

CĐ2: TÌM ẨN CHƯA BIẾT

Dạng 1: Tìm x thông thường
Dạng 2: Đưa về dạng tích bằng 0
Dạng 3: Sử dụng tính chất lũy thừa
Dạng 4: Tìm ẩn dạng phân thức
Dạng 5: Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối
Dạng 6: Sử dụng công thức tính tổng có quy luật
Dạng 7: Tổng các biểu thức không âm bằng 0
Dạng 8: Tìm ẩn dựa vào tính chất về dấu
Dạng 9: Sử dụng phương pháp chặn để tìm ẩn
Dạng 10: Tìm ẩn với điều kiện nguyên

Dạng 5. Tìm x dạng chứa dấu giá trị tuyệt đối.

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 huyện Thanh Thủy, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Số giá trị của x thỏa mãn $2021 \cdot |1 - x| + (x - 1)^2 = 2022 \cdot |x - 1|$ là

A. 3 **B.** 2 **C.** 1 **D.** 0

Lời giải

Chọn A

Vì $|1 - x| = |x - 1|$ nên từ đề bài $2021 \cdot |1 - x| + (x - 1)^2 = 2022 \cdot |x - 1|$

$$2021 \cdot |x - 1| + (x - 1)^2 = 2022 \cdot |x - 1|$$

$$(x - 1)^2 = 2022 \cdot |x - 1| - 2021 \cdot |x - 1|$$

$$(x - 1)^2 = |x - 1|$$

$\Rightarrow x - 1 = 0$ hoặc $x - 1 = 1$ hoặc $x - 1 = -1$

$\Rightarrow x = 1$ hoặc $x = 2$ hoặc $x = 0$

Vậy $x \in \{0; 1; 2\}$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thanh Ba, tỉnh Phú Thọ 2021 - 2022)

Giá trị nào của x dưới đây thỏa mãn $|2x + 3| = |9 - 2x|$

A. $x = -\frac{3}{2}$ **B.** $x = \frac{3}{2}$ **C.** $x = 0$ **D.** $x = 6$.

Lời giải

Chọn B

Ta có: $|2x + 3| = |9 - 2x|$

TH1: $2x + 3 = 9 - 2x$

$$4x = 6$$

$$x = \frac{3}{2}$$

TH2: $2x + 3 = -(9 - 2x)$

$$2x + 3 = -9 + 2x$$

Không có giá trị x thỏa mãn

$$x = \frac{3}{2}$$

Vậy

Câu 3. (HSG 7 Đề khảo sát lần 3, 2022 - 2023)

Giá trị của x thỏa mãn $|2x - 3| = \frac{1}{2}$ và $y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{5} - \frac{31}{5} + \frac{4111}{5}} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{10}{5}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{5} - \frac{31}{5} + \frac{4111}{5}} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{10}{5}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$

A. $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}$ B. $-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}$ C. $\frac{7}{4}; \frac{5}{4}$ D. $-\frac{7}{4}; -\frac{5}{4}$

Lời giải

Chọn C

Ta có:

$$y = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{5} - \frac{31}{5} + \frac{4111}{5}} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{10}{5}} = \frac{\frac{3}{5} - \frac{3}{31} + \frac{3}{4111}}{\frac{11}{5} - \frac{31}{5} + \frac{4111}{5}} + \frac{\frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{10}}{\frac{3}{5} - \frac{6}{5} + \frac{10}{5}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

$$|2x - 3| = \frac{1}{2} \Rightarrow 2x - 3 = \pm \frac{1}{2}$$

Nên

$$2x - 3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{7}{4}$$

+) TH1:

$$2x - 3 = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{5}{4}$$

+) TH2:

$$x \in \left\{ \frac{7}{4}; \frac{5}{4} \right\}$$

Vậy

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 trường Thạnh Bình – Hà Tĩnh 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $|x - 3| = 5$

Lời giải

$$|x - 3| = 5 \Leftrightarrow x - 3 = 5 \text{ hoặc } x - 3 = -5$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -2$$

$$x \in \{8; -2\}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm x biết $|2x - 1| = 3$.

Lời giải

$$|2x - 1| = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 = 3 \\ 2x - 1 = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 4 \\ 2x = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -1 \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x = 2 \text{ hoặc } x = -1$$

Câu 3. (HSG 7 thị xã Kỳ Anh, 2022 - 2023)

Tính tổng tất cả các giá trị của x thỏa mãn: $|x + 2015| = |-2023|$.

Lời giải

$$|x + 2015| = |-2023| \Leftrightarrow |x + 2015| = 2023$$

$$\Leftrightarrow x + 2015 = 2023 \text{ hoặc } x + 2015 = -2023$$

$$\Leftrightarrow x = 2023 - 2015 \text{ hoặc } x = -2023 - 2015$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \text{ hoặc } x = -4038.$$

$$\text{Vậy } 8 + (-4038) = -4030$$

Câu 4. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2021 - 2022)

Tìm x biết $|x - 1| - \frac{2}{3} = 0$.

Lời giải

$$|x - 1| - \frac{2}{3} = 0$$

$$|x - 1| = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = \frac{2}{3} \text{ hoặc } x - 1 = -\frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{3} \text{ hoặc } x = \frac{1}{3}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

Câu 5. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left| x - \frac{2}{5} \right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20}$.

Lời giải

Ta có $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{2} + \frac{1}{20} \Rightarrow \left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{11}{20}$

$\Rightarrow x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20}$ hoặc $x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20}$

+ Nếu $x - \frac{2}{5} = \frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} + \frac{11}{20} = \frac{19}{20}$

+ Nếu $x - \frac{2}{5} = -\frac{11}{20} \Rightarrow x = \frac{2}{5} - \frac{11}{20} = -\frac{3}{20}$

Vậy $x = \frac{19}{20}$ hoặc $x = -\frac{3}{20}$

Câu 6. (HSG 7 huyện Lục Ngạn 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

Lời giải

Ta có: $\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20}$

$\left|x - \frac{2}{5}\right| = \frac{3}{10}$

Suy ra $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$ hoặc $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

+ Xét $x - \frac{2}{5} = \frac{3}{10}$

$x = \frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{7}{10}$

+ Xét $x - \frac{2}{5} = -\frac{3}{10}$

$x = -\frac{3}{10} + \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$

Vậy $x \in \left\{\frac{7}{10}; \frac{1}{10}\right\}$

Câu 7. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

Tìm x biết: $|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

Lời giải

$|2x - 7| + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

$$|2x - 7| = 1 \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$|2x - 7| = 1 \Rightarrow 2x - 7 = 1 \text{ hoặc } 2x - 7 = -1$$

$$\Rightarrow x = 4 \text{ hoặc } x = 3$$

$$\text{Vậy } x \in \{4; 3\}$$

Câu 8. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } |x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25.$$

Lời giải

$$|x - 0,25| + \frac{1}{2} = 1,25 \Rightarrow |x - 0,25| = 0,75$$

$$\Rightarrow x - 0,25 = 0,75 \text{ hoặc } x - 0,25 = -0,75$$

$$\Rightarrow x = 1 \text{ hoặc } x = -0,5$$

$$\text{Vậy } x \in \{1; -0,5\}$$

Câu 9. (HSG 7 huyện Vĩnh Lộc 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

Lời giải

$$\frac{1}{2} - \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{5} \right| = \frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \text{ hoặc } x + \frac{1}{5} = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow x = -\frac{1}{30} \text{ hoặc } x = -\frac{11}{30}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -\frac{1}{30}; -\frac{11}{30} \right\}$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Quốc Oai 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết } \left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{5} \right| - 4 = -2$$

$$\text{Đ } \left| x + \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\text{Đ } x + \frac{1}{5} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x + \frac{1}{5} = -2$$

$$\text{Đ } x = \frac{9}{5} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{11}{5}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{9}{5}; -\frac{11}{5} \right\}$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Nga Sơn- 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } 3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

Lời giải

$$3|2x-1|+1 = (-2)^2 - 3 \cdot (-2)^3$$

$$\text{Đ } |2x-1| = 9$$

$$\text{Đ } 2x-1 = 9 \quad \text{hoặc} \quad 2x-1 = -9$$

$$\text{Đ } x = 5 \quad \text{hoặc} \quad x = -4$$

$$\text{Vậy } x \in \{5; -4\}$$

Câu 12. (HSG 7 huyện Anh Sơn 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7$$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{3} \right| - 5 = 7 \quad \text{Đ } \left| x + \frac{1}{3} \right| = 12$$

$$\text{Đ } \begin{cases} x + \frac{1}{3} = 12 \\ x + \frac{1}{3} = -12 \end{cases} \quad \text{Đ } \begin{cases} x = \frac{35}{3} \\ x = -\frac{37}{3} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{35}{3}; -\frac{37}{3} \right\}$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Hà Trung 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } 3\frac{1}{2} \cdot |2x-1| = \frac{21}{22}$$

Lời giải

$$3\frac{1}{2}:|2x-1|=\frac{21}{22}$$

$$|2x-1|=3\frac{1}{2}:\frac{21}{22}$$

$$|2x-1|=\frac{7}{2}\times\frac{22}{21}$$

$$|2x-1|=\frac{11}{3}$$

$$\text{P } 2x-1=\frac{11}{3} \quad 2x-1=-\frac{11}{3}$$

hoặc

$$\text{P } x=\frac{7}{3} \quad x=-\frac{4}{3}$$

hoặc

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{7}{3}; -\frac{4}{3} \right\}$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Ngọc Lặc, trường Nguyệt Ân; huyện Hiệp Hòa 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x-\frac{1}{3}\right|+\frac{4}{5}=\left|(-3,2)+\frac{2}{5}\right|$

Lời giải

$$\left|x-\frac{1}{3}\right|+\frac{4}{5}=\left|(-3,2)+\frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x-\frac{1}{3}\right|+\frac{4}{5}=\left|-\frac{16}{5}+\frac{2}{5}\right|$$

$$\left|x-\frac{1}{3}\right|+\frac{4}{5}=\frac{14}{5}$$

$$\left|x-\frac{1}{3}\right|=2$$

Suy ra $x-\frac{1}{3}=2$ hoặc $x-\frac{1}{3}=-2$

$$\text{P } x=\frac{7}{3} \quad x=-\frac{5}{3}$$

hoặc

$$\text{Vậy } x=\frac{7}{3} \quad x=-\frac{5}{3}$$

hoặc

Câu 15. (HSG 7 huyện Bát Xát 2022 - 2023)

Tìm x biết $3\cdot|9-2x|-17=16$

Lời giải

$$3\cdot|9-2x|-17=16$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 16 + 17$$

$$3 \cdot |9 - 2x| = 33$$

$$|9 - 2x| = 11$$

$$\text{Suy ra } 9 - 2x = 11 \text{ hoặc } 9 - 2x = -11$$

$$\Rightarrow x = -1 \text{ hoặc } x = 10$$

$$\text{Vậy } x = -1 \text{ hoặc } x = 10.$$

Câu 16. (HSG 7 huyện Đức Thọ 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } 10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

