

Người làm: Thanh Hiếu

Zalo: Thanh Hiếu

- số đt zalo: 0905528947

Email: maihieuctt2@gmail.com

Dạng 1. Tính số đo góc, chứng minh góc bằng nhau.

Câu 1. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tính số đo bằng độ của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ vào lúc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút?

Lời giải

Tính từ 12 giờ đúng đến 12 giờ 20 thì kim phút quay được 120° , kim giờ quay được 10° .

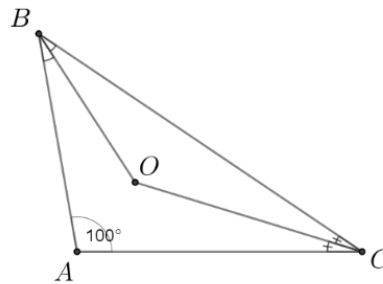
Vậy số đo của góc tạo bởi kim phút và kim giờ của một chiếc đồng hồ chỉ 12 giờ 20 phút là:

$$120^\circ - 10^\circ = 110^\circ$$

Câu 2. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tam giác ABC có số đo góc A bằng 100° . Tia phân giác của góc ABC và tia phân giác của góc ACB cắt nhau tại O . Tính số đo của góc BOC ?

Lời giải



Ta có $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$ (tổng ba góc trong một tam giác)

$$100^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$$

$$\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$$

Ta lại có: $\angle OBC = \frac{\angle ABC}{2}$ (vì BO là tia phân giác của $\angle ABC$)

$$\angle OCB = \frac{\angle ACB}{2} \quad (\text{tia } CO \text{ là tia phân giác của } \angle ACB)$$

$$\angle OBC + \angle OCB = \frac{\angle ABC}{2} + \frac{\angle ACB}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ$$

Suy ra

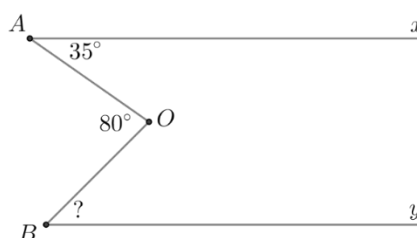
$$\angle OBC + \angle OCB + \angle BOC = 180^\circ \quad (\text{tổng ba góc trong một tam giác})$$

$$\angle BOC = 180^\circ - (\angle OBC + \angle OCB) = 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

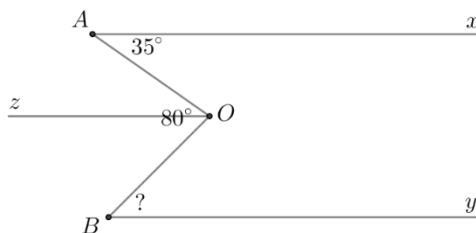
Suy ra

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)

Trong hình bên, cho $Ax \parallel By$; Biết $\angle A = 35^\circ$ và $\angle O = 80^\circ$. Tính góc B .



Lời giải



Qua O kẻ $Oz \parallel Ax$

Vì $Oz \parallel Ax$ nên $\widehat{A} = \widehat{AOz} = 35^\circ$ (hai góc so le trong)

Mà $\widehat{AOz} + \widehat{BOz} = \widehat{AOB}$

$$\Rightarrow 35^\circ + \widehat{BOz} = 80^\circ \Rightarrow \widehat{BOz} = 45^\circ$$

Do $Oz \parallel Ax$ mà $Ax \parallel By$ nên $Oz \parallel By$

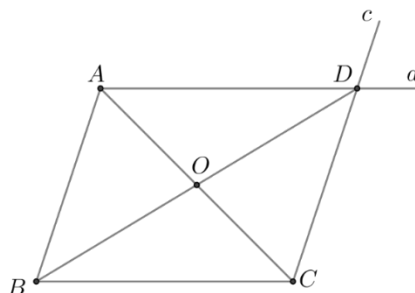
$$\Rightarrow \widehat{B} = \widehat{BOz} = 45^\circ \quad (2 \text{ góc so le trong}).$$

Dạng 2. Chứng minh đoạn thẳng bằng nhau.

Câu 1. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC , qua A kẻ đường thẳng a song song với BC , qua C kẻ đường thẳng c song song với AB , a cắt c tại D . Gọi O là giao điểm của AC và BD . Chứng minh $OC = OA$.

Lời giải



Xét $\triangle ABD$ và $\triangle CDB$ có:

$$\widehat{ABD} = \widehat{CDB} \quad (\text{so le trong vì } c \parallel AB)$$

BD cạnh chung

$$\widehat{ADB} = \widehat{CBD} \quad (\text{so le trong vì } a \parallel BC)$$

Suy ra $\triangle ABD = \triangle CDB$ (g - c - g)

$$\Rightarrow AB = CD \quad (2 \text{ cạnh tương ứng})$$

Xét $\triangle AOB$ và $\triangle COD$ có:

$$\widehat{OAB} = \widehat{OCD} \quad (\text{so le trong vì } a \parallel BC)$$

$$AB = CD \quad (\text{cmt})$$

$$\widehat{OBA} = \widehat{OCD} \quad (\text{so le trong vì } c \parallel AB)$$

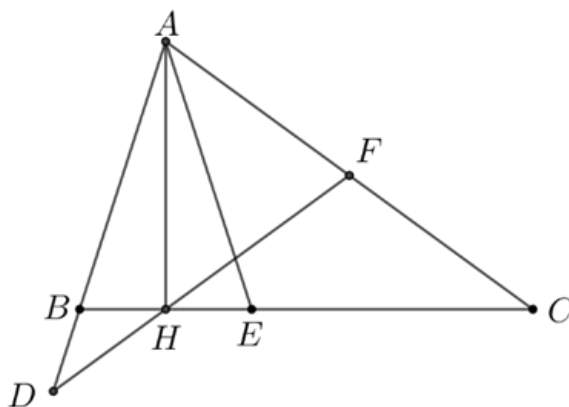
Suy ra $\triangle AOB = \triangle COD$ (g - c - g)

$$\Rightarrow OA = OC \quad (2 \text{ cạnh tương ứng}).$$

Câu 2. (HSG 7 Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $\widehat{B} = 2\widehat{C} < 90^\circ$ vẽ AH vuông góc với BC tại H . Trên tia AB lấy điểm D sao cho $AD = HC$. Chứng minh đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Lời giải



Gọi giao điểm của DH với AC là F .

Vì $\angle B = 2\angle C < 90^\circ$ nên $AC > BA$, suy ra: $HC > HB$

Trên HC lấy E sao cho $HB = HE$ (1)

Xét $\triangle AHB$ và $\triangle AHE$ có:

AH chung

$$\angle AHB = \angle AHE = 90^\circ$$

$$HB = HE$$

$$\Rightarrow \triangle AHB = \triangle AHE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow \angle ABH = \angle AEH \text{ và } AB = AE$$

$$\text{Mà: } \angle B = 2\angle C \Rightarrow \angle AEH = 2\angle ACB$$

$$\text{Mặt khác: } \angle AEH = \angle ACB + \angle CAE \text{ (góc ngoài tam giác)}$$

$$\text{Do đó: } \angle ACB = \angle CAE, \text{ suy ra: } \triangle ACE \text{ cân tại } E \text{ nên } EA = EC \Rightarrow AB = EC$$

$$\text{Mà: } AD = HC \Rightarrow AB + BD = HE + EC \Rightarrow BD = EH \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2), suy ra: $BD = BH$ do đó $\triangle BDH$ cân tại B

$$\Rightarrow \angle BDH = \angle BHD = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ACB \Rightarrow \angle AHF = \angle FAH \text{ (cùng phụ với hai góc bằng nhau)}$$

$$\text{Suy ra: } \triangle AFH \text{ cân tại } F \Rightarrow FA = FH$$

$$\text{Lại có: } \triangle HFC \text{ cân tại } F \Rightarrow FH = FC \Rightarrow FC = FA \text{ nên } F \text{ là trung điểm của } AC.$$

Vậy đường thẳng DH đi qua trung điểm của đoạn thẳng AC .

Dạng 3. Chứng minh ba điểm thẳng hàng.

