 = 0$

D. $2a^2 - 3a - 2 = 0$

GIẢI

- Diện tích hình phẳng giới hạn bởi $y = \ln x$, $y=0$, $x = \frac{1}{e}$, $x=e$ là : $S = \int_{\frac{1}{e}}^e |\ln x - 0| dx = 1.2642...$

$\int_{\frac{1}{e}}^e |\ln(x)| dx$

$$1.264241118$$

- Vì $S = a \left(1 - \frac{1}{e}\right) \Rightarrow a = \frac{S}{1 - \frac{1}{e}} = 2$

$\text{Ans} \div \left(1 - \frac{1}{e}\right)$

$$2$$

Chỉ có phương trình ở câu C không chứa nghiệm này $\Rightarrow$ đáp án C là đáp án chính xác

- Chú ý:** Bài này không cần dùng đến kiến thức của tích phân vẫn có thể làm được. Đề bài yêu cầu tìm đáp án mà số a không thỏa mãn $\Rightarrow a$ không phải nghiệm chung của các phương trình. Mà nghiệm chung của các phương trình là 2 nên đáp số C không thỏa mãn

Bài 6-[Đề cương chuyên KHTN Hà Nội năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đồ thị hàm số $(P): y = x^2 - 2x + 2$ và các tiếp tuyến với (P) đi qua các điểm $A(2; -2)$ là :

A. $\frac{8}{3}$

B. $\frac{64}{3}$

C. $\frac{16}{3}$

D. $\frac{40}{3}$

GIẢI

- Viết phương trình tiếp tuyến đi qua $A(2;-2)$ ta thu được

Tiếp tuyến thứ nhất $y = -2x + 2$ với tiếp điểm $B(0;2)$

Tiếp tuyến thứ hai $y = 6x - 14$ với tiếp điểm $C(4;10)$

Ta hiểu hình phẳng cần tính diện tích là phần đường cong có 3 đỉnh A, B, C ta thu được ba cận là :
 $x = 0; x = 2; x = 4$

$$\Rightarrow S = \int_0^2 \left| (x^2 - 2x + 2) - (-2x + 2) \right| dx + \int_2^4 \left| (x^2 - 2x + 2) - (6x - 14) \right| dx = \frac{16}{3}$$

$\Rightarrow$ Đáp số chính xác là C

- Chú ý:** Để biết được tiếp tuyến tại sao lại là $y = -2x + 2; y = 6x - 14$ thì xem lại bài Casio tìm tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

Giải thích công thức (1) : Trên miền $x \in [0;2]$ ta thấy hai cận này được hình thành bởi hai đường cong $y = x^2 - 2x + 2; y = -2x + 2$ nên diện tích phải được tính theo công thức

$$\int_0^2 \left| (x^2 - 2x + 2) - (-2x + 2) \right| dx$$

Bài 7-[Thi thử THPT Lương Thế Vinh – Hà Nội lần 1 năm 2017]

Diện tích hình phẳng giới hạn bởi đường cong $y = 2\sqrt{ax}$ ($a > 0$), trục hoành và đường thẳng $x = a$ bằng ka^2 . Tính giá trị của tham số k

A. $k = \frac{7}{3}$

B. $k = \frac{4}{3}$

C. $k = \frac{12}{5}$

D. $k = \frac{6}{5}$

GIẢI

- Xét phương trình hoành độ giao điểm của đường cong và trục hoành : $2\sqrt{ax} = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Ta được cận thứ nhất $x = 0$ và cận thứ hai $x = a$. Khi đó diện tích hình phẳng là :

$$S = \int_0^a \left| 2\sqrt{ax} - 0 \right| dx$$

- Thiết lập quan hệ $\int_0^a \left| 2\sqrt{ax} - 0 \right| dx = ka^2 \Leftrightarrow k = \frac{\int_0^a \left| 2\sqrt{ax} - 0 \right| dx}{a^2}$. Chọn giá trị dương a bất kì ví dụ

$$a = 3 \text{ khi đó } k = \frac{1}{9} \int_0^3 \left| 2\sqrt{3x} - 0 \right| dx = 1.33(3) = \frac{4}{3}$$

Ra một kết quả khác 0 vậy đáp án A sai

$$\frac{1}{9} \int_0^3 2\sqrt{3x} dx$$

$$1.333333333$$

⇒ Đáp số chính xác là **B**

- Chú ý: Dù ta chọn giá trị dương a bất kì thì đáp số k đều ra $\frac{4}{3}$ ví dụ ta chọn $a = 1.125$

$$\text{Khi đó } k = \frac{1}{1.125^2} \int_0^{1.125} |2\sqrt{1.125x} - 0| dx = 1.33(3) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{1}{1.125^2} \int_0^{1.125} 2\sqrt{x} dx$$

$$1.333333333$$