Lời giải

$$10 - |x - \sqrt{9}| = 9$$

$$10 - |x - 3| = 9$$

$$|x - 3| = 1$$

$$x - 3 = 1 \text{ hoặc } x - 3 = -1$$

$$x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

$$\text{Vậy } x = 4 \text{ hoặc } x = 2.$$

Câu 17. (HSG 7 thành phố Vinh, trường Nguyệt Ân 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \in \mathbb{Z} \text{ biết: } |2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$$

Lời giải

$$|2x - 1| + \frac{1}{4} = 2$$

$$|2x - 1| = \frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{7}{4} \text{ hoặc } 2x - 1 = -\frac{7}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{11}{8} \text{ hoặc } x = -\frac{3}{8}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{11}{8}; x = -\frac{3}{8}.$$

Câu 18. (HSG 7 huyện Thiệu Hóa 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \left| \frac{3}{8} - 2x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$$

Lời giải

$$\left| \frac{3}{8}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right| = \frac{5}{3}$$

Do $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} > 0$ với mọi x nên $\left| \frac{3}{8}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \right| = \frac{3}{8}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$

Suy ra $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{5}{3}$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = \frac{5}{2}$$

$$\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$$

$\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$ hoặc $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}$

+) TH1: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}x = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{8}x = \frac{5}{6} \Rightarrow x = \frac{5}{12}$

+) TH2: $\frac{3}{8}x - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{3}{8}x = -\frac{1}{2} + \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{8}x = -\frac{1}{6} \Rightarrow x = -\frac{1}{12}$

Vậy $x \in \left\{ -\frac{1}{12}; \frac{5}{12} \right\}$

Câu 19. (HSG 7 huyện Nông Cống, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{31}{10} - |x+2| - \frac{9}{5} + \frac{4}{5} = 1$

Lời giải

Ta có: $\frac{31}{10} - |x+2| - \frac{9}{5} + \frac{4}{5} = 1 \Rightarrow \frac{31}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \times \frac{5}{10} = \frac{1}{10}$

$\Rightarrow |x+2| = \frac{31}{10} - \frac{1}{10} = 3$

$\Rightarrow x+2=3$ hoặc $x+2=-3 \Rightarrow x=1$ hoặc $x=-5$.

Vậy $x=1$ hoặc $x=-5$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy 2021 - 2022)

Tìm x biết $\frac{8}{15} - \left| x - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right| = 1$

Lời giải

$$\frac{8}{15} - \left| x - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \right| = 1$$

$$3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1 - \frac{2}{3}$$

$$3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{3}$$

$$3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1$$

$$\left| x - \frac{1}{2} \right| = 2$$

$$x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{1}{2} = -2$$

$$x = \frac{5}{2} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{3}{2}$$

$$x \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$$

Vậy

Câu 21. (HSG 7 huyện Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$$

Lời giải

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} : |2x - 1| = -\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{3} : |2x - 1| = 1$$

$$|2x - 1| = \frac{1}{3}$$

$$\text{Suy ra } 2x - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{hoặc} \quad 2x - 1 = -\frac{1}{3}$$

$$\text{- Xét } 2x - 1 = \frac{1}{3} \quad \text{suy ra } x = \frac{2}{3}$$

$$\text{- Xét } 2x - 1 = -\frac{1}{3} \quad \text{suy ra } x = \frac{1}{3}$$

$$x \in \left\{ \frac{2}{3}; \frac{1}{3} \right\}$$

Vậy

Câu 22. (HSG 7 huyện Hà Trung 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2}$$

Lời giải

$$\frac{11}{4} + \frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{7}{2} - \frac{11}{4}$$

$$\frac{3}{2} : \left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = \frac{3}{2} : \frac{3}{4}$$

$$\left| 4x - \frac{1}{5} \right| = 2$$

$$\text{Suy ra: } 4x - \frac{1}{5} = 2 \quad \text{hoặc} \quad 4x - \frac{1}{5} = -2$$

$$\text{TH1: } 4x - \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow 4x = \frac{11}{5} \Rightarrow x = \frac{11}{20}$$

$$\text{TH2: } 4x - \frac{1}{5} = -2 \Rightarrow 4x = -\frac{9}{5} \Rightarrow x = -\frac{9}{20}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{11}{20}; -\frac{9}{20} \right\}$$

Câu 23. (HSG 7 huyện 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$$

Lời giải

$$\frac{3}{2} : |2x - 1| = \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{3}{2} : \frac{3}{5}$$

$$|2x - 1| = \frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x - 1 = \frac{5}{2} \quad \text{hoặc} \quad 2x - 1 = -\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{7}{2} \quad \text{hoặc} \quad 2x = -\frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{7}{4} \quad \text{hoặc} \quad x = -\frac{3}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{7}{4}; -\frac{3}{4} \right\}$$

Câu 24. (HSG 7 huyện Đông Hưng 2022 - 2023)

Tìm x , biết $3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} |2x - 1|\right) = \frac{21}{22}$.

Lời giải

$$3\frac{1}{2} : \left(4 - \frac{1}{3} |2x - 1|\right) = \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow \left(4 - \frac{1}{3} |2x - 1|\right) = 3\frac{1}{2} : \frac{21}{22}$$

$$\Rightarrow \left|4 - \frac{1}{3} |2x - 1|\right| = \frac{11}{3}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{1}{3} |2x - 1|\right| = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow |2x - 1| = 1$$

$$\Rightarrow 2x + 1 = 1 \text{ hoặc } 2x + 1 = -1$$

$$\Rightarrow x = 0 \text{ hoặc } x = -1$$

Vậy $x \in \{0; -1\}$.

Câu 25. (HSG 7 huyện Mường La 2021 - 2022)

Tìm x biết: $\left|x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right| = 1,6 + \frac{3}{5}$

Lời giải

Ta có $\left|x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right| = 1,6 + \frac{3}{5}$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2} + \frac{3}{4}\right| = 1$$

$$\Rightarrow \left|x - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{1}{2} = \frac{1}{4} \text{ hoặc } x - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3}{4} \text{ hoặc } x = \frac{1}{4}$$

Vậy: $x = \frac{3}{4}$ hoặc $x = \frac{1}{4}$

Câu 26. (HSG 7 huyện Bình Xuyên, tỉnh Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\frac{9}{10} - \left|x + 2\frac{9}{10} - 1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{5}\right| = 1$

Lời giải

$$\frac{21}{10} - \frac{9}{10} - |x+2| = \frac{9}{10} - 1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = 1$$

Ta có:

$$\text{P } \frac{21}{10} - \frac{9}{10} - |x+2| = \frac{9}{10} - 1 - \frac{2}{5} + \frac{4}{5} = 1 - \frac{4}{5}$$

$$\text{P } \frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{5}$$

$$\text{P } \frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\text{P } \frac{21}{10} - |x+2| = \frac{1}{10}$$

$$\text{P } |x+2| = \frac{21}{10} - \frac{1}{10}$$

$$\text{P } |x+2| = 2$$

$$\text{P } x+2 = 2 \quad \text{hoặc} \quad x+2 = -2$$

$$\text{P } x = 0 \quad \text{hoặc} \quad x = -4$$

$$\text{Vậy } x \in \{0; -4\}$$

Câu 27. (HSG 7 huyện Hậu Lộc 2022 - 2023)

$$\frac{21}{10} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{9}{10} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = 1$$

Tìm x , biết:

Lời giải

$$\frac{21}{10} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{9}{10} - \frac{1}{5} + \frac{2}{3} = 1$$

$$\text{P } \frac{21}{10} - \left| x - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{3}$$

$$\text{P } 3 - \left| x - \frac{1}{2} \right| = 1$$

$$\text{P } \left| x - \frac{1}{2} \right| = 2$$

$$\text{P } x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - \frac{1}{2} = -2$$

$$\text{TH1: } x - \frac{1}{2} = 2 \quad \text{P } x = \frac{5}{2}$$

$$\text{TH 2: } x - \frac{1}{2} = -2 \quad \text{P } x = -\frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{3}{2} \right\}$$

Câu 28. (HSG 7 huyện Lương Tài tỉnh Bắc Ninh 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$

Lời giải

$$\left| \frac{39}{2} - 3x^2 \right| = \frac{15}{2}$$

$$\text{P } \frac{39}{2} - 3x^2 = \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad \frac{39}{2} - 3x^2 = -\frac{15}{2}$$

$$\text{P } 3x^2 = \frac{39}{2} - \frac{15}{2} \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = \frac{39}{2} + \frac{15}{2}$$

$$\text{P } 3x^2 = 12 \quad \text{hoặc} \quad 3x^2 = 27$$

$$\text{P } x = \pm 2 \quad \text{hoặc} \quad x = \pm 3$$

$$\text{Vậy } x \in \{ \pm 2; \pm 3 \}$$

Câu 29. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left(\frac{1}{4} - 25 \right)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2$

Lời giải

$$5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - 3,25 = -2 \left(\frac{1}{4} - 25 \right)^2 - 2,5 \cdot 0,25 + (-0,25)^2$$

$$\text{P } 5 \cdot \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| - \frac{13}{4} = -2$$

$$\text{P } \left| \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x \right| = \frac{1}{4}$$

$$\text{P } \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = \frac{1}{4} \quad \text{hoặc} \quad \frac{3}{4} - \frac{2}{3}x = -\frac{1}{4}$$

$$\text{P } x = \frac{3}{4} \quad \text{hoặc} \quad x = \frac{3}{2}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{4}; \frac{3}{2} \right\}$$

Câu 30. (HSG 7 huyện Mù Cang Chải - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|2x - 7| = |5x + 2|$

Lời giải

$$|2x - 7| = |5x + 2|$$

$$\text{p } 2x - 7 = 5x + 2 \text{ hoặc } 2x - 7 = -5x - 2$$

$$\text{p } x = -3 \text{ hoặc } x = \frac{5}{7}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -3; \frac{5}{7} \right\}.$$

Câu 31. (HSG 7 huyện Sơn Dương - 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |5x - 4| = |x + 2|$$

Lời giải

$$\text{Xét với } x < -2 \text{ p } 4 - 5x + 2 + x = 0 \text{ p } x = \frac{3}{2} \text{ (không thỏa mãn)}$$

$$\text{Xét với } -2 < x < \frac{4}{5} \text{ p } 4 - 5x - x - 2 = 0 \text{ p } x = \frac{1}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Xét với } x \geq \frac{4}{5} \text{ p } 5x - 4 - x - 2 = 0 \text{ p } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1}{3}; \frac{3}{2} \right\}.$$

Câu 32. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } 3x - |2x + 1| = 2$$

Lời giải

$$\text{+ Nếu } x \geq \frac{1}{2} \text{ ta được: } 3x - 2x - 1 = 2 \text{ p } x = 3$$

$$\text{+ Nếu } x < \frac{1}{2} \text{ ta được: } 3x + 2x + 1 = 2 \text{ p } x = \frac{1}{5}$$

$$\text{Vậy } x = 3.$$

Câu 33. (HSG 7 huyện 2017 - 2018)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |2x - 1| - x = 4$$

