

CD 6: CÁC BÀI TOÁN VỀ SỐ CHÍNH PHƯƠNG

Dạng 1: Chứng minh một số (một tổng) là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

Cho a, b, c, d là các số nguyên thỏa mãn $a^2 = b^2 + c^2 + d^2$. Chứng minh rằng: $abcd + 2023$ viết được dưới dạng hiệu của hai số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 thị xã Nghi Sơn 2022 - 2023)

Cho n là số tự nhiên có hai chữ số, Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Câu 3. (HSG 7 Thành phố Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho 5 số dương đôi một khác nhau sao cho mỗi số không có ước nguyên tố nào khác 2 và 3 . Chứng minh rằng trong 5 số đó tồn tại hai số mà tích của chúng là một số chính phương

Câu 4. (HSG 7 huyện Điện Bàn 2022 - 2023)

Cho số tự nhiên a gồm 60 chữ số 1 , số tự nhiên b gồm 30 chữ số 2 . Chứng minh rằng hiệu $a - b$ là một số chính phương.

Câu 5. (HSG 7 huyện HƯNG HÀ, trường VĂN LANG 2022 - 2023)

Biết $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$. Chứng minh rằng $110x$ là số chính phương.

Câu 6. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Thái Bình 2021 - 2022S)

Cho các số thực dương m và n thỏa mãn: $m^{2020} + n^{2020} = m^{2021} + n^{2021} = m^{2022} + n^{2022}$ và $P = 7 + m^2 + n^2$. Chứng minh rằng P là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Quan Hoa, tỉnh Thanh Hoá 2021 - 2022)

Cho các số nguyên dương n thỏa mãn $n+1$ và $2n+1$ đều là số chính phương. Chứng minh rằng $n:24$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành năm 2021 - 2022)

Cho 5 số chính phương bất kì có chữ số hàng chục khác nhau còn chữ số hàng đơn vị đều là 6 . Chứng minh rằng tổng các chữ số hàng chục của 5 số chính phương đó là một số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Tam Dương năm 2021 - 2022)

Cho đa thức $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ trong đó $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ và thỏa mãn $b = 3a + c$. Chứng minh rằng tích $f(1).f(-2)$ là bình phương của một số nguyên.

Câu 10. (HSG 7 huyện Vũ Thư năm 2021 - 2022)

Cho đa thức: $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ (a, b, c, d là các số nguyên). Biết $7a + b + c = 0$. Chứng minh rằng $f(3).f(-2)$ là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 huyện Vũ Thư, tỉnh Thái Bình, 2022- 2023)

Cho đa thức: $f(x) = ax^2 + bx + c$. Biết a, b, c là các số nguyên và $2a + b = 0$. Chứng minh rằng: $f(5).f(-3)$ là số chính phương.

Câu 12. (HSG 7 huyện Hoài Nhơn, trường Đào Duy Từ; huyện Nam Trà My, trường Trà Ka; huyện Thăng Bình; huyện Bến Lức 2018 - 2019)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Câu 13. (HSG 7 huyện Tân An 2017 - 2018)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương.

Câu 14. (HSG 7 trường Phan Đình Phùng 2017 - 2018; huyện Lâm Thao 2016 - 2017)

Cho tích $a.b$ là số chính phương và $(a, b) = 1$. Chứng minh rằng a và b đều là số chính phương

Dạng 2: Chứng minh một số không là số chính phương

Câu 1. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

Với n là số tự nhiên, chứng minh rằng: $n^2 + 2022$ không phải là số chính phương.