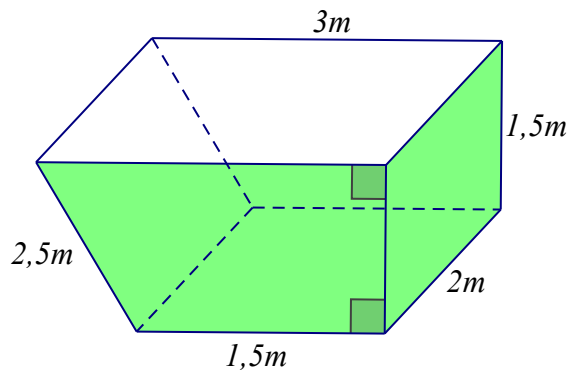
Dạng 4. Bất đẳng thức trong tam giác.

Dạng 5. Chứng minh song song, vuông góc.

Dạng 6. Hình khối trong thực tiễn.

Câu 1. (HSG 7 trường THCS-THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Thùng một chiếc máy nông nghiệp có dạng hình lăng trụ đứng tứ giác như hình vẽ. Đáy của hình lăng trụ đứng này (mặt bên của thùng) là một hình thang vuông có các kích thước đáy lớn $3m$, đáy nhỏ $1,5m$. Người ta muốn sơn vỏ bên ngoài chiếc thùng bằng màu xanh, em hãy tính diện tích cần sơn?



Lời giải

Diện tích xung quanh của cái thùng dạng hình lăng trụ đứng là:
 $(2,5 + 1,5 + 1,5 + 3) \cdot 1,5 = 17(m^2)$

Diện tích hai đáy thùng hình thang là:
 $2 \cdot \frac{3 + 1,5}{2} \cdot 1,5 = 6,75(m^2)$

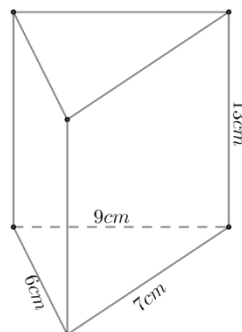
Diện tích phần miệng thùng là:
 $3 \cdot 2 = 6(m^2)$

Diện tích cần sơn là:
 $17 + 6,75 - 6 = 17,75(m^2)$

Câu 2. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

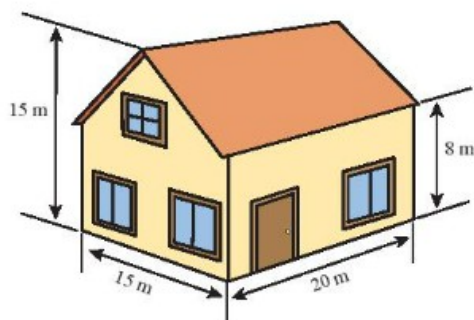
Một lăng trụ đứng có đáy là tam giác; độ dài các cạnh của tam giác đáy là $6cm$, $7cm$, $9cm$. Độ dài cạnh bên lăng trụ bằng $13cm$. Diện tích xung quanh của lăng trụ bằng bao nhiêu cm^2 ?

Lời giải



Diện tích xung quanh của hình lăng trụ đứng là:
 $13 \cdot (6 + 7 + 9) = 286(cm^2)$

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Bình 2022 - 2023)



Một ngôi nhà có các kích thước như hình vẽ.

a) Tính thể tích phần không gian được giới hạn bởi ngôi nhà.

- b) Hỏi phải dùng bao nhiêu lít sơn để sơn phủ được mặt ngoài ngôi nhà? Biết rằng 1 lít sơn bao phủ được 8 m^2 tường (không sơn cửa) và tổng diện tích các cửa là 25 m^2 .

Lời giải

a) $S_d = \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 + 8 \cdot 15 = 172,5 (\text{m}^2)$

$V = 172,5 \cdot 20 = 3450 (\text{m}^3)$

b) $S_{xq} = 2S_1 + S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot 15 + 2(15 + 20) \cdot 8 = 665 (\text{m}^2)$

Diện tích tường phải sơn: $665 - 25 = 640 (\text{m}^2)$

Số lít sơn cần mua: $640 : 8 = 80 (l)$.

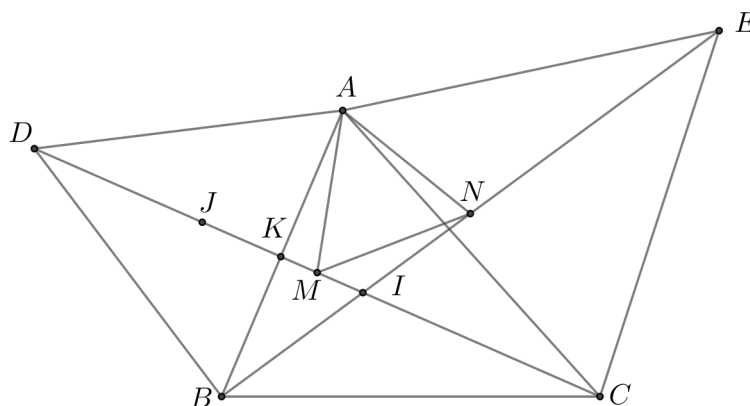
Dạng 7. Bài toán chứng minh tổng hợp

Câu 1. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn ($AB < AC$). Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ABD và ACE . Gọi I là giao của CD và BE , K là giao của AB và DC .

- a) Chứng minh rằng: $\triangle ADC = \triangle ABE$. Từ đó chỉ ra $\angle DIB = 60^\circ$.
b) Gọi M và N lần lượt là trung điểm của CD và BE . Chứng minh rằng $\triangle AMN$ đều.
c) Chứng minh rằng IA là phân giác của góc DIE .

Lời giải



a) * Chứng minh $\triangle ADC = \triangle ABE$

Ta có $\angle DAC = \angle DAB + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$ (vì $\triangle ABD$ là tam giác đều nên $\angle DAB = 60^\circ$)

$\angle BAE = \angle EAC + \angle BAC = 60^\circ + \angle BAC$ (vì $\triangle AEC$ là tam giác đều nên $\angle EAC = 60^\circ$)

Do đó $\angle DAC = \angle BAE = 60^\circ + \angle BAC$

Xét $\triangle ADC$ và $\triangle ABE$ có

$AD = AB$ (vì $\triangle ABD$ là tam giác đều)

$AC = AE$ (vì $\triangle AEC$ là tam giác đều)

$\angle DAC = \angle BAE$ (cmt)

Do đó $\triangle ADC = \triangle ABE$ (c - g - c)

* Chứng minh $\angle DIB = 60^\circ$

+ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow \angle ABE = \angle ADC$ hay $\angle KBI = \angle ADK$

Lại có: $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ (đối đỉnh).

Xét $\triangle BIK$ có $\widehat{BIK} = 180^\circ - (\widehat{BKI} + \widehat{KBI})$

$\triangle DAK$ có $\widehat{DAK} = 180^\circ - (\widehat{ADK} + \widehat{AKD})$

Mà $\widehat{KBI} = \widehat{ADK}$, $\widehat{BKI} = \widehat{AKD}$ nên $\widehat{BIK} = \widehat{DAK}$

Mà $\widehat{DAK} = 60^\circ$ nên $\widehat{BIK} = 60^\circ$

b) + Từ $\triangle ADC = \triangle ABE$ (câu a) $\Rightarrow DC = BE$ và $\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

Ta có $CM = \frac{CD}{2}$ (vì M là trung điểm của CD)

$EN = \frac{EB}{2}$ (vì N là trung điểm của EB)

Mà $DC = BE$ (cmt) nên $CM = EN$

Xét $\triangle ACM$ và $\triangle AEN$ có:

$AC = AE$ (vì $\triangle AEC$ là tam giác đều)

$CM = EN$

$\widehat{ACM} = \widehat{AEN}$

$\Rightarrow \triangle ACM = \triangle AEN$ (c - g - c)

$\Rightarrow AM = AN$ và $\widehat{EAM} = \widehat{EAN}$

Từ $\widehat{EAM} = \widehat{EAN} \Rightarrow \widehat{EAM} + \widehat{EAN} = \widehat{EAN} + \widehat{EAN}$. Hay $\widehat{MAN} = \widehat{EAC}$

Mà $\widehat{EAE} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{MAN} = 60^\circ$

Xét $\triangle AMN$ có $AM = AN$; $\widehat{MAN} = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMN$ đều

c) Trên tia ID lấy điểm J sao cho $IJ = IB \Rightarrow \triangle BIJ$ đều

$\Rightarrow BJ = BI$ và $\widehat{JBI} = \widehat{DBA} = 60^\circ$ suy ra $\widehat{IBA} = \widehat{JBD}$

Xét $\triangle IBA$ và $\triangle JBD$ có:

$AB = BD$ (vì $\triangle ABD$ là tam giác đều)

$BI = BJ$

$\widehat{IBA} = \widehat{JBD}$ (cmt)

Do đó $\triangle IBA = \triangle JBD$ (c.g.c)

$\Rightarrow \widehat{AIB} = \widehat{JDB} = 120^\circ$ mà $\widehat{BID} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIA} = 60^\circ$.