Lời giải

$$|2x - 1| = x + 4$$

$$\text{+ Với } x \geq \frac{1}{2}, \text{ ta được: } 2x - 1 = x + 4 \text{ p } x = 5 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{+ Với } x < \frac{1}{2}, \text{ ta được: } -2x + 1 = x + 4 \text{ p } x = -1 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{5; -1\}.$$

Câu 34. (HSG 7 huyện 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|2x+3|=x+2$

Lời giải

Ta có: $x+2 \geq 0 \Rightarrow x \geq -2$

$$|2x+3|=x+2$$

$$\Rightarrow 2x+3=x+2 \text{ hoặc } 2x+3=-(x+2)$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ hoặc } x=-\frac{5}{3} \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{-1; -\frac{5}{3}\}.$$

Câu 35. (HSG 7 trường Hiền Quan 2015 - 2016)

Tìm x , biết: $|9-7x|=5x-3$

Lời giải

$$|9-7x|=5x-3 \text{ . Điều kiện } x \geq \frac{3}{5}$$

$$\Rightarrow 9-7x=5x-3 \text{ hoặc } 9-7x=3-5x$$

$$\Rightarrow 12x=12 \text{ hoặc } 2x=6$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ hoặc } x=3 \text{ (thỏa mãn)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{1; 3\}.$$

Câu 36. (HSG 7 huyện Kim Thành 2022 - 2023)

Tìm x biết, $|x+3|+1=3x$

Lời giải

$$|x+3|+1=3x \quad (*)$$

Nếu $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3$

$$\text{Do đó } |x+3|=x+3$$

$$\text{Từ } (*), \text{ ta có } x+3+1=3x$$

$$4=2x$$

$$x=2 \text{ (TM)}$$

Nếu $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3$

$$|x+3|=-(x+3)$$

$$\text{Từ } (*), \text{ ta có } -(x+3)+1=3x$$

$$-2=4x$$

$$x = \frac{-1}{2} \text{ (Loại)}$$

$$\text{Vậy } x = 2.$$

Câu 37. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2022 – 2023)

Tìm x biết rằng: $|x - 1| = 2 - x$.

Lời giải

$$|x - 1| = 2 - x \text{ điều kiện } 2 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 2$$

Trường hợp 1: $1 \leq x \leq 2$ ta có :

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$x - 1 = 2 - x$$

$$2x = 3$$

$$x = \frac{3}{2} \text{ (tm)}$$

Trường hợp 2: $x < 1$ ta có:

$$|x - 1| = 2 - x$$

$$1 - x = 2 - x$$

$$1 = 2 \text{ (vô lý)}$$

$$x = \frac{3}{2}$$

Vậy

Câu 38. (HSG 7 thị xã Thái Hòa Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2x - |x - 3| = 2$.

Lời giải

$$2x - |x - 3| = 2 \quad (1)$$

Nếu $x \geq 3$. Từ (1) ta có: $2x - x + 3 = 2 \Rightarrow x = -1$ (loại)

Nếu $x < 3$. Từ (1) ta có: $2x + x - 3 = 2 \Rightarrow x = \frac{5}{3}$ (thỏa mãn)

$$x = \frac{5}{3}$$

Vậy

Câu 39. (HSG 7 huyện Bát Xát 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|2x + 3| - x = 14$

Lời giải

$$|2x + 3| - x = 14 \Rightarrow |2x + 3| = 14 + x$$

TH 1: $2x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{3}{2}$. Khi đó ta có:

$$2x+3=14+x$$

$$x=11 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH 2: $2x+3 < 0 \Rightarrow x < -\frac{3}{2}$. Khi đó ta có:

$$-(2x+3)=14+x$$

$$-3x=17$$

$$x=-\frac{17}{3} \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

$$x \in \left\{ 11; -\frac{17}{3} \right\}$$

Vậy

Câu 40. (HSG 7 huyện Bá Thước 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x-7|+2x+5=6$

Lời giải

$$|x-7|+2x+5=6$$

Nếu $x \geq 7 \Rightarrow x-7+2x+5=6 \Rightarrow 3x=8 \Rightarrow x=\frac{8}{3} < 7$ (loại)

Nếu $x < 7 \Rightarrow 7-x+2x+5=6 \Rightarrow 12+x=6 \Rightarrow x=-6 < 7$ (thỏa mãn)

Vậy $x=-6$.

Câu 41. (HSG 7 tỉnh Quảng Ninh 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x+3|-2x=5$.

Lời giải

$$|x+3|-2x=5 \Rightarrow |x+3|=5+2x \quad (1)$$

TH1: Nếu $x+3 \geq 0 \Rightarrow x \geq -3 \Rightarrow |x+3|=x+3$

Khi đó (1) có dạng: $x+3=5+2x$

$$\Rightarrow x=-2 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

TH2: Nếu $x+3 < 0 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow |x+3|=-x-3$

Khi đó (1) có dạng: $-x-3=5+2x$

$$\Rightarrow 3x=-8$$

$$\Rightarrow x=-\frac{8}{3} \text{ (Không thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $x=-2$.

Câu 42. (HSG 7 huyện Tương Dương, tỉnh Nghệ An 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|2x - 1| - x = 1$

Lời giải

$$|2x - 1| - x = 1 \quad \text{hay} \quad |2x - 1| = 1 + x$$

Suy ra $2x - 1 = 1 + x$ hoặc $-(2x - 1) = 1 + x$ (Điều kiện $x^3 - 1$)

+ Trường hợp 1:

$$2x - 1 = 1 + x$$

$$2x - x = 1 + 1$$

$$x = 2 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

+ Trường hợp 2:

$$-(2x - 1) = 1 + x$$

$$-2x + 1 = 1 + x$$

$$3x = 0$$

$$x = 0 \quad (\text{Thỏa mãn})$$

Vậy $x \in \{2; 0\}$

Câu 43. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ, tỉnh Thái Bình 2022 - 2023)

Tìm x , biết $2023 - |x - 2023| = x$

Lời giải

Ta có $2023 - |x - 2023| = x$

$$|x - 2023| = 2023 - x$$

$$|x - 2023| = -(x - 2023)$$

Do đó $x - 2023 \notin 0$

Suy ra $x \notin 2023$

Kết luận: $x \notin 2023$

Câu 44. (HSG 7 huyện Nghĩa Hành 2021 – 2022)

Tìm x biết: $2|5x - 3| - 2x = 14$

Lời giải

Ta có: $2|5x - 3| - 2x = 14$

$$\Rightarrow 2|5x - 3| = 2x + 14$$

$$\Rightarrow |5x - 3| = x + 7 \quad \text{với điều kiện } x^3 - 7$$

$$\text{P } 5x - 3 = x + 7 \text{ hoặc } 5x - 3 = -(x + 7)$$

$$\text{P } 4x = 10 \text{ hoặc } 6x = -4$$

$$\text{P } x = \frac{5}{2} \text{ hoặc } x = -\frac{2}{3}$$

$$x \in \left\{ \frac{5}{2}; -\frac{2}{3} \right\}$$

Vậy có hai giá trị x thỏa mãn điều kiện

Câu 45. (HSG 7 huyện Tân Kỳ 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x(x+6)| = x$

Lời giải

Ta có: $|x(x+6)| = x$ Điều kiện: $x \geq 0$

$$\text{P } x(x+6) = x \text{ hoặc } x(x+6) = -x$$

$$\text{P } x(x+6-1) = 0 \text{ hoặc } x(x+6+1) = 0$$

$$\text{P } x(x+5) = 0 \text{ hoặc } x(x+7) = 0$$

$$\text{P } x = 0 \text{ hoặc } x = -5 \text{ hoặc } x = -7$$

Kết hợp với điều kiện ta được $x = 0$

Vậy $x = 0$.

Câu 46. (HSG 7 trường Cự Khê 2016 - 2017)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |2x-3| = \frac{1}{2} \text{ và } y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}}$$

Lời giải

$$y = \frac{\frac{3}{7} - \frac{3}{11} + \frac{3}{101}}{\frac{5}{7} - \frac{5}{11} + \frac{5}{101}} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4}}{\frac{5}{4} - \frac{5}{6} + \frac{5}{8}} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = 1$$

Ta có:

$$|2x-3| = \frac{1}{2}$$

Nên

$$2x-3 = \frac{1}{2} \text{ P } x = \frac{7}{4}$$

+) TH1:

$$2x-3 = -\frac{1}{2} \text{ P } x = \frac{5}{4}$$

+) TH2:

$$x \in \left\{ \frac{7}{4}; \frac{5}{4} \right\}$$

Vậy

Câu 47. (HSG 7 huyện Thanh Oai 2014- 2015)

Tìm x , biết:

a) $|2x - 1| - x = 1$

b) $|x + 3| - 2x = |x - 4|$

Lời giải

a) $|2x - 1| - x = 1$

Nếu $x \geq \frac{1}{2}$ ta có $2x - 1 - x = 1 \Rightarrow x = 2$ (thỏa mãn)

Nếu $x < \frac{1}{2}$ ta có: $-2x + 1 - x = 1 \Rightarrow x = 0$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \{2; 0\}$.

b) $|x + 3| - 2x = |x - 4|$ (1)

Lập bảng xét dấu

x	-3	4
$x + 3$	$-$	$+$
$x - 4$	$-$	$+$

+ Với $x < -3$, ta có (1) trở thành:

$-x - 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow -2x = 7 \Rightarrow x = -3,5$ (thỏa mãn)

+ Với $-3 \leq x \leq 4$, ta có (1) trở thành:

$x + 3 - 2x = -x + 4 \Rightarrow 0 \cdot x = 1$ (vô lý)

+ Với $x > 4$, ta có (1) trở thành:

$x + 3 - 2x = x - 4 \Rightarrow -2x = -7 \Rightarrow x = 3,5$ (không thỏa mãn)

Vậy $x = -3,5$

Câu 47. (HSG 7 huyện Đô Lương 2022 - 2023)

Tìm $x \in \mathbb{N}$ thỏa mãn. $|x - 4| - |x + 1| = -1$ (*)

Lời giải

Xét $x \geq 4$: (*) $\Rightarrow x - 4 - (x + 1) = -1 \Rightarrow -4 = 0$ (vô lý) hay (*) vô nghiệm.

Xét $-1 \leq x < 4$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) - (x + 1) = -1 \Rightarrow -2x = -4 \Rightarrow x = 2$ (thỏa điều kiện).

Xét $x < -1$: (*) $\Rightarrow -(x - 4) + (x + 1) = -1 \Rightarrow 6 = 0$ (vô lý) hay (*) vô nghiệm.

Vậy $x = 2$ là giá trị cần tìm.

Câu 49. (HSG 7 huyện Nghi Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x+5| + |x-3| = 9$.