Câu 2. (HSG 7 huyện Quảng Xương, Tiền Hải 2022 - 2023)

Cho $A = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$. Chứng tỏ rằng A không phải là số chính phương

Câu 3. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc-Thanh Hoá 2022 - 2023)

Cho $f(x)$ là đa thức hệ số nguyên và thỏa mãn $f(0) = 0$ và $f(1) = 2$. Chứng minh rằng $f(7)$ không thể là số chính phương.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hiệp Hoà 2022 - 2023)

Cho p là tích của 2023 số nguyên tố đầu tiên. Chứng minh rằng $p - 1$ và $p + 1$ không là số chính phương

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Trần Đức Thông 2022 - 2023)

Cho $A = \frac{2001}{2000^2 + 1} + \frac{2001}{2000^2 + 2} + \dots + \frac{2001}{2000^2 + 2000}$. Chứng minh rằng: $1 < A^2 < 4$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Triệu Sơn năm năm 2021 - 2022)

Chứng minh rằng nếu số tự nhiên $\overline{abc}$ là số nguyên tố thì $b^2 - 4ac$ không là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 huyện Mường La năm 2021 - 2022)

Cho $S = \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cba}$ với a, b, c là các chữ số bất kì. Chứng minh rằng S không phải là số chính phương.

Câu 8. (HSG 7 huyện Hoàng Hoá 2017-2018)

Chứng minh rằng không tồn tại số tự nhiên n để $n^2 + 2002$ là số chính phương.

Câu 9. (HSG 7 huyện Hưng Hà, trường Lưu Khánh Đàm 2022 - 2023)

Có tìm được hai chữ số a và b để $\overline{2011ab}$ là bình phương của một số tự nhiên không? Vì sao?

Dạng 3: Tìm số chính phương

Câu 1. (HSG 7 Thành Phố Phúc Yên-Trường THCS Đồng Xuân 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số biết rằng nếu cộng chữ số hàng nghìn với 3 và trừ chữ số hàng đơn vị đi 3 ra vẫn được một số chính phương

Câu 2. (HSG 7 Bắc Giang 2022 - 2023)

Tìm số nguyên dương n nhỏ nhất sao cho các số $n+1$; $6n+1$; $20n+1$ đều là các số chính phương.

Câu 3. (HSG 7 olympic Mỹ Đức – Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm các số tự nhiên a, b thỏa mãn: $25 - b^2 = 8(a - 2023)^2$

Câu 4. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số có hai chữ số $\overline{ab}$ biết rằng $2\overline{ab} + 1$ và $3\overline{ab} + 1$ đều là số chính phương.

Câu 5. (HSG 7 huyện Bá Thước, thị trấn Cảnh Nang 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $1! + 2! + 3! + \dots + x! = y^2$

Câu 6. (HSG 7 huyện Tiền Hải 2021 - 2022)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ là số chính phương.

Câu 7. (HSG 7 tỉnh Bắc Giang 2012 - 2013)

Cho n là số tự nhiên có 2 chữ số. Tìm n biết $n+4$ và $2n$ đều là các số chính phương.

Câu 8. (HSG 7 huyện Vĩnh Tường 2015 - 2016)

Tìm tất cả các số chính phương có 4 chữ số chia hết cho 153 .

Câu 9. (HSG 7 huyện Lâm Thao 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên m để $(m+1)(m^2+2m)$ là một số chính phương.

Câu 10. (HSG 7 huyện Trục Ninh, tỉnh, trường, 2022 - 2023)

Cho $A = 4^{27} + 4^{1000} + 4^x$. Tìm số tự nhiên x lớn nhất sao cho A là số chính phương.

Câu 11. (HSG 7 thị xã Bình Long, 2022 - 2023)

Tìm số chính phương có 4 chữ số, biết rằng 2 chữ số đầu giống nhau, 2 chữ số cuối giống nhau.

Dạng 4: Dạng khác

Câu 1. (HSG 7 huyện Lương Tài 2022 - 2023)

Biết $a+1$ và $2a+1$ đồng thời là các số chính phương. Chứng minh rằng $a : 12$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 - 2023)

Tìm số tự nhiên $\overline{ab}$ sao cho $\overline{ab}^2 = (a+b)^3$.