$\widehat{DIB} + \widehat{DIE} = 180^\circ$ (2 gk); $\widehat{DIB} = 60^\circ \Rightarrow \widehat{DIE} = 120^\circ \Rightarrow \widehat{EIA} = 60^\circ$.

Do đó: $\widehat{DIA} = \widehat{EIA}$

Từ đó suy ra IA là phân giác của góc DIE

Câu 2. (HSG 7 thị xã Hương Trà 2022 - 2023)

Cho $\widehat{xAy} = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại

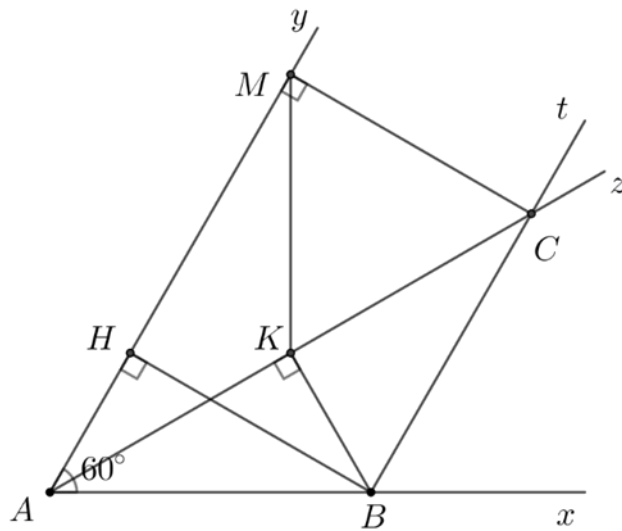
M . Chứng minh:

a) K là trung điểm của AC .

b) $\triangle KMC$ là tam giác đều.

c) Cho $BK = 2\text{cm}$, tính các cạnh của $\triangle AKM$.

Lời giải



a) $\angle CAB = \angle CAM$ (vì Az là tia phân giác của $\angle xAy$)

$At \parallel Ay$ nên $\angle ACB = \angle MAC$ (hai góc so le trong)

$$\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$$

Nên

Suy ra $\triangle ABC$ cân tại B

BK là đường cao của $\triangle ABC$

Có $\angle CAB = \angle ACB (= \angle MAC)$, từ đó suy ra $\angle ABK = \angle CBK$

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle CBK$ có

$$AB = BC \text{ (vì } \triangle ABC \text{ cân tại } B)$$

$$\angle CAB = \angle ACB$$

$$\angle ABK = \angle CBK$$

$$\Rightarrow \triangle ABK = \triangle CBK \text{ (g - c - g)}$$

$$\Rightarrow AK = KC$$

b) $\left. \begin{array}{l} BH \perp Ay \\ CM \perp Ay \end{array} \right\} \Rightarrow BH \parallel CM \Rightarrow \angle BHC = \angle MCH$ (hai góc so le trong)

$BC \parallel HM$ ($Bt \parallel Ay$) $\Rightarrow \angle MHC = \angle HCB$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle CHB$ và $\triangle HCM$ có:

HC là cạnh chung

$$\angle BHC = \angle MCH \text{ (cmt)}$$

$$\angle HCB = \angle MHC \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle CHB = \triangle HCM$ (g - c - g)

Suy ra $BH = CM$ (hai cạnh tương ứng)

Xét $\triangle AHB$ vuông tại H và $\triangle BKA$ vuông tại K có:

AB là cạnh chung

$$\angle HAB = \angle KBA = 60^\circ$$

Do đó $\triangle AHB = \triangle BKA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow AK = BH \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Mà $AK = KC$ (câu a) và $BH = CM$ (cmt) nên $KC = MC$ (1)

Mặt khác $\angle MCA = 90^\circ$ và $\angle ACB = 30^\circ \Rightarrow \angle MCK = \angle MCA - \angle ACB = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \Delta MKC$ đều.

c) ΔABK vuông tại K mà $\angle KAB = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 4cm$

Theo định lý Py-ta-go có $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2}AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$, ΔKCM đều $\Rightarrow KC = KM = \sqrt{12}$

$$AB = BC = 4cm, AH = BK = 2, HM = BC$$

Theo câu b:

$$AM = AH + HM = 6cm$$

Câu 3. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2022 - 2023)

Cho ΔABC vuông tại A ($AB < AC$). M là trung điểm của BC , Lấy D thuộc tia đối của tia MA sao cho $MD = MA$. Kẻ $BI \perp AD$, $CK \perp AD$ ($I, K \in AD$).

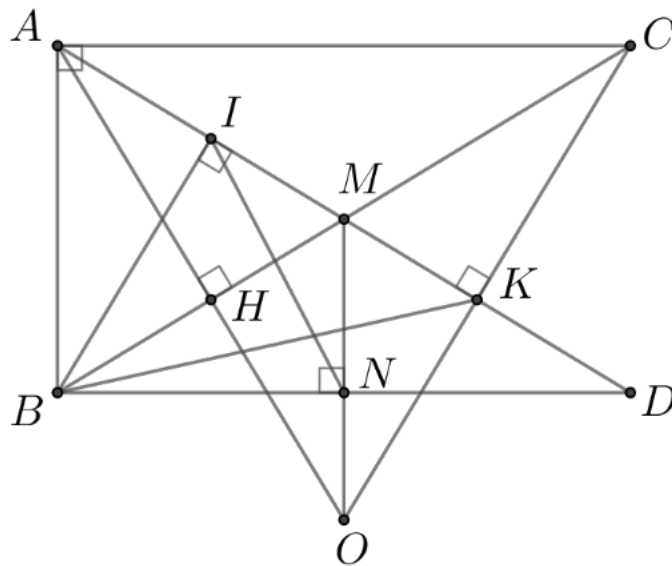
a) Chứng minh $BI = CK$.

b) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), $MN \perp BD$ ($N \in BD$). Chứng minh các đường thẳng CK , AH , MN đồng quy.

c) Chứng minh N là trung điểm của BD .

d) Chứng minh $BC - AB > AC - AH$.

Lời giải



a) Chứng minh $BI = CK$.

Xét ΔIBM và ΔKCM có:

$$\angle BIM = \angle KCM (=90^\circ)$$

$$BM = MC \text{ (Vì } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle BMI = \angle CMK \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$\Rightarrow \Delta IBM = \Delta KCM \text{ (cạnh huyền – góc nhọn)}$$

$$\Rightarrow BI = CK$$

b) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$), $MN \perp BD$ ($N \in BD$). Chứng minh các đường thẳng CK , AH , MN đồng quy.

Xét ΔAMC và ΔDMB có

$$BM = MC \text{ (Vì } M \text{ là trung điểm của } BC)$$

$$\angle BMA = \angle CMB \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$MD = MA \text{ (gt)}$$

$$\Rightarrow \triangle AMC = \triangle DMB \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow \angle MAC = \angle MDB \text{ (hai góc tương ứng)}$$

Mà hai góc này ở vị trí so le trong
Nên $AC \parallel BD$

Gọi giao điểm của AH và CK là O .

Xét $\triangle ACO$ có: AK và CH là các đường cao, mà chúng cắt nhau ở M
 $\Rightarrow M$ là trực tâm của $\triangle ACO$
 $\Rightarrow OM \perp AC$ (1).

Mặt khác có $MN \perp BD$ (gt), mà $BD \parallel AC$ (cmt) $\Rightarrow MN \perp AC$ (2).

Từ (1) và (2) $\Rightarrow O, M, N$ thẳng hàng.

Suy ra ba đường CK, AH, MN đồng quy tại O

c) Chứng minh: N là trung điểm của BD .

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle BAC$ có

AB là cạnh chung

$$\angle ABC = \angle BAC (=90^\circ)$$

$$BD = AC \text{ (vì } \triangle AMC = \triangle DMB)$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle BAC \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow BC = AD \text{ (hai cạnh tương ứng)}$$

Mà M là trung điểm của BC .