Lời giải

$$|x+5| + |x-3| = 9 \quad (1)$$

$$x < -5 \quad \begin{cases} x+5 < 0 \\ x-3 < 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x+5| = -x-5 \\ |x-3| = -x+3 \end{cases}$$

* Xét

Khi đó (1) $\Rightarrow -x-5 - x+3 = 9 \Rightarrow -2x = 11 \Rightarrow x = -\frac{11}{2}$ (thỏa mãn)

$$-5 \leq x \leq 3 \quad \begin{cases} x+5 \geq 0 \\ x-3 \leq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x+5| = x+5 \\ |x-3| = -x+3 \end{cases}$$

* Xét

Khi đó (1) $\Rightarrow x+5 - x+3 = 9 \Rightarrow 0x = 1$ (vô lý)

$$x > 3 \quad \begin{cases} x+5 > 0 \\ x-3 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} |x+5| = x+5 \\ |x-3| = x-3 \end{cases}$$

* Xét

Khi đó (1) $\Rightarrow x+5 + x-3 = 9 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$ (thỏa mãn)

$$x \in \left\{ -\frac{11}{2}; \frac{7}{2} \right\}$$

Vậy

Câu 50. (HSG 7 huyện Lý Nhân 2021 - 2022)

Tìm x , biết $|x| + |x+2022| = 2023$

Lời giải

Với $x > 0$, ta được $x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Với $-2022 < x < 0$, ta được $-x + x + 2022 = 2023 \Rightarrow 0x = 1$ (vô lý)

Với $x < -2022$, ta được $-x - x - 2022 = 2023 \Rightarrow -2x = 4045 \Rightarrow x = -\frac{4045}{2}$

$$x \in \left\{ \frac{1}{2}; -\frac{4045}{2} \right\}$$

Vậy

Câu 51. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|2x-3| - |3x+2| = -4$.

Lời giải

$$2x-3=0 \Rightarrow x=\frac{3}{2}$$

Ta có:

$$3x+2=0 \Rightarrow x=-\frac{2}{3}$$

$$\text{TH1: } x \notin \frac{-2}{3}$$

$$|2x-3| - |3x+2| = -4 \Leftrightarrow 3-2x+3x+2 = -4 \Leftrightarrow x = -9 \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH2: } \frac{-2}{3} < x < \frac{3}{2}$$

$$|2x-3| - |3x+2| = -4 \Leftrightarrow 2x-3+3x+2 = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{5} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{TH3: } \frac{3}{2} \leq x$$

$$|2x-3| - |3x+2| = -4 \Leftrightarrow 2x-3-3x-2 = -4 \Leftrightarrow x = -1 \text{ (loại).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ -9; \frac{-3}{5} \right\}.$$

Câu 5². (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Kim Trung 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|x-3| + |x-2| = 1$

Lời giải

Tìm x biết: $|x-3| + |x-2| = 1 \quad (1)$

Xét: $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$

$x-2=0 \Leftrightarrow x=2$

Ta có bảng xét dấu:

x	2	3
$x-3$	-	+
$x-2$	-	+

Dựa vào bảng xét dấu ta có:

- Nếu $x < 2$ thì (1) trở thành:

$$-(x-3) - (x-2) = 1$$

$$\Leftrightarrow -2x = -4$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \text{ (không thỏa mãn điều kiện)}$$

- Nếu $2 \leq x < 3$ thì (1) trở thành:

$$-(x-3) + (x-2) = 1 \Leftrightarrow 0x = 0 \text{ (Luôn đúng với } 2 \leq x < 3)$$

- Nếu $3 \leq x$ thì (1) trở thành:

$$(x-3) + (x-2) = 1$$

$$2x = 6$$

$$x = 3 \text{ (thỏa mãn điều kiện)}$$

Vậy $2 \leq x \leq 3$ thỏa mãn bài toán.

Câu 53. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Trần Thủ Độ 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x-1| + |x-2| = 5$,

Lời giải

$$|x-1| + |x-2| = 5 \quad (1)$$

+) Với $x \leq 2$ khi đó (1) có dạng: $x-1+x-2=5 \Rightarrow 2x-3=5$ (chọn)

+) Với $1 < x < 2$ khi đó (1) có dạng: $x-1+2-x=5 \Rightarrow 0x=4$ (vô lý)

+) Với $x \geq 1$ khi đó (1) có dạng: $1-x+2-x=5 \Rightarrow -2x+3=5$ (chọn)

KL: $x=4$ hoặc $x=-1$

Câu 54. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x biết: $|4x+3| - |x-1| = 7$

Lời giải

$$|4x+3| - |x-1| = 7$$

Ta có bảng xét dấu :

x	$-\frac{3}{4}$	1
$ 4x+3 $	-	+
$ x-1 $	-	+

+ Với $x < -\frac{3}{4}$, ta được: $-4x-3-(-x+1)=7 \Rightarrow -3x=11 \Rightarrow x=-\frac{11}{3}$ (thỏa mãn)

+ Với $-\frac{3}{4} \leq x < 1$, ta được: $4x+3-(-x+1)=7 \Rightarrow 5x=5 \Rightarrow x=1$ (loại)

+ Với $x \geq 1$, ta được: $4x+3-(x-1)=7 \Rightarrow 3x=3 \Rightarrow x=1$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \{-\frac{11}{3}; 1\}$.

Câu 55. (HSG 7 Quận Tây Hồ 2022 – 2023)

Tìm x biết $-3|x-5| + 7|x-5| = 2^2.5$.

Lời giải

$$-3|x-5| + 7|x-5| = 2^2.5$$

$$4|x-5| = 4.5$$

$$|x-5| = 5$$

Suy ra $x - 5 = 5$ hoặc $x - 5 = -5$

Hay $x = 10$ hoặc $x = 0$

Vậy $x \in \{10; 0\}$

Câu 56. (HSG 7 -TP Thanh Hóa, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = 2$

Lời giải

Ta có: $\left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|2x - \frac{3}{2}\right| = \left|2x + \frac{1}{2}\right| + \left|\frac{3}{2} - 2x\right| \geq \left|2x + \frac{1}{2} + \frac{3}{2} - 2x\right| = 2$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $2x + \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = 0$

Giải ra được: $x = \frac{1}{2}$

Câu 57. (HSG 7 huyện Sóc Sơn 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = |2x^2 + 2,5|$

Lời giải

Nhận thấy $2x^2 + 2,5 \geq 2,5$ với mọi x nên $|2x^2 + 2,5| = 2x^2 + 2,5$

Do đó $\left|x - \frac{3}{4}\right| + 2x^2 = 2x^2 + 2,5$

$\Rightarrow \left|x - \frac{3}{4}\right| = 2,5$

Suy ra $x - \frac{3}{4} = 2,5$ hoặc $x - \frac{3}{4} = -2,5$

$\Rightarrow x = \frac{13}{4}$ hoặc $x = -\frac{7}{4}$

Vậy $x = \frac{13}{4}$ hoặc $x = -\frac{7}{4}$

Câu 58. (HSG 7 huyện Quan Hoa 2021 - 2022; huyện Minh An - 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Lời giải

Tìm x biết: $|x - 2| + |3 - 2x| = 2x - 1$

Vì vế trái luôn không âm nên vế phải $2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2}$

Ta có bảng xét dấu :

x	$\frac{3}{2}$	2
$ x - 2 $	-	+
$ 3 - 2x $	+	-

+ Nếu $x > 2$ ta có: $x - 2 + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

+ Nếu $\frac{3}{2} \leq x \leq 2$ ta có: $2 - x + 2x - 3 = 2x - 1 \Rightarrow x = 0$ (loại)

+ Nếu $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{2}$ ta có: $2 - x + 3 - 2x = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{6}{5}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{6}{5}; 4 \right\}$.

Câu 59. (HSG 7 trường Ngô Gia Tự 2017 - 2018)

Tìm x , biết: $|x + 3| + |x + 7| = 4x$

Lời giải

Ta có bảng xét dấu :

x	-7	-3
$ x + 3 $	-	+
$ x + 7 $	-	+

+ Với $x < -7$, ta được: $-x - 3 - x - 7 = 4x \Rightarrow -6x = 7 \Rightarrow x = -\frac{7}{6}$ (loại)

+ Với $-7 \leq x < -3$, ta được: $-x - 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 4x = 4 \Rightarrow x = 1$ (loại)

+ Với $x \geq -3$, ta được: $x + 3 + x + 7 = 4x \Rightarrow 2x = 10 \Rightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 5$.

Câu 60. (HSG 7 huyện Sông Lô, Vĩnh Phúc, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$. (*)

Lời giải

$$2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3|$$

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| = 2024x \quad (1)$$

Ta có: $|1011x + 2| \geq 0$ và $|1012x + 3| \geq 0$, với mọi x

$$\Rightarrow |1011x + 2| + |1012x + 3| \geq 0 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\begin{cases} 2024x^3 \geq 0 \\ x^3 \geq 0 \end{cases}$

Khi đó: $|1011x + 2| = 1011x + 2$ và $|1012x + 3| = 1012x + 3$

Ta có: $2024x - |1011x + 2| = |1012x + 3| \Leftrightarrow 1011x + 2 + 1012x + 3 = 2024x$

$\Leftrightarrow 1011x + 1012x - 2024x = -5 \Leftrightarrow -x = -5 \Leftrightarrow x = 5$ (thỏa mãn)

Vậy $x = 5$.

Câu 61. (HSG 7 huyện Quỳnh Phụ 2021 - 2022)

x biết: $\left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$

Tìm

Lời giải

Ta có $\left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| \geq 0 \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| \geq 0 \end{cases}$$

mà

Nên $4044x^3 \geq 0 \Leftrightarrow x^3 \geq 0$

+ Vì $x^3 \geq 0$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| > 0 \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{1}{3} + 2021x \right| = \frac{1}{3} + 2021x \\ \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = \frac{2}{3} + 2022x \end{cases}$$

$$\left| \frac{1}{3} + 2021x \right| + \left| \frac{2}{3} + 2022x \right| = 4044x$$

Do đó :

$$\frac{1}{3} + 2021x + \frac{2}{3} + 2022x = 4044x$$

+ Tìm được $x = 1$ (Thỏa mãn)

Câu 62. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Phạm Kinh Ân 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $|x - 1| + 2 = 3$

Lời giải

Lập luận được $|x-1|+2 > 0$

Nên $|x-1|+2=3$

$$\Rightarrow |x-1|+2=3$$

$$\Rightarrow |x-1|=1$$

$$\text{P } x-1=1 \text{ hoặc } x-1=-1$$

$$\text{Vậy } x=2, x=0$$

Câu 63. (HSG 7 trường Nguyễn Khuyến; Tam Hưng 2016 - 2017)

Tìm x biết: $|x+3|-8=20$

Lời giải

$$|x+3|-8=20 \text{ P } \begin{cases} x+3-8=20 \\ x+3-8=-20 \end{cases}$$

$$\text{+ Với } |x+3|-8=20 \text{ P } \begin{cases} x+3=28 \\ x+3=-31 \end{cases}$$

$$\text{+ Với } |x+3|-8=-20 \text{ P } |x+3|=-12 \text{ (vô nghiệm)}$$

$$\text{Vậy } x \in \{25; -31\}$$

Câu 64. (HSG 7 thành phố Sầm Sơn, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $|3x+2|-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$

Lời giải

$$\text{Từ đề bài, suy ra } |3x+2|-\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \text{ hoặc } |3x+2|-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}$$

$$\text{Nếu } |3x+2|-\frac{2}{3}=\frac{4}{3} \text{ P } |3x+2|=2 \text{ P } x=0 \text{ hoặc } x=-\frac{4}{3}$$

$$\text{Nếu } |3x+2|-\frac{2}{3}=-\frac{4}{3} \text{ P } |3x+2|=-\frac{2}{3} \text{ (loại)}$$

$$\text{Vậy } x=0 \text{ hoặc } x=-\frac{4}{3}$$

Câu 65. (HSG 7 thành phố Ninh Bình; huyện Hưng Hà 2022 - 2023; trường số 2 Phú Nhuận 2014 - 2015; huyện Việt Yên 2012 - 2013)

Tìm x , biết: $|x^2+|x-1||=x^2+2$

Lời giải

$$|x^2 + |x - 1|| = x^2 + 2$$

$$\text{P } x^2 + |x - 1| = x^2 + 2 \quad \text{hoặc} \quad x^2 + |x - 1| = -x^2 - 2$$

$$\text{P } |x - 1| = 2 \quad \text{hoặc} \quad |x - 1| = -2x^2 - 2$$

$$+ \text{ Nếu } |x - 1| = 2 \quad \text{P } x - 1 = 2 \quad \text{hoặc} \quad x - 1 = -2$$

$$\text{P } x = 3 \quad \text{hoặc} \quad x = -1$$

$$+ \text{ Nếu } |x - 1| = -2x^2 - 2 \quad \text{vô nghiệm do} \quad -2x^2 - 2 = -2(x^2 + 1) < 0 \quad \text{với mọi } x$$

$$\text{Vậy } x \in \{-1; 3\}$$

Câu 66. (HSG 7 huyện Quốc Oai, Hà Nội 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } |x^2 + |2x - 1|| = x^2 + 2023$$

Lời giải

$$\text{Với mọi } x, \text{ ta có } x^2 \geq 0; |2x - 1| \geq 0 \quad \text{P } x^2 + |2x - 1| \geq 0$$

$$\text{P } |x^2 + |2x - 1|| = x^2 + |2x - 1|$$

$$\text{Do đó } |x^2 + |2x - 1|| = x^2 + 2023$$

$$x^2 + |2x - 1| = x^2 + 2023$$

$$|2x - 1| = 2023$$

$$2x - 1 = 2023 \quad \text{hoặc} \quad 2x - 1 = -2023$$

$$x = 1012 \quad \text{hoặc} \quad x = -1011$$

$$\text{Vậy } x = 1012 \quad \text{hoặc} \quad x = -1011$$

Câu 67. (HSG 7 thành phố Bắc Giang 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } |x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$$

Lời giải

$$|x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 2023$$

$$\text{Ta thấy } x^2 \geq 0, "a; |a| \geq 0, "a$$

$$\text{Do đó với mọi } x, \text{ ta có}$$

$$x^2 \geq 0; |8x - 4| \geq 0 \quad \text{mà } 1 > 0 \quad \text{P } x^2 + 1 + |8x - 4| > 0$$

$$\text{P } |x^2 + 1 + |8x - 4|| = x^2 + 1 + |8x - 4|$$

$$\text{Nên } x^2 + 1 + |8x - 4| = x^2 + 2023$$

$$\Rightarrow |8x - 4| = 2022$$

$$\Rightarrow 8x - 4 = 2022 \text{ hoặc } 8x - 4 = -2022$$

$$\text{+) TH1: } 8x - 4 = 2022$$

$$x = \frac{1013}{4}$$

$$\text{+) TH2: } 8x - 4 = -2022$$

$$x = \frac{-1009}{4}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{1013}{4}; \frac{-1009}{4} \right\}$$

Câu 68. (HSG 7 huyện Hương Trà, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| 3x - 3 + 2x + (-1)^{2022} \right| = 3x + 2023^0.$$

Lời giải

$$\text{Tìm } x \text{ biết: } \left| 3x - 3 + 2x + (-1)^{2022} \right| = 3x + 2023^0 \Rightarrow \left| 3x - 3 + 2x + 1 \right| = 3x + 1 \quad (*)$$

$$\text{Điều kiện để } x \text{ thỏa mãn bài toán là: } 3x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{3}.$$

$$\text{Khi đó } x \geq -\frac{1}{3} \Rightarrow 2x + 1 \geq 0 \quad (*) \text{ nên trở thành:}$$

$$\Rightarrow |3x - 3| + 2x + 1 = 3x + 1 \Rightarrow |3x - 3| = x \quad (x \geq 0).$$

$$\text{Nếu } x \geq 1 \text{ ta có } 3x - 3 = x \text{ nên } x = \frac{3}{2} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Nếu } 0 \leq x < 1 \text{ ta có } 3 - 3x = x \text{ nên } x = \frac{3}{4} \text{ (thỏa mãn).}$$

$$\text{Vậy } x \in \left\{ \frac{3}{2}; \frac{3}{4} \right\}.$$

Câu 69. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x \text{ biết } \frac{1}{|x - 3| + 2} = \frac{2}{|x - 3| + 4}$$

Lời giải

$$\frac{1}{|x - 3| + 2} = \frac{2}{|x - 3| + 4}$$

$$|x - 3| + 4 = 2(|x - 3| + 2)$$

$$|x - 3| + 4 = 2|x - 3| + 4$$

$$2|x-3|+4-|x-3|-4=0$$

$$|x-3|=0$$

$$x-3=0$$

$$x=3$$

Vậy $x=3$.

Câu 70. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$.

Lời giải

Ta có $\frac{2}{|x-2|+2} = \frac{3}{|6-3x|+1}$

$$\Rightarrow 2(|6-3x|+1) = 3(|x-2|+2)$$

$$\Rightarrow 2|6-3x|+2 = 3|x-2|+6$$

$$\Rightarrow 2|6-3x|-3|x-2| = 6-2$$

$$\Rightarrow 2.3|2-x|-3|x-2| = 4$$

$$\Rightarrow 6|x-2|-3|x-2| = 4$$

$$\Rightarrow 3|x-2| = 4$$

$$\Rightarrow |x-2| = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow x-2 = \frac{4}{3} \quad \text{hoặc} \quad x-2 = -\frac{4}{3}$$

TH1: $x-2 = \frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{4}{3}+2 \Rightarrow x = \frac{10}{3}$ (thỏa mãn)

TH2: $x-2 = -\frac{4}{3} \Rightarrow x = 2-\frac{4}{3} \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ (thỏa mãn)

Vậy $x \in \left\{ \frac{10}{3}; \frac{2}{3} \right\}$.

Câu 71. (HSG 7 huyện Nghi Xuân, tỉnh Hà Tĩnh 2022 - 2023)

Tìm số hữu tỉ x biết $|x+2|+|x-2|+|x+3|=5$ (1).

Lời giải

*Trường hợp 1: $x < -3$

$$(1) \Rightarrow (-x-2)+(-x+2)+(-x-3)=5 \Rightarrow -3x-3=5 \Rightarrow x=-\frac{8}{3} \text{ (loại)}$$

*Trường hợp 2: $x = -3$

$$(1) \text{P } 6 = 5 \quad (\text{loại})$$

* Trường hợp 3: $-3 < x < -2$

$$(1) \text{P } (-x-2) + (-x+2) + x+3 = 5 \text{P } x = -2 \quad (\text{loại})$$

* Trường hợp 4: $x = -2$

$$(1) \text{P } 5 = 5 \quad (\text{luôn đúng})$$

* Trường hợp 5: $-2 < x < 2$

$$(1) \text{P } x+2 + (-x+2) + x+3 = 5 \text{P } x = -2 \quad (\text{loại})$$

* Trường hợp 6: $x = 2$

$$(1) \text{P } 9 = 5 \quad (\text{vô lí})$$

* Trường hợp 7: $x > 2$

$$(1) \text{P } x+2 + x-2 + x+3 = 5 \text{P } x = \frac{2}{3} \quad (\text{loại})$$

Vậy $x = -2$.

Câu 72. (HSG 7 huyện Thái Thụy 2021 - 2022)

Tìm x , biết: $|x-1| + |x-2| + |x-4| = 3$

Lời giải

Nhận thấy: $|x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x|$

Ta có: $|x-1|^3 \geq x-1$; $|4-x|^3 \geq 4-x$

$$\text{P } |x-1| + |x-4| = |x-1| + |4-x|^3 \geq x-1 + 4-x$$

$$\text{P } |x-1| + |x-4|^3 \geq 3$$

Lại có: $|x-2|^3 \geq 0 \text{P } |x-1| + |x-2| + |x-4|^3 \geq 3$

$$\begin{array}{l} \begin{array}{l} |x-1|^3 \geq 0 \\ |4-x|^3 \geq 0 \\ |x-2|^3 \geq 0 \end{array} \text{P } \begin{array}{l} |x-1| \geq 0 \\ |x-4| \geq 0 \\ |x-2| \geq 0 \end{array} \end{array} \text{P } \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \leq 4 \\ x = 2 \end{array} \text{P } x = 2$$

Dấu bằng xảy ra khi

Vậy $x = 2$.

Câu 73. (HSG 7 trường Lê Tư Thành 2022 - 2023; huyện Thanh Miện 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Lời giải

Ta có: $|x+1| + |x+2| + |x+3| = 4x$

Vì vế trái không âm với mọi x nên $4x^3 - 0 \geq x^3 - 0$

Với $x^3 - 0$ thì $|x+1| = x+1$; $|x+2| = x+2$; $|x+3| = x+3$ ta có:

$$x+1+x+2+x+3=4x$$

$$\Rightarrow 3x+6=4x$$

$$\Rightarrow x=6 \text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy $x=6$

Câu 74. (HSG 7 huyện Yên Mỹ 2021 - 2022)

Tìm x , biết $|x-1|+|x-2|+|x-3|=x-4$

Lời giải

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|=x-4$$

Vì $|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 0$ nên $x-4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$ (1)

Khi đó: $|x-1|=x-1$; $|x-2|=x-2$; $|x-3|=x-3$

$$(1) \Rightarrow x-1+x-2+x-3=x-4$$

$$\Rightarrow 2x=2$$

$$\Rightarrow x=1 \text{ (không thỏa mãn } x \geq 4)$$

Vậy không tồn tại giá trị của x thỏa mãn.

Câu 75. (HSG 7 huyện Thạch Thành 2022 – 2023)

Tìm x biết: $|x+2|+|x+3|=4(x-1)-|x-1|$

Lời giải

$$|x+2|+|x+3|=4(x-1)-|x-1| \text{ Suy ra } |x+2|+|x+3|+|x-1|=4(x-1)$$

Do vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 nên vế phải cũng phải lớn hơn hoặc bằng 0
nên $x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$

Với $x \geq 1 \Rightarrow x+2 > 0$; $x+3 > 0$; $x-1 \geq 0$ nên ta có:

$$x+2+x+3+x-1=4(x-1)$$

$$\Rightarrow x=8 \text{ (t/m).}$$

Vậy $x=8$.