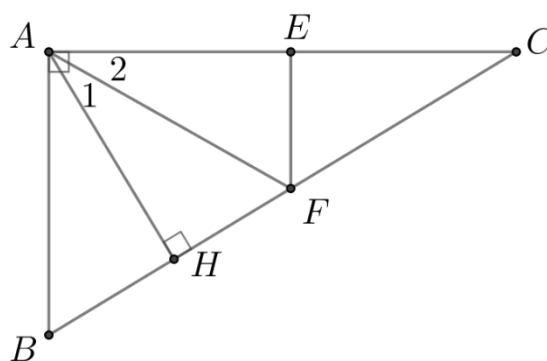
$$\Rightarrow BM = MD$$

$\Rightarrow \triangle BMD$ cân tại M .

$\Rightarrow$ Đường cao MN đồng thời là đường trung tuyến của $\triangle BMD$.

$\Rightarrow N$ là trung điểm của BD .

d) Chứng minh $BC - AB > AC - AH$.



Trên BC lấy điểm F sao cho $BF = AB$.

$$\text{Thì } CF = BC - BF = BC - AB.$$

Trên AC lấy điểm E sao cho $AE = AH$

$$\text{Thì } CE = AC - AE = AC - AH.$$

Ta có $\angle BAF + \angle A_2 = 90^\circ$ (tam giác ABC vuông tại A)

$$\angle AFB + \angle A_1 = 90^\circ \text{ (tam giác } AHF \text{ vuông tại } H)$$

Mà $\angle BAF = \angle BFA$ (tam giác ABF cân tại B). Nên $\angle A_1 = \angle A_2$

Dễ thấy $\triangle AHF = \triangle AEF$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle AHF = \angle AEF = 90^\circ$$

Suy ra tam giác EFC vuông tại E nên $FC > EC$.

$$\Rightarrow BC - AB > AC - AH \text{ (đpcm).}$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 - 2023)

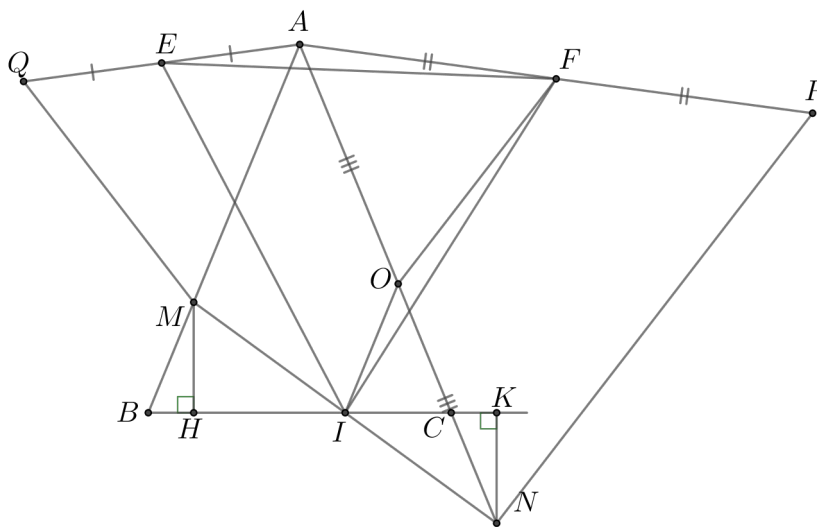
Cho tam giác ABC cân tại A . Lấy điểm M bất kỳ thuộc cạnh AB (M không trùng với A, B). lấy điểm N thuộc tia đối của tia CA sao cho $CN = BM$. Gọi I là giao điểm của BC và MN . Kẻ MH và NK cùng vuông góc với BC (H, K thuộc đường thẳng BC).

a) Chứng minh $MH = NK$.

b) Chứng minh $MN > BC$.

c) Vẽ về phía ngoài tam giác ABC các tam giác đều ANP, AMQ . Gọi E, F lần lượt là trung điểm AQ, AP . Chứng minh tam giác IEF đều.

Lời giải



a) Ta có $\angle ABC = \angle ACB$ (vì $\triangle ABC$ cân tại A). Hay $\angle MBH = \angle KCN$

$$\angle MBH = \angle KCN \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Nên $\angle MBH = \angle KCN$ (cùng bằng $\angle ACB$)

Xét tam giác MHB và tam giác NKC có :

$$BM = CN \text{ (gt)}$$

$$\angle MHB = \angle NKC = 90^\circ$$

$$\angle MBH = \angle KCN \text{ (cmt)}$$

Suy ra $\triangle MHB = \triangle NKC$ (Cạnh huyền – góc nhọn) (1)

Suy ra $MH = NK$ (hai cạnh tương ứng)

b) Ta có $MI > HI, IN > IK$ (trong tam giác vuông cạnh huyền lớn nhất)

$$\text{Suy ra: } IM + IN > HI + IK = BI - BH + IC + CK = BC - (BH - CK)$$

Từ (1) suy ra $IM + IN > BC$ hay $MN > BC$

c) Gọi O là trung điểm AN

Chúng minh được $\triangle AEF = \triangle OIF$ (c - g - c) $\Rightarrow EF = IF$ (hai cạnh tương ứng)

$\Rightarrow \triangle IEF$ cân tại F (*)

Vì $\triangle AEF = \triangle OIF$ nên $\angle AFE = \angle OFI \Rightarrow \angle EFG = \angle OFA \Rightarrow \angle EFG = 60^\circ$ (do $\angle OFA = 60^\circ$) (**)

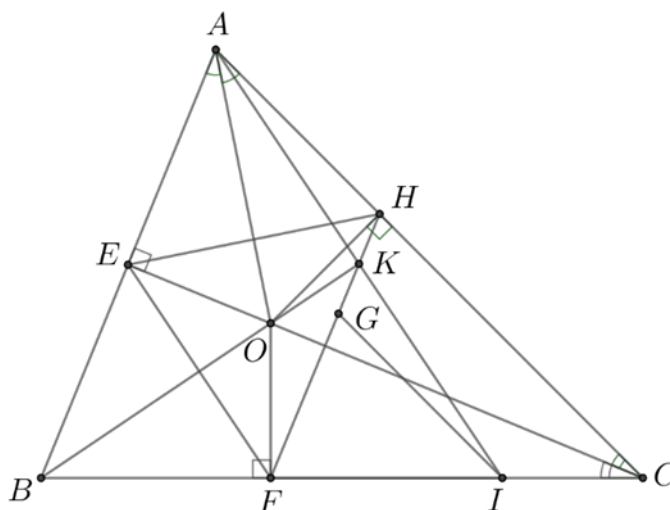
Từ (*) và (**) suy ra tam giác IEF đều.

Câu 5. (HSG 7 Quan Sơn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của góc A và góc C cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI .

1. Chứng minh $\triangle FCH$ cân.
2. Chứng minh $AK = KI$.
3. Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



1. Xét $\triangle CHO$ và $\triangle CFO$ có:

OC là cạnh chung

$\angle OCH = \angle OCF$ (vì CO là tia phân giác của $\angle ACB$)

Do đó $\triangle CHO = \triangle CFO$ (cạnh huyền – góc nhọn)

Suy ra: $CH = CF$.

Vậy $\triangle FCH$ cân tại C .

2. Vẽ $IG \parallel AC$ ($G \in FH$)

Suy ra $\angle FIG = \angle FCH$ và $\angle FGI = \angle FHC$ (hai góc so le trong)

Mà $\angle FCH = \angle FHC$ (vì $\triangle FCH$ cân tại C)

Nên $\angle FIG = \angle FGI$

Do đó $\triangle FIG$ cân tại I .

$\Rightarrow IG = IF$

Mà $FI = AH$ nên $AH = IG$

Ta có $\angle HGI + \angle FGI = 180^\circ$; $\angle AHK + \angle FHC = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

Mà $\angle FGI = \angle FHC$ (cmt)

Nên $\angle HGI = \angle AHK$

$\triangle AHK$ có $\angle HAK + \angle AKH + \angle AHK = 180^\circ$

$\triangle IKG$ có $\angle KIG + \angle KGI + \angle HGI = 180^\circ$

Mà $\widehat{IGK} = \widehat{AHK}$ (cmt); $\widehat{AKH} = \widehat{IKG}$ (hai góc đối đỉnh)

Nên $\widehat{HAK} = \widehat{KIG}$

Xét $\triangle AHK$ và $\triangle IKG$ có:

$$AH = IG \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{HAK} = \widehat{KIG} \text{ (cmt)}$$

$$\widehat{AHK} = \widehat{IGK} \text{ (cmt)}$$

Do đó $\triangle AHK = \triangle IKG$ (g - c - g).