Câu 76. (HSG 7 huyện Hưng Hà, tỉnh Hải Dương, trường Dân Chủ 2022 - 2023)

Tìm x, y thỏa mãn: $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3$

Lời giải

Theo bài cho: $|x-1|+|x-2|+|y-3|+|x-4|=3$

$$|x-1|+|x-2|+|y-3|+|4-x|=3 \quad (1)$$

Ta có: $|x-1| + |4-x| \geq |(x-1) + (4-x)|$

$$|x-1| + |4-x| \geq 3 \quad (2)$$

$$|x-2| \geq 0, |y-3| \geq 0 \quad (3)$$

Từ (2), (3) và (1) suy ra:

$$|x-1| + |4-x| = 3 \quad (4)$$

$$|x-2| = 0 \quad (5)$$

$$|y-3| = 0 \quad (6)$$

Từ (5) ta được $x=2$, thay vào (4) ta có: $|2-1| + |4-2| = 3$

$$1+2=3 \quad (\text{luôn đúng})$$

Từ (6) ta được $y=3$.

Vậy: $x=2, y=3$.

Câu 77. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2021 - 2022)

Tìm x biết: $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 10x$

Lời giải

$$|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| = 10x \quad (1)$$

Mà $|x+1| + |x+2| + |x+3| + |x+4| \geq 0$ với mọi giá trị của x (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow 10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0 \Rightarrow x+1 > 0, x+2 > 0, x+3 > 0, x+4 > 0$

$$\Rightarrow |x+1| = x+1, |x+2| = x+2, |x+3| = x+3, |x+4| = x+4 \quad (3)$$

Từ (1) và (3) $\Rightarrow x+1+x+2+x+3+x+4 = 10x$

$$\Rightarrow 4x+10 = 10x \Rightarrow 6x = 10$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3} \quad (\text{thỏa mãn } x \geq 0)$$

Vậy $x = \frac{5}{3}$

Câu 78. (HSG 7 huyện Ninh Giang, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\left|x+\frac{1}{3}\right| + \left|x+\frac{2}{3}\right| + \left|x+\frac{2}{5}\right| + \left|x+\frac{3}{2}\right| = 33x$.

Lời giải

$$\left|x+\frac{1}{3}\right| + \left|x+\frac{2}{3}\right| + \left|x+\frac{2}{5}\right| + \left|x+\frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$\text{Vì } \left|x + \frac{1}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{3}\right| \geq 0, \left|x + \frac{2}{5}\right| \geq 0, \left|x + \frac{3}{2}\right| \geq 0 \Rightarrow 33x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

Ta có:

$$\left|x + \frac{1}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{3}\right| + \left|x + \frac{2}{5}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = 33x$$

$$x + \frac{1}{3} + x + \frac{2}{3} + x + \frac{2}{5} + x + \frac{3}{2} = 33x$$

$$4x + \frac{29}{10} = 33x$$

$$29x = \frac{29}{10}$$

$$x = \frac{1}{10}$$

$$\text{Vậy } x = \frac{1}{10}.$$

Câu 79. (HSG 7 huyện Trực Ninh 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| = 605x$$

Lời giải

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$|x+1| \geq 0; |x+2| \geq 0; |x+3| \geq 0; \dots; |x+100| \geq 0$$

$$\Rightarrow |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| \geq 0$$

$$\text{Mà } |x+1| + |x+2| + |x+3| + \dots + |x+100| = 605x$$

$$\Rightarrow 605x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$$

$$\begin{array}{l} |x+1| = x+1 \\ |x+2| = x+2 \\ \dots \\ |x+100| = x+100 \end{array}$$

Khi đó

$$(x+1) + (x+2) + (x+3) + \dots + (x+100) = 605x$$

Ta có :

$$100x + \frac{(1+100) \cdot 100}{2} = 605x$$

$$\Rightarrow 100x + 5050 = 605x$$

$$\Rightarrow 505x = 5050 \Rightarrow x = 10 \quad (\text{chọn vì thỏa mãn } x \geq 0)$$

$$\text{Vậy } x = 10$$

Câu 80. (HSG 7 huyện Than Uyên tỉnh Lai Châu 2022 - 2023)

Tim x biết: $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$

Lời giải

Vì vế trái luôn lớn hơn hoặc bằng 0 với " x " nên $2024x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Khi đó: $|x+1| + |x+3| + \dots + |x+2023| = 2024x$

$$\Rightarrow x+1+x+3+\dots+x+2023 = 2024x$$

$$\Rightarrow (x+x+x+\dots+x) + (1+3+5+\dots+2023) = 2024x$$

$$\Rightarrow 1012x + \frac{2023+1}{2} \cdot 1012 = 2024x$$

$$\Rightarrow 1024144 = 2024x - 1012x$$

$$\Rightarrow 1012x = 1024144$$

$$\Rightarrow x = 1012$$

Vậy $x = 1012$

Câu 81. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).

Tim x biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x$

Lời giải

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x \quad (1)$$

Ta thấy $\left|x + \frac{1}{2}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{6}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{12}\right| \geq 0; \dots; \left|x + \frac{1}{9900}\right| \geq 0$

nên $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| \geq 0$

mà $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{9900}\right| = 10x$

suy ra $10x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\Rightarrow \left|x + \frac{1}{2}\right| = x + \frac{1}{2}; \left|x + \frac{1}{6}\right| = x + \frac{1}{6}; \left|x + \frac{1}{12}\right| = x + \frac{1}{12}; \left|x + \frac{1}{9900}\right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 10x$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 10x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 10x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \quad (\text{tmđk})$$

$$x = \frac{99}{100}$$

Vậy

Câu 82. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tìm x , biết: $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$

Lời giải

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Với $x \geq 0$, $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 11x$ trở thành:

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$x = \frac{10}{11}$$

Vậy

Câu 83. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 12x$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

Suy ra $12x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$$\left|x + \frac{1}{2}\right| + \left|x + \frac{1}{6}\right| + \left|x + \frac{1}{12}\right| + \left|x + \frac{1}{20}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{110}\right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{10 \cdot 11} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{11} = 12x$$

$$2x = \frac{10}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}.$$

Vậy

Câu 84. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| = 101x$

Lời giải

Vì $\left|x + \frac{1}{101}\right| + \left|x + \frac{2}{101}\right| + \left|x + \frac{3}{101}\right| + \dots + \left|x + \frac{100}{101}\right| \geq 0$

Suy ra $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} (1 + 2 + 3 + \dots + 100)$$

$$x = 50$$

Vậy $x = 50$.

Câu 85. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$.

Lời giải

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra $12x < 0$ hay $x < 0$.

Với $x < 0$ ta có:

$$\left|x - \frac{1}{3}\right| + \left|x - \frac{1}{15}\right| + \left|x - \frac{1}{35}\right| + \left|x - \frac{1}{63}\right| + \dots + \left|x - \frac{1}{483}\right| = -12x$$

$$-x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$-11x + \frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \dots + \frac{1}{21 \cdot 23} = -12x$$

$$-11x + \frac{1}{2} - \frac{1}{23} = -12x$$

$$x = \frac{-11}{23} \text{ (TM).}$$

$$x = \frac{-11}{23}.$$

Vậy

Câu 86. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{1 \times 5}\right| + \left|x + \frac{1}{5 \times 9}\right| + \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397 \times 401}\right| = 101x$

Lời giải

Ta có $\left|x + \frac{1}{1 \times 5}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{5 \times 9}\right| \geq 0; \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right| \geq 0; \dots;$

Nên $\left|x + \frac{1}{1 \times 5}\right| + \left|x + \frac{1}{5 \times 9}\right| + \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397 \times 401}\right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1 \times 5} > 0; x + \frac{1}{5 \times 9} > 0; \dots; x + \frac{1}{397 \times 401} > 0$

Nên ta có: $x + \frac{1}{1 \times 5} + x + \frac{1}{5 \times 9} + x + \frac{1}{9 \times 13} + \dots + x + \frac{1}{397 \times 401} = 101x$

$\Rightarrow 100x + \frac{1}{4} + \frac{1}{5 \times 9} + \dots + \frac{1}{397 \times 401} = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{401}\right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}$.

Vậy $x = \frac{100}{401}$.

Câu 87. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

$\left|x + \frac{1}{2021}\right| + \left|x + \frac{2}{2021}\right| + \left|x + \frac{3}{2021}\right| + \dots + \left|x + \frac{2020}{2021}\right| = 2021x.$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$

$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$

$\Rightarrow 2020x + \frac{2020 \cdot 2021}{2 \cdot 2021} = 2021x$

$\Rightarrow x = 1010.$

Vậy $x = 1010.$

Câu 88. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x nguyên biết: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

Lời giải

Viết lại: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |x-46| + \dots + |x-90| = 2025$

$|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-45| + |46-x| + \dots + |90-x| = 2025$

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$\begin{aligned}
 &|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45; \\
 &|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x \\
 \Rightarrow VT &= |x-1| + |x-2| + \dots + |90-x| \geq x-1 + x-2 + \dots + 90-x \\
 \Rightarrow VT &\geq (46+47+\dots+90) - (1+2+3+\dots+45) \\
 \Rightarrow VT &\geq 2025
 \end{aligned}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} &|x-1| = x-1 \\ &|x-2| = x-2 \\ &\dots\dots\dots \\ &|x-45| = x-45 \\ &|x-46| = 46-x \\ &|x-47| = 47-x \\ &\dots\dots\dots \\ &|x-90| = 90-x \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &x-1 \geq 0 \\ &x-2 \geq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &x-45 \geq 0 \\ &x-46 \leq 0 \\ &x-47 \leq 0 \\ &\dots\dots\dots \\ &x-90 \leq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} &x \geq 1 \\ &x \geq 2 \\ &\dots\dots\dots \\ &x \geq 45 \\ &x \leq 46 \\ &x \leq 47 \\ &\dots\dots\dots \\ &x \leq 90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46 \\
 \Rightarrow &45 \leq x \leq 46
 \end{aligned}$$

Mà x là số nguyên $\Rightarrow x \in [45; 46]$

Câu 89. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Thống Nhất, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 7 = |b-5| + b-5$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $x \in \mathbb{Z}$

Áp dụng nhận xét trên thì $|b-5| + b-5$ là số chẵn với $b-5 \in \mathbb{Z}$

Suy ra $2^a + 7$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b-5| + b-5 = 8$.

+ Nếu $b < 5$, ta có: $-(b-5) + b-5 = 8 \Rightarrow 0 = 8$ (loại).

+ Nếu $b \geq 5$, ta có: $2(b-5) = 8 \Rightarrow b-5 = 4 \Rightarrow b = 9$ (thỏa mãn).

$(a; b) = (0; 9)$.

Vậy

Câu 90. (Đề 90 - HSG 7 Hưng Hà, trường THCS Tây Đô, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên a, b sao cho: $2^a + 37 = |b-45| + b-45$.

Lời giải

Nhận xét: Với $x \geq 0$ thì $|x| + x = 2x$.

Với $x < 0$ thì $|x| + x = 0$. Do đó $|x| + x$ luôn là số chẵn với $x \in \mathbb{Z}$.

Áp dụng nhận xét trên thì $|b - 45| + b - 45$ là số chẵn với $b \in \mathbb{Z}$.

Suy ra $2^a + 37$ là số chẵn $\Rightarrow 2^a$ lẻ khi $a = 0$.

Khi đó $|b - 45| + b - 45 = 38$.

+ Nếu $b < 45$, ta có $-(b - 45) + b - 45 = 38 \Rightarrow 0 = 38$ (loại).

+ Nếu $b \geq 45$, ta có $2(b - 45) = 38 \Rightarrow b - 45 = 19 \Rightarrow b = 64$. (thỏa mãn)

$$(a; b) = (0; 64)$$

Vậy

Câu 91. (HSG 7 Tiên Du, Bắc Ninh, 2022 - 2023)

Tìm tất cả các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Lời giải

Với các số tự nhiên m và n thỏa mãn $2^m + 2021 = |n - 2020| + |n - 2022|$.

Ta xét ba trường hợp sau:

* Trường hợp 1: $n \geq 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = 2n - 4042$$

$$2^m - 2n = -6063$$

Vì -6063 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 3032$.

* Trường hợp 2: $2020 \leq n < 2022$, ta có:

$$2^m + 2021 = n - 2020 + 2022 - n$$

$$2^m + 2021 = 2$$

$$2^m = -2019 \text{ (vô lý)}$$

* Trường hợp 3: $n < 2020$, ta có:

$$2^m + 2021 = 4042 - 2n$$

$$2^m + 2n = 2021$$

Vì 2021 là số lẻ, $2n$ là số chẵn nên 2^m là số lẻ. Suy ra $m = 0 \Rightarrow n = 1010$

Vậy $m = 0; n = 3032$ hoặc $m = 0; n = 1010$.

Dạng 6. Sử dụng công thức tính tổng có quy luật.

Câu 1. (HSG 7 huyện Yên Định 2022 - 2023)

Tìm x biết: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$.

Lời giải

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{4044}{2023}$$

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$\frac{2}{1.2} + \frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{6065}{4046}$$

$$2. \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{4046}$$

$$1 - \frac{1}{x+1} = \frac{6065}{8092} \Rightarrow \frac{1}{x+1} = \frac{2027}{8092}$$

$$\Rightarrow x+1 = \frac{8092}{2027}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6065}{2027}$$

$$x = \frac{6065}{2027}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện An Nhơn 2021 - 2022)

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$$

Tìm giá trị của x biết:

Lời giải

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$$

Ta có

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2021}{2023}$$

$$2. \frac{1}{x+1} = \frac{2021}{2023}$$

$$2. \frac{1}{x+1} = \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = 1 - \frac{2021}{2023}$$

$$\frac{2}{x+1} = \frac{2}{2023}$$

$$x+1 = 2023$$

$$x = 2022$$

Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Như Thanh 2021 - 2022)

$$\frac{1}{9.10} + \frac{1}{10.11} + \frac{1}{11.12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{9}$$

Tìm số tự nhiên x biết:

Lời giải

$$2. \frac{1}{9 \cdot 10} + \frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{9}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9} - \frac{1}{x+1} = \frac{1}{18}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{18} = \frac{1}{x+1} \Rightarrow x+1=18 \Rightarrow x=17$$

(thỏa mãn)

Vậy $x=17$.

Câu 4. (HSG 7 huyện Hà Trung, Nghệ An 2021 - 2022)

Tim x biết $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

Lời giải

Ta có : $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2015}{2017}$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{2015}{2017}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} - \frac{1}{x+1} = \frac{2015}{2017}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{2(x+1)} = \frac{2015}{2017}$$

$$\Rightarrow 2017(x-1) = 2015(x+1)$$

$$2017x - 2017 = 2015x + 2025$$

$$2017x - 2015x = 2017 + 2025$$

$$2x = 4032$$

$$x = 2016$$

Vậy $x=2016$

Câu 5. (HSG 7 huyện Hưng Hà, Phạm Đôn Lễ, 2022 - 2023)

Tim x , biết: $\frac{2}{2 \cdot 3} + \frac{2}{3 \cdot 4} + \frac{2}{4 \cdot 5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$

Lời giải

$$\frac{2}{2.3} + \frac{2}{3.4} + \frac{2}{4.5} + \dots + \frac{2}{x(x+1)} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{2} \left(1 - \frac{1}{x+1} \right) = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{2(x+1)}{2(x+1)} - \frac{2}{2(x+1)} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow \frac{x-1}{x+1} = \frac{2022}{2024}$$

$$\Rightarrow x = 2023$$

Vậy $x = 2023$.

Câu 6. (HSG 7 huyện Mỹ Đức 2021-2022; trường Nguyễn Chí, huyện Đông Sơn 2017-2018)

Tìm số tự nhiên x biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$

Lời giải

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2x+1} \right) = \frac{49}{99}$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{98}{99}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2x+1} = \frac{1}{99}$$

$$\Rightarrow 2x+1=99 \Rightarrow 2x=98 \Rightarrow x=49$$

Vậy $x = 49$.

Câu 7. (HSG 7 huyện Kinh Môn, tỉnh Hải Dương 2022 - 2023)

Tìm x , biết: $\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$

Lời giải

$$\frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{(2x-1)(2x+1)} = \frac{99}{199}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \left(\frac{2}{1.3} + \frac{2}{3.5} + \frac{2}{5.7} + \dots + \frac{2}{(2x-1)(2x+1)} \right) = \frac{99}{199}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{1}{2x-1} - \frac{1}{2x+1} = \frac{99}{199}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{2x+1} = \frac{99}{199}$$

$$1 - \frac{1}{2x+1} = \frac{99.2}{199}$$

$$\frac{2x+1-1}{2x+1} = \frac{198}{199}$$

$$\frac{2x}{2x+1} = \frac{198}{199}$$

$$x = 99$$

Vậy $x = 99$.

Câu 8. (HSG 7 huyện Lạng Giang, tỉnh Bắc Giang 2022 - 2023)

Tim x biết: $\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} (|x|-1) = \frac{44}{45}$

Lời giải

$$\frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{2.3.4} + \dots + \frac{1}{8.9.10} (|x|-1) = \frac{44}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.2.3} + \frac{2}{2.3.4} + \dots + \frac{2}{8.9.10} (|x|-1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.2} - \frac{1}{2.3} + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{8.9} - \frac{1}{9.10} (|x|-1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.2} - \frac{1}{9.10} (|x|-1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{1.2} - \frac{1}{90} (|x|-1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow \frac{22}{45} (|x|-1) = \frac{88}{45}$$

$$\Rightarrow |x|-1 = 4$$

$$\Rightarrow |x| = 5$$

$$\Rightarrow x = \pm 5$$

Vậy $x = -5$; $x = 5$ là các giá trị cần tìm.

Câu 9. (HSG 7 huyện Yên Bình, Yên Bái 2022 - 2023)

Tim x , biết $x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022.2023$.

Lời giải

$$x + 2x + 3x + \dots + 2022x = 2022.2023$$

$$P \quad x.(1+2+3+\dots+2022) = 2022.2023$$

$$P \quad x \times \frac{(1+2022).2022}{2} = 2022.2023$$

$$P \quad x \times \frac{2023.2022}{2} = 2022.2023$$

$$P \quad x = 2.$$

$$\text{Vậy } x = 2.$$

Câu 10. (HSG 7 huyện Tam Dương 2021 - 2022)

$$\text{Tìm } x \text{ biết b) } \frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$$

Lời giải

$$\text{Ta có } \frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2021}{1} + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$$

$$\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = 2021 + \frac{2020}{2} + \frac{2019}{3} + \dots + \frac{1}{2021}$$

$$\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2021}{2} + \frac{2020}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2019}{3} + \frac{2018}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2017}{4} + \dots + \frac{2021}{2021} + \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{x} + 1$$

$$\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2021}{2} + \frac{2020}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2019}{3} + \frac{2018}{3} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2017}{4} + \dots + \frac{2021}{2021} + \frac{1}{2021} \cdot \frac{1}{x} + \frac{2022}{2022}$$

$$\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2022}{2} + \frac{2022}{3} + \frac{2022}{4} + \dots + \frac{2022}{2021} + \frac{2022}{2022}$$

$$\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \cdot \frac{1}{x} = 2022 \left(\frac{2021}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} \right)$$

$$P \quad x = 2022$$

$$\text{Vậy } x = 2022$$

Câu 11. (HSG 7 huyện Bá Thước, 2022 - 2023)

$$\text{Tìm } x, \text{ biết: } \frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

Lời giải

$$\frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2013}{1} + \frac{2012}{2} + \dots + \frac{2}{2012} + \frac{1}{2013}$$

$$P \quad \frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2012}{2} + 1 + \frac{2011}{3} + 1 + \dots + \frac{2}{2012} + 1 + \frac{1}{2013} + 1 + 1$$

$$P \quad \frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \cdot \frac{1}{x} = \frac{2014}{2} + \frac{2014}{3} + \dots + \frac{2014}{2012} + \frac{2014}{2013} + \frac{2014}{2014}$$

$$P \quad \frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2014} \cdot \frac{1}{x} = 2014 \left(\frac{2013}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2012} + \frac{1}{2013} + \frac{1}{2014} \right)$$

$$p \ x = 2014.$$

$$\text{Vậy } x = 2014.$$

Câu 12. (HSG 7 trường Lê Hồng Phong 2018-2019; trường Giao Tân 2016 - 2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34}$

Lời giải

$$2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n = 2^{n+34} \quad (1)$$

$$\text{Đặt } B = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n$$

$$2B = 2.(2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n)$$

$$2B = 2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1}$$

$$2B - B = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + (n-1)2^n + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + (n-1)2^{n-1} + n.2^n)$$

$$B = -2^3 - 2^4 - 2^5 - \dots - 2^n + n.2^{n+1} - 2.2^2$$

$$B = -(2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n) + n.2^{n+1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó } B = -(2^{n+1} - 2^3) + n.2^{n+1} - 2^3$$

Từ đó

$$= -2^{n+1} + 2^3 + n.2^{n+1} - 2^3 = -2^{n+1} + n.2^{n+1} = (n-1).2^{n+1}$$

$$\text{Từ (1) ta có: } (n-1)2^{n+1} = 2^{n+34}$$

$$2^{n+34} - (n-1).2^{n+1} = 0$$

$$2^{n+1} \cdot 2^{33} - (n-1)2^{n+1} = 0$$

$$2^{33} - n + 1 = 0$$

$$n = 2^{33} + 1$$

$$\text{Vậy } n = 2^{33} + 1$$

Câu 13. (HSG 7 huyện Châu Đức 2022 - 2023; huyện Tiên Hải 2016 - 2017)

Tìm số tự nhiên n thỏa mãn điều kiện: $2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n = 2^{n+11}$

Lời giải

$$\text{Đặt } S = 2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n$$

$$p \ 2S - S = (2.2^3 + 3.2^4 + 4.2^5 + \dots + n.2^{n+1}) - (2.2^2 + 3.2^3 + 4.2^4 + \dots + n.2^n)$$

$$p \ S = n.2^{n+1} - 2^3 - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Đặt } T = 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n$$

$$\text{Þ } 2T - T = 2^4 + 2^5 + \dots + 2^n + 2^{n+1} - (2^3 + 2^4 + \dots + 2^{n-1} + 2^n)$$

$$\text{Þ } T = 2^{n-1} - 2^3$$

$$\text{Khi đó ta được: } S = n \cdot 2^{n+1} - 2^3 - 2^{n-1} + 2^3 = (n-1)2^{n+1}$$

$$\text{Þ } (n-1) \cdot 2^{n+1} = 2^{n+1} \text{ Þ } n-1 = 2^{10} \text{ Þ } n = 2^{10} + 1 = 1025$$

$$\text{Vậy } n = 1025$$

Câu 14. (HSG 7 huyện Quế Sơn 2018 - 2019) Tìm x , biết: $\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdot \frac{5}{12} \cdot \dots \cdot \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 2^x$