Suy ra $AK = KI$ (hai cạnh tương ứng)

3. - Vẽ $OE \perp AB$ tại E .

Tương tự câu a ta có: $\triangle AEH$, $\triangle BEF$ thứ tự cân tại A , B . Suy ra: $BE = BF$ và $AE = AH$.

$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI$. Suy ra: $\triangle ABI$ cân tại B .

Mà BO là phân giác góc B , và BK là đường trung tuyến của $\triangle ABI$ nên: B , O , K là ba điểm thẳng hàng.

Câu 6. (HSG 7 Thái Thụy 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC vuông tại A và $AB = AC$. Tia phân giác của góc B cắt AC tại D , Trên cạnh AB lấy E sao cho $AE = AD$. Từ A kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại K và cắt BC ở H . Từ E kẻ đường thẳng vuông góc với BD tại I và cắt BC tại G . Đường thẳng EG cắt AC tại Q .

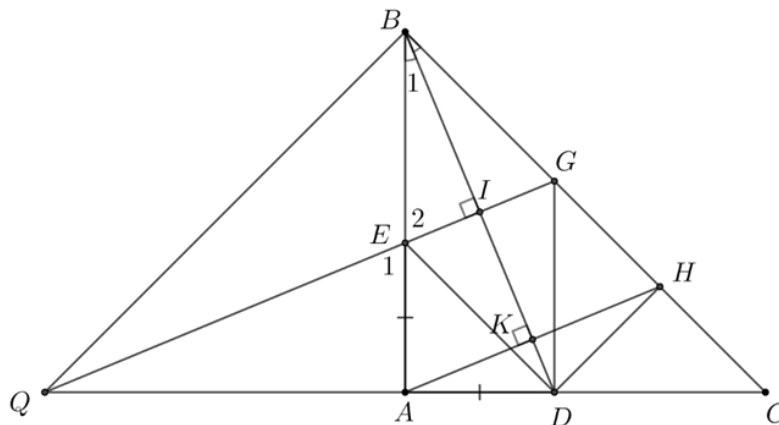
1. Chứng minh: $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$ và $\triangle ABD = \triangle AQE$.

2. Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

3. Chứng minh: DH vuông góc với BC .

4. Chứng minh: $GB = GD$.

Lời giải



1. Chứng minh $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$ và $\triangle ABD = \triangle AQE$.

Vì $\triangle ABD$, $\triangle IBE$ là các tam giác vuông tại A và I nên $\widehat{ADB} + \widehat{B}_1 = 90^\circ$; $\widehat{E}_2 + \widehat{B}_1 = 90^\circ \Rightarrow \widehat{E}_2 = \widehat{ADB}$

Mà $\widehat{E}_1 = \widehat{E}_2$ (Hai góc đối đỉnh)

$$\Rightarrow \widehat{E}_1 = \widehat{ADB}$$

Hay $\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$.

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle AQE$ có:

$$AD = AE \text{ (gt)}$$

$$\widehat{AEQ} = \widehat{ADB}$$

$$\widehat{DAB} = \widehat{QAE} = 90^\circ$$

$$\Rightarrow \triangle ABD = \triangle AQE \text{ (g - c - g)}$$

2. Chứng minh: A là trung điểm của QC và $\triangle QBC$ vuông cân.

Từ $\triangle ABD = \triangle AQE$ (câu 1) $\Rightarrow AB = AQ$ (hai cạnh tương ứng)

Mà $AB = AC \Rightarrow AC = AQ \Rightarrow A$ là trung điểm của QC .

Xét $\triangle ABC$ và $\triangle ABQ$ có:

$$AC = AQ \text{ (câu 1)}$$

AB là cạnh chung

$$\widehat{BAQ} = \widehat{BAC} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle ABC = \triangle ABQ$ (c - g - c)

Suy ra $BC = BQ$ (hai cạnh tương ứng) $\Rightarrow \triangle QBC$ cân tại B (1)

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABQ} \text{ (hai góc tương ứng)}$$

$$\triangle ABC \text{ vuông cân tại } A \Rightarrow \widehat{ABC} = 45^\circ$$

$$\Rightarrow \widehat{EBQ} = \widehat{EBA} + \widehat{ABQ} = \widehat{EBA} + \widehat{EBA} = 45^\circ + 45^\circ = 90^\circ \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) suy ra $\triangle QBC$ vuông cân tại B .

3. Chứng minh: DH vuông góc với BC .

Xét $\triangle ABK$ và $\triangle HBK$ có:

BK là cạnh chung

$$\widehat{BKA} = \widehat{BKH} = 90^\circ$$

$$\widehat{ABK} = \widehat{HBK} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

Do đó $\triangle ABK = \triangle HBK$ (g - c - g)

$$\Rightarrow BA = BH \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle HBD$ có:

$$BA = BH \text{ (cmt)}$$

BD là cạnh chung

$$\widehat{ABD} = \widehat{HBD} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

Do đó $\triangle ABD = \triangle HBD$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \widehat{BAD} = \widehat{BHD} = 90^\circ \text{ (2 góc tương ứng)}$$

Suy ra DH vuông góc với BC .

4. Chứng minh: $GB = GD$.

Xét $\triangle EBI$ và $\triangle GBI$ có:

BI là cạnh chung

$$\widehat{EBI} = \widehat{GBI} \text{ (vì } BD \text{ là tia phân giác của } \widehat{ABC} \text{)}$$

$$\widehat{BIE} = \widehat{BIG} = 90^\circ$$

Do đó $\triangle EBI = \triangle GBI$ (g - c - g) $\Rightarrow EI = IG$ (2 cạnh tương ứng)

$\triangle AED$ có $\widehat{AED} = 90^\circ$ và $AE = AD$ nên $\triangle AED$ vuông cân tại A

Suy ra $\angle AED = \angle ABC = 45^\circ$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị

Nên $ED \parallel BC \Rightarrow \angle BGI = \angle FED$ (2 góc so le trong)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GBI$ có:

$$EI = IG \text{ (cmt)}$$

$$\angle FED = \angle BGI \text{ (cmt)}$$

$$\angle EID = \angle BIG \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

Do đó $\triangle EDI = \triangle GBI$ (g - c - g)

Suy ra $ED = GB$ (2 cạnh tương ứng) (3)

Xét $\triangle EDI$ và $\triangle GDI$ có:

DI là cạnh chung

$$EI = IG \text{ (cmt)}$$

$$\angle EID = \angle GID = 90^\circ$$

Do đó $\triangle EDI = \triangle GDI$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DE$ (4)

Từ (3); (4) suy ra $GB = GD$.

Câu 7. (HSG 7 Nông Cống 2022 - 2023)

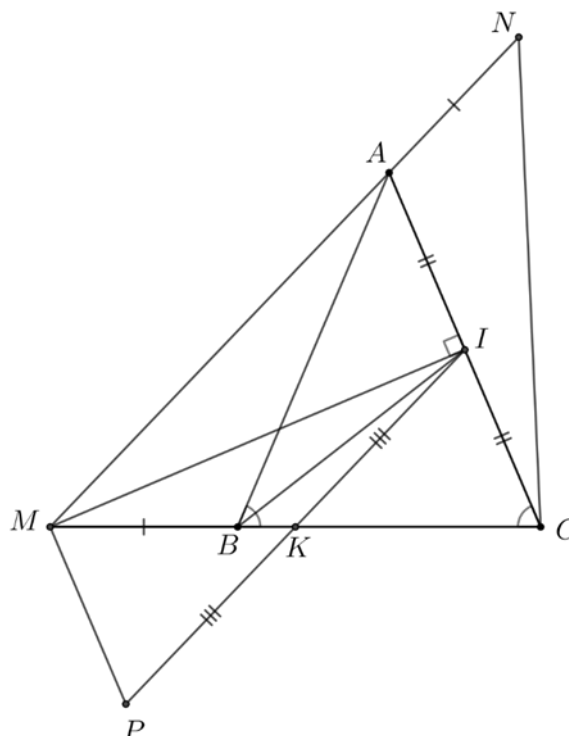
Cho tam giác ABC cân tại A có $BC < AB$. Đường trung trực của cạnh AC cắt cạnh AC tại I và cắt đường thẳng BC tại M . Trên tia đối của tia AM lấy điểm N sao cho $AN = BM$.

1) Chứng minh rằng: $\triangle ABM = \triangle CAN$.

2) Gọi K là trung điểm MC . Chứng minh rằng: $\frac{NC + AC}{2} > IK$.

3) Tam giác ABC cho trước phải có thêm điều kiện gì để CM vuông góc với CN ?

Lời giải



1) Do M nằm trên đường trung trực của AC nên $MA = MC$

$\Rightarrow \triangle MAC$ cân tại $M \Rightarrow \angle ACM = \angle MAC$.

Lại có $\triangle ABC$ cân tại A nên $\angle ABC = \angle ACB \Rightarrow \angle MAC = \angle ABC$.

Ta có: $\angle MAC + \angle CAM = 180^\circ$ (kề bù), $\angle MBA + \angle ABC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle ABM = \angle CAN$.

Vì $\triangle ABM$ và $\triangle CAN$ có: $AB = AC$; $\angle ABM = \angle CAN$; $MB = AN \Rightarrow \triangle ABM = \triangle CAN$ (c - g - c).

2) Trên tia đối của tia KI lấy điểm P sao cho $KI = KP$.

Xét $\triangle IKC$ và $\triangle PKM$ có:

$KM = KC$ (gt)

$\angle IKC = \angle PKM$ (đối đỉnh)

$KP = KI$ (cách vẽ)

$\Rightarrow \triangle IKC = \triangle PKM$ (c - g - c) $\Rightarrow IC = PM$, $\angle PKM = \angle KCI \Rightarrow PM \parallel AC$.

Xét $\triangle AMI$ và $\triangle PIM$ có:

$AI = PM$ (cmt)

$\angle AIM = \angle PMI$ (so le trong)

MI chung

$\Rightarrow \triangle AMI = \triangle PIM$ (c - g - c) $\Rightarrow PI = AM \Rightarrow IK = \frac{1}{2} AM \Rightarrow AM = 2IK$.

Xét $\triangle AMC$, theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$AC + MC > MA \quad AC + MC > 2IK \quad \frac{AC + MC}{2} > IK$$

Do $\triangle ABM = \triangle CAN$ (câu 1) nên $AM = CN$. Mà $AM = MC$ nên $CN = MC$.

$$\text{Hay } \frac{NC + AC}{2} > IK \quad . \text{ (Đpcm).}$$

3) Ta có: $\triangle CMN$ cân tại C . Để $CM \perp CN$ thì $\angle MCN = 90^\circ$ thì $\triangle CMN$ vuông cân tại C .

Từ đó suy ra $\angle AMC = 45^\circ$. Hai tam giác NAC và ABC là tam giác cân có chung góc C ở đáy nên góc ở đỉnh bằng nhau. Suy ra $\angle BAC = \angle AMC = 45^\circ$.

Vậy để CM vuông góc với CN thì tam giác ABC phải có thêm điều kiện $\angle BAC = 45^\circ$.

Câu 8. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

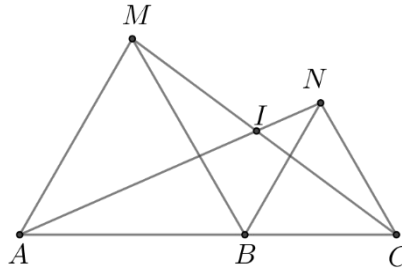
Cho 3 điểm A, B, C thẳng hàng (B nằm giữa A và C). M và N nằm cùng phía với nhau so với đường thẳng AB sao cho MAB và NBC là các tam giác đều; AN và MC cắt nhau ở I .

a) Chứng minh rằng AM song song với BN .

b) Chứng minh rằng $AN = MC$.

c) Tính số đo góc AIC .

Lời giải



a) Ta có: $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều nên $\angle MAB = \angle NBC (=60^\circ)$

Mà hai góc trên là cặp góc đồng vị nên $AM \parallel BN$

b) $\triangle MAB$ và $\triangle NBC$ là các tam giác đều và A, B, C thẳng hàng nên:

$$\angle MBA = \angle NBC = \angle MBN = 60^\circ \Rightarrow \angle ABN = \angle MBC \text{ (cùng bằng } 120^\circ \text{)}$$

$\triangle ABN$ và $\triangle MBC$ có:

$$\angle ABN = \angle MBC \text{ (cmt)}$$

$$AB = MB$$

$$BN = BC \text{ (}\triangle NBC \text{ đều)}$$

$$\Rightarrow \triangle ABN = \triangle MBC \text{ (c - g - c)}$$

$$\Rightarrow AN = MC$$

c) $\triangle ABN = \triangle MBC$ (câu b)

$$\Rightarrow \angle NAB = \angle CMB \text{ mà } \angle CMB + \angle MCB = 60^\circ$$

$$\text{Nên } \angle NAB + \angle MCB = 60^\circ. \text{ Hay } \angle FAC + \angle FCA = 60^\circ$$

$$\triangle AIC \text{ có } \angle FAC + \angle FCA + \angle AIC = 180^\circ$$

$$\text{Suy ra } \angle AIC = 180^\circ - (\angle FAC + \angle FCA) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

Câu 9. (HSG 7 Thường Xuân 2022 - 2023)

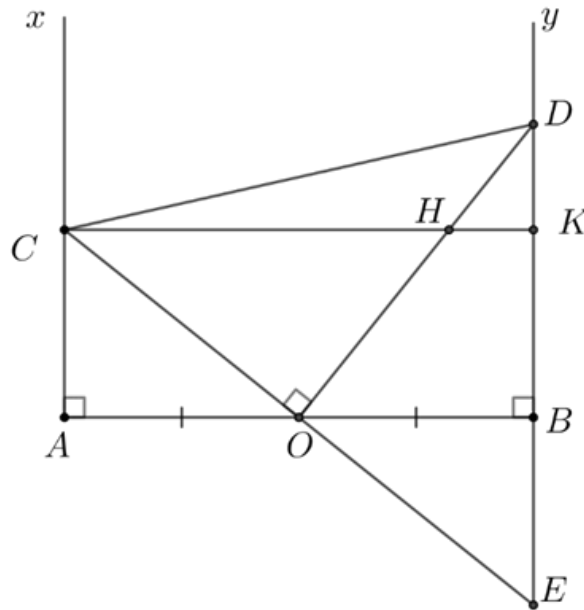
Cho đoạn thẳng AB . Trên cùng một nửa mặt phẳng có bờ là đường thẳng AB vẽ hai tia $Ax; By$ lần lượt vuông góc với AB tại $A; B$. Gọi O là trung điểm của đoạn thẳng AB . Trên tia Ax lấy điểm

C và trên tia By lấy điểm D sao cho $\angle COD = 90^\circ$

a) Gọi E là giao điểm của CO và BD . Chứng minh: $\angle DOC = \angle DOE$ từ đó suy ra $AC + BD = CD$.

b) Qua C kẻ đường thẳng song song với AB cắt OD tại H . Chứng minh: $EH \perp CD$.

Lời giải



a) Xét $\triangle AOC$ và $\triangle BOE$ có:

$$\angle AOC = \angle BOE \text{ (đối đỉnh)}$$

$$AO = BO \text{ (gt)}$$

$$\angle A = \angle B = 90^\circ \text{ (gt)}$$

Suy ra: $\triangle AOC = \triangle BOE$ (g - c - g) $\Rightarrow OC = OE$ và $AC = BE$

Xét ΔDOC và ΔDOE có:

Cạnh OD chung

$$\angle BOC = \angle BOE = 90^\circ$$

$$CO = EO \text{ (cmt)}$$

Suy ra: $\angle DOC = \angle DOE$ (c - g - c) $\Rightarrow CD = DE$ (hai cạnh tương ứng)

Ta có: $AC + BD = BE + BD = ED$

$$\Rightarrow AC + BD = CD \text{ (đpcm)}$$

b) Gọi K là giao điểm của CH với BD

Vì $CK \parallel AB$ mà $AB \perp BD$ nên $CK \perp BD$

Xét $\triangle CDE$ có hai đường cao CK, DO cắt nhau tại H nên H là trực tâm $\Rightarrow EH \perp CD$ (đpcm)

Câu 10. (HSG 7 thị trấn Càng Nàng 2022 - 2023)

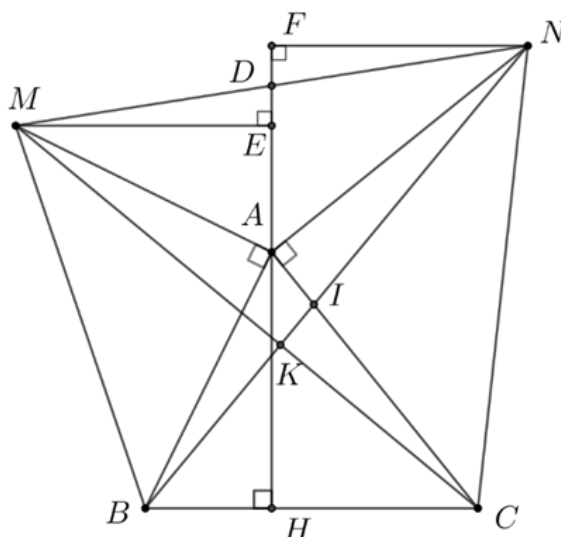
Cho $\triangle ABC$ có $\angle A < 90^\circ$. Vẽ ra ngoài $\triangle ABC$ các tam giác vuông cân tại A là $\triangle ABM$ và $\triangle ACN$.

a) Chứng minh rằng: $MC = BN$.

b) Chứng minh rằng: $BN \perp CM$.

c) Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Chứng minh AH đi qua trung điểm của MN .

Lời giải



a) Xét $\triangle AMC$ và $\triangle ABN$, có:

$$AM = AB \text{ (} \triangle AMB \text{ vuông cân)}$$

$$\angle MAC = \angle BAN \text{ (} = 90^\circ + \angle BAC \text{)}$$

$$AC = AN \text{ (} \triangle ACN \text{ vuông cân)}$$

Suy ra $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

$$\Rightarrow MC = BN \text{ (2 cạnh tương ứng)}$$

b) Gọi I là giao điểm của BN với AC , K là giao điểm của BN với MC .

Vì $\triangle AMC = \triangle ABN$ (c - g - c)

$$\Rightarrow \angle ANI = \angle KCI$$

Mà $\angle AIN = \angle KIC$ (đối đỉnh)

$$\Rightarrow \angle KCI + \angle KIC = \angle ANI + \angle AIN = 90^\circ$$

Do đó: $MC \perp BN$

c) Kẻ $ME \perp AH$ tại E , $NF \perp AH$ tại F . Gọi D là giao điểm của MN và AH .

Ta có: $\angle BAH + \angle MAE = 90^\circ$ (vì $\angle MAB = 90^\circ$) (1)

Lại có $\angle MAE + \angle AME = 90^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \angle AME = \angle BAH$

Xét $\triangle MAE$ vuông tại E và $\triangle ABH$ vuông tại H có:

$$\angle AME = \angle BAH \text{ (chứng minh trên)}$$

$$MA = AB \text{ (} \triangle AMB \text{ vuông cân)}$$

Suy ra $\triangle MAE = \triangle ABH$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow ME = AH$$

Chứng minh tương tự ta có $\triangle AFN = \triangle CHA$ (cạnh huyền - góc nhọn)

$$\Rightarrow FN = AH$$

Ta có $ME \parallel NF$ (cùng vuông góc với AH) $\Rightarrow \angle EMD = \angle FND$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle MED$ vuông tại E và $\triangle NFD$ vuông tại F , có:

$$ME = NF (=AH)$$

$$\angle EMD = \angle FND$$

$$\Rightarrow \triangle MED = \triangle NFD \text{ (g.c.g)}$$

$$\Rightarrow MD = ND \text{ (hai cạnh tương ứng)} \Rightarrow D \text{ là trung điểm của } MN$$

Vậy AH đi qua trung điểm của MN .

Câu 11. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

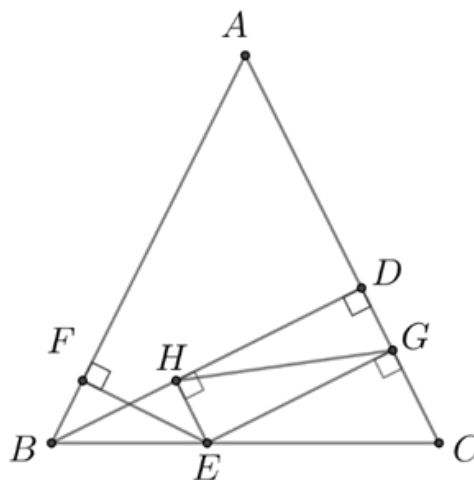
Cho tam giác ABC cân tại A . Kẻ BD vuông góc với đường thẳng AC tại D . Lấy điểm E bất kỳ trên cạnh BC (E khác B , khác C). Kẻ EF, EG, EH lần lượt vuông góc với AB, AC, BD .

1) Chứng minh: $\triangle HBE = \triangle FEB$.

2) Chứng minh rằng $EF + EG = BD$.

3) Nêu cách xác định vị trí điểm E trên BC để tam giác EGH vuông cân.

Lời giải



1) Chứng minh: $\triangle HBE = \triangle FEB$.

Ta có $HE \parallel AC$ (cùng vuông góc với BD) $\Rightarrow \angle BEH = \angle BCA$ (đồng vị)

$$\angle BEH = \angle ABC = \angle FBE \text{ (}\triangle ABC \text{ cân tại } A\text{)}$$

Xét $\triangle HBE$ và $\triangle FEB$.

$$\text{Có } \angle H = \angle F = 90^\circ$$

$$\angle BEH = \angle FBE \text{ (cmt)}$$

Cạnh BE chung

$$\Rightarrow \triangle HBE = \triangle FEB \text{ (Cạnh huyền – góc nhọn)}$$

2) Chứng minh rằng $EF + EG = BD$.

$$\text{Có } EF = BH \text{ (1) (}\triangle HBE = \triangle FEB\text{)}$$

Ta có $BD \perp AC, EG \perp AC \Rightarrow BD \parallel EG \Rightarrow \angle HDE = \angle GEG$ (hai góc so le trong)

Xét $\triangle GED$ vuông tại G và $\triangle HDE$ vuông tại H có:

ED là cạnh chung

$$\widehat{DEG} = \widehat{HDE} \text{ (cmt)}$$

$\Rightarrow \triangle GED = \triangle HDE$ (cạnh huyền – góc nhọn)

$\Rightarrow EG = HD$ (2). Mà $BD = BH + HD$ (3) thay (1); (2) vào (3)

$\Rightarrow BD = EF + EG$ (đpcm)

3) Nêu cách xác định vị trí điểm E trên BC để tam giác EGH vuông cân.

Ta có $\triangle GED = \triangle HDE$ (câu 2)

$$\Rightarrow \widehat{GED} = \widehat{HDE}; \widehat{GDE} = \widehat{HED}$$

$$\Rightarrow \widehat{GED} + \widehat{HED} = \widehat{HDE} + \widehat{GDE}$$

$$\widehat{GEH} = \widehat{HDG} = 90^\circ \Rightarrow \triangle GEH \text{ vuông tại } E.$$

Giả sử $\triangle GEH$ vuông cân thì $EG = EH$ mà $EH = DG$ (cmt) $\Rightarrow EG = DG$

$\Rightarrow \triangle GED$ vuông cân tại G

$\Rightarrow \widehat{EDG} = 45^\circ \Rightarrow DE$ là phân giác của góc BDC

Vậy E là giao điểm của tia phân giác góc BDC với cạnh BC thì tam giác EGH vuông cân. (đpcm)

Câu 12. (HSG 7 trường THCS Lê Quý Đôn 2022 - 2023)

Cho tam giác ABC cân tại A (góc A tù). Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Trên tia đối của tia CA lấy điểm I sao cho $CI = CA$.

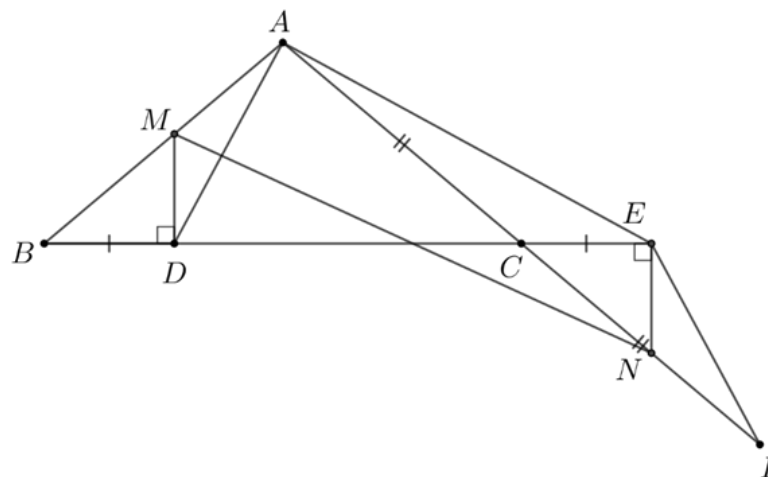
1) Chứng minh: $\triangle ABD = \triangle ICE$.

2) Chứng minh: $AB + AC < AD + AE$.

3) Từ D và E kẻ các đường thẳng cùng vuông góc với BC cắt AB, AI theo thứ tự tại M, N . Chứng minh MN đi qua trung điểm DE .

4) Chứng minh chu vi của tam giác ABC nhỏ hơn chu vi của tam giác AMN .

Lời giải



1) $\triangle ABC$ cân tại A suy ra $AB = AC, \widehat{ABC} = \widehat{ACB}$

Mà $AC = IC$ (gt) $\Rightarrow AB = IC$

$$\widehat{ACB} = \widehat{ICE} \text{ (đối đỉnh)} \Rightarrow \triangle ABD = \triangle ICE$$

Xét $\triangle ABD$ và $\triangle ICE$ có:

$$AB = IC \text{ (cmt)}$$

$$\angle ABD = \angle ICE \text{ (cmt)}$$

$$BD = CE \text{ (gt)}$$

Suy ra $\triangle ABD = \triangle ICE$ (c - g - c)

$$2) \text{ Ta có: } AB = CI \Rightarrow AB + AC = CI + AC = AI \text{ (1)}$$

$$\text{Theo chứng minh trên } \triangle ABD = \triangle ICE \text{ (c - g - c)} \Rightarrow AD = IE \Rightarrow AD + AE = IE + AE \text{ (2)}$$

$$\text{Áp dụng BĐT trong tam giác } AEI \text{ ta có: } IE + AE > AI \text{ (3)}$$

$$\text{Từ (1), (2), (3)} \Rightarrow AD + AE > AB + AC$$

3) Gọi O là giao điểm của MN với DE

Xét $\triangle BDM$ và $\triangle CEN$ có:

$$BD = CE$$

$$\angle MBD = \angle ECN \text{ (vì } \triangle ABD = \triangle ICE \text{)}$$

$$\angle MDB = \angle CEN = 90^\circ$$

$$\text{Do đó } \triangle BDM = \triangle CEN \text{ (g - c - g)} \Rightarrow DM = EN$$

$$\text{Chứng minh tương tự: } \triangle ODM = \triangle OEN \text{ (g - c - g)} \Rightarrow OD = OE$$

Hay MN đi qua trung điểm của DE .

$$4) \text{ Vì } BM = CN \Rightarrow AB + AC = AM + AN \text{ (4)}$$

$$\text{Có } BD = CE \text{ (gt)} \Rightarrow BC = DE$$

$$\left. \begin{array}{l} MO > OD \\ NO > OE \end{array} \right\} \Rightarrow MO + NO > OD + OE \Rightarrow MN > DE \Rightarrow MN > BC \text{ (5)}$$

$$C_{\triangle ABC} = AB + AC + BC$$

$$C_{\triangle AMN} = AM + AN + MN \text{ (6)}$$

Từ (4), (5), (6) $\Rightarrow$ Chu vi $\triangle ABC$ nhỏ hơn chu vi $\triangle AMN$.

Câu 13. (HSG 7 huyện Tiên Du 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Tia phân giác của góc A cắt BC tại điểm I . Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $AD = AB$.

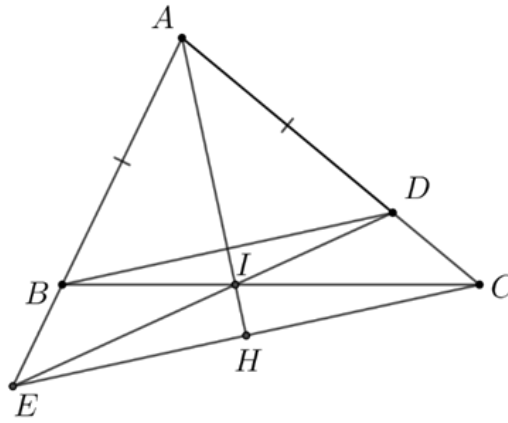
a) Chứng minh rằng $BI = ID$.

b) Tia DI cắt tia AB tại E . Chứng minh rằng $\triangle IBE = \triangle IDC$. Từ đó suy ra $BD \parallel CE$.

c) Gọi H là trung điểm của EC . Chứng minh $AH \perp BD$.

d) Cho $\angle ABC = 2\angle C$. Chứng minh $AB + BI = AC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle ABI$ và $\triangle ADI$ có:

$$AB = AD \text{ (gt)}$$

AI là cạnh chung

$$\angle BAI = \angle DAI \text{ (vì } AI \text{ là tia phân giác của } \angle BAC)$$

Do đó $\triangle ABI = \triangle ADI$ (c - g - c)

Suy ra $BI = ID$ (hai cạnh tương ứng)

b) Ta có: $\triangle ABI = \triangle ADI$ nên $\angle ABI = \angle ADI$

Mà $\angle ABI + \angle CBE = 180^\circ$ (hai góc kề bù)

$$\angle ADI + \angle EDE = 180^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

Do đó: $\angle CBE = \angle EDC$ hay $\angle BEC = \angle DCE$

* Xét $\triangle BIE$ và $\triangle DIC$ có:

$$\angle BIE = \angle DIC \text{ (hai góc đối đỉnh)}$$

$$BI = ID \text{ (chứng minh trên)}$$

$$\angle BEC = \angle DCE \text{ (chứng minh trên)}$$

Do đó $\triangle BIE = \triangle DIC$ (g - c - g)

Suy ra $IE = IC$

* Vì $BI = ID \Rightarrow \triangle BID$ cân tại I suy ra
$$\angle IBD = \frac{180^\circ - \angle BID}{2}$$

Vì $IE = IC \Rightarrow \triangle IEC$ cân tại I suy ra
$$\angle ICE = \frac{180^\circ - \angle EIC}{2}$$

Mà $\angle BID = \angle EIC$ (đối đỉnh)

Do đó $\angle IBD = \angle ICE$ mà hai góc này ở vị trí so le trong nên $BD \parallel CE$

c) Ta có $\triangle ABE = \triangle IDC$ (cmt). Suy ra $BE = DC$.

Mà $AB = AD \Rightarrow AB = AD$

$$\Rightarrow AB + BE = AD + DC \Rightarrow AE = AC$$

Xét $\triangle AEH$ và $\triangle ACH$ có:

$$AE = AC \quad (\text{cmt})$$

$$EH = CH \quad (\text{gt})$$

AH là cạnh chung

Do đó $\triangle AEH = \triangle ACH$ (c - c - c)

Suy ra $\angle AHE = \angle AHC$ (hai góc tương ứng)

Mà $\angle AHE + \angle AHC = 180^\circ$ (kề bù) $\Rightarrow \angle AHE = 90^\circ \Rightarrow AH \perp CE$.

Lại có $EC \parallel BD$ suy ra $AH \perp BD$.

Ta có: $\angle ABC = 2\angle ACB$ hay $\angle ABI = 2\angle DCI$ mà $\angle ABI = \angle ADI \Rightarrow \angle ADI = 2\angle DCI$ (1)

Lại có: $\angle ADI$ là góc ngoài tại D của $\triangle DIC$ cân tại $D \Rightarrow \angle ADI = \angle DCI + \angle DIC$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle DCI = \angle DIC \Rightarrow \triangle DIA$ cân tại $D \Rightarrow DI = DC$.

Mà $DI = CI; AB = AD$ nên $AB + BI = AD + CD = AC$ (đpcm).

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>