Lời giải

$$\frac{4 \cdot 4^5 \cdot 6 \cdot 6^5}{3 \cdot 3^5 \cdot 2 \cdot 2^5} = 2^x \text{ Þ } \frac{4^6 \cdot 6^6}{3^6 \cdot 2^6} = 2^x$$

$$\text{Þ } \frac{2^6 \cdot 3^6}{3^6 \cdot 2^6} = 2^x \text{ Þ } 2^{12} = 2^x \text{ Þ } x = 12$$

Câu 15. (HSG 7 huyện Thái Thụy, 2017 - 2018)

$$\text{Tìm } x \text{ thỏa mãn: } \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \times \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 2^x$$

Lời giải

$$\frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \times \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = \frac{4 \cdot 4^5}{3 \cdot 3^5} \times \frac{6 \cdot 6^5}{2 \cdot 2^5} = \frac{4^6}{3^6} \times \frac{6^6}{2^6} = \frac{2^6 \cdot 3^6}{3^6 \cdot 2^6} = 2^{12}$$

$$\text{Þ } 2^x = 2^{12}$$

$$x = 12$$

Câu 16. (HSG 7 trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019; huyện Tam Dương 2017 - 2018)

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$$

Cho

$$\text{Tìm số nguyên dương } x \text{ để } B = 115$$

Lời giải

$$B = 1 + \frac{1}{2}(1+2) + \frac{1}{3}(1+2+3) + \frac{1}{4}(1+2+3+4) + \dots + \frac{1}{x}(1+2+3+\dots+x)$$

$$= 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 3}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{4 \cdot 5}{2} + \dots + \frac{1}{x} \cdot \frac{x(x+1)}{2}$$

$$= 1 + \frac{3}{2} + \frac{4}{2} + \dots + \frac{x+1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot (2+3+4+\dots+(x+1))$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2} = 115$$

$$\text{Đề } B = 115 \text{ thì } \frac{1}{2} \cdot \frac{x(x+3)}{2} = 115 \Rightarrow x(x+3) = 460$$

Do x nguyên dương nên x và $x+3$ là ước dương của 460

$$\Rightarrow x = 20$$

Vậy $x = 20$.

Câu 17. (HSG 7 huyện Hiệp Hòa 2016 - 2017)

Tìm x biết:

$$\text{a) } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$$

$$\text{b) } \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$$

Lời giải

$$\text{a) } \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{4}{10} \cdots \frac{30}{62} \cdot \frac{31}{64} = 4^x$$

$$\frac{1.2.3 \cdots 30.31}{1.2.3.4 \cdots 30.31.2^{30}.2^6} = 2^{2x}$$

$$\frac{1}{2^{36}} = 2^{2x}$$

$$2^{-36} = 2^{2x}$$

$$\Rightarrow 2x = -36$$

$$\Rightarrow x = -18$$

Vậy $x = -18$.

$$\text{b) } \frac{4^5 + 4^5 + 4^5 + 4^5}{3^5 + 3^5 + 3^5} \cdot \frac{6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5 + 6^5}{2^5 + 2^5} = 8^x$$

$$\frac{4.4^5}{3.3^5} \cdot \frac{6.6^5}{2.2^5} = 8^x$$

$$\frac{4^6}{3^6} \cdot \frac{6^6}{2^6} = 2^{3x}$$

$$\frac{2^6.6^6}{3^6.2^6} = 2^{3x}$$

$$2^{3x} = 4^6$$

$$\Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4$$

Vậy $x = 4$.

Câu 18. (HSG 7 trường Hồng Đà, huyện Tam Nông 2015 - 2016)

Cho $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$. Tìm số tự nhiên n biết rằng $2A + 3 = 3^n$.

Lời giải

Ta có: $A = 3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015}$

$$\text{Đ } 3A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016}$$

$$\text{Đ } 3A - A = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2016} - (3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{2015})$$

$$\text{Đ } 2A = 3^{2016} - 3$$

Do đó $2A + 3 = 3^n$ trở thành:

$$3^{2016} - 3 + 3 = 3^n \text{ Đ } 3^{2016} = 3^n \text{ Đ } n = 2016$$

Vậy $n = 2016$.

Câu 19. (HSG 7 huyện Thanh Miện 2022 - 2023)

Tìm cặp số tự nhiên x, y trong đó y là chữ số, biết rằng:
 $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

Lời giải

Ta có $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + x - 1 = \overline{yyy} - x$

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (x - 1) + x = \overline{yyy}$$

$$\frac{(1+x)x}{2} = y.111$$

$$(1+x)x = 222.y \text{ Đ } (1+x)x = 2.3.37.y$$

Vì $(1+x)x$ là tích hai số tự nhiên liên tiếp, 37 là số nguyên tố, y là chữ số nên $y = 6$

$$\text{Đ } x = 36$$

Vậy $x = 36; y = 6$.

Câu 20. (HSG 7 huyện Hưng Hà 2022 - 2023).

Tìm x biết: $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 10x$

Lời giải

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x \quad (1)$$

Ta thấy $\left| x + \frac{1}{2} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{6} \right| \geq 0; \left| x + \frac{1}{12} \right| \geq 0; \dots; \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$

nên $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| \geq 0$

mà $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{9900} \right| = 100x$

suy ra $100x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0$

$$\Rightarrow \left| x + \frac{1}{2} \right| = x + \frac{1}{2}; \left| x + \frac{1}{6} \right| = x + \frac{1}{6}; \left| x + \frac{1}{12} \right| = x + \frac{1}{12}; \left| x + \frac{1}{9900} \right| = x + \frac{1}{9900} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + \dots + x + \frac{1}{9900} = 100x$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{1.2} + x + \frac{1}{2.3} + x + \frac{1}{3.4} + \dots + x + \frac{1}{99.100} = 100x$$

$$\Rightarrow 99x + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} = 100x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{100} = \frac{99}{100} \quad (\text{tmđk})$$

Vậy $x = \frac{99}{100}$

Câu 21. (HSG 7 trường Minh Khai 2022 - 2023; huyện Hoàng Hóa 2016 - 2017)

Tìm x, biết: $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$

Lời giải

Ta thấy vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải $\geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0$

Với $x^3 \geq 0$, $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 11x$ trở thành:

$$x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 11x$$

$$\Rightarrow x = 1 - \frac{1}{11} = \frac{10}{11} \quad (\text{thỏa mãn})$$

Vậy $x = \frac{10}{11}$.

Câu 22. (HSG 7 huyện Nho Quan 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$

Lời giải

Nhận xét: Vế trái của đẳng thức luôn ≥ 0 nên vế phải ≥ 0

Suy ra $12x^3 \geq 0 \Rightarrow x^3 \geq 0$

$$\left| x + \frac{1}{2} \right| + \left| x + \frac{1}{6} \right| + \left| x + \frac{1}{12} \right| + \left| x + \frac{1}{20} \right| + \dots + \left| x + \frac{1}{110} \right| = 12x$$

$$\Rightarrow x + \frac{1}{2} + x + \frac{1}{6} + x + \frac{1}{12} + x + \frac{1}{20} + \dots + x + \frac{1}{110} = 12x$$

$$(x + x + x + \dots + x) + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots + \frac{1}{110} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.3} + \frac{1}{3.4} + \dots + \frac{1}{10.11} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} = 12x$$

$$10x + \frac{1}{11} = 12x \Rightarrow 2x = \frac{10}{11} \Rightarrow x = \frac{5}{11}$$

$$x = \frac{5}{11}$$

Vậy .

Câu 23. (HSG 7 huyện Nghi Lộc; huyện Cẩm Thủy, tỉnh Thanh Hoá 2022 - 2023)

Tìm x biết : $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| = 101x$

Lời giải

Vì $\left| x + \frac{1}{101} \right| + \left| x + \frac{2}{101} \right| + \left| x + \frac{3}{101} \right| + \dots + \left| x + \frac{100}{101} \right| \geq 0$

Suy ra $x \geq 0$

$$x + \frac{1}{101} + x + \frac{2}{101} + x + \frac{3}{101} + \dots + x + \frac{100}{101} = 101x$$

$$100x + \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101} = 101x$$

$$x = \frac{1}{101} + \frac{2}{101} + \frac{3}{101} + \dots + \frac{100}{101}$$

$$x = \frac{1}{101} (1 + 2 + 3 + \dots + 100) \Rightarrow x = 50$$

Vậy $x = 50$.

Câu 24. (HSG 7 huyện Cẩm Khê, 2022 - 2023)

Tìm x biết $\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x$.

Lời giải

Nhận xét: vế trái của biểu thức luôn dương nên vế phải lớn hơn 0 suy ra $12x < 0$ hay $x < 0$.

Với $x < 0$ ta có:

$$\left| x - \frac{1}{3} \right| + \left| x - \frac{1}{15} \right| + \left| x - \frac{1}{35} \right| + \left| x - \frac{1}{63} \right| + \dots + \left| x - \frac{1}{483} \right| = -12x$$

$$\Rightarrow -x + \frac{1}{3} - x + \frac{1}{15} - x + \frac{1}{35} - x + \frac{1}{63} - \dots - x + \frac{1}{483} = -12x$$

$$P = 11x + \frac{1}{1.3} + \frac{1}{3.5} + \frac{1}{5.7} + \dots + \frac{1}{21.23} = 12x$$

$$P = 11x + \frac{1}{2.3} - \frac{1}{23.25} = 12x \Rightarrow x = \frac{-11}{23} \quad (\text{thỏa mãn})$$

$$x = \frac{-11}{23}$$

Vậy .

Câu 25. (HSG 7 huyện Quan Sơn, 2022 - 2023)

Tìm x biết: $\left|x + \frac{1}{1 \times 3}\right| + \left|x + \frac{1}{5 \times 7}\right| + \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397 \times 401}\right| = 101x$

Lời giải

Ta có $\left|x + \frac{1}{1 \times 3}\right|^3 \geq 0; \left|x + \frac{1}{5 \times 7}\right|^3 \geq 0; \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right|^3 \geq 0; \dots;$

Nên $\left|x + \frac{1}{1 \times 3}\right| + \left|x + \frac{1}{5 \times 7}\right| + \left|x + \frac{1}{9 \times 13}\right| + \dots + \left|x + \frac{1}{397 \times 401}\right| \geq 0 \Rightarrow 101x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

Vì $x \geq 0 \Rightarrow x + \frac{1}{1 \times 3} > 0; x + \frac{1}{5 \times 7} > 0; \dots; x + \frac{1}{397 \times 401} > 0$

Nên ta có: $x + \frac{1}{1 \times 3} + x + \frac{1}{5 \times 7} + x + \frac{1}{9 \times 13} + \dots + x + \frac{1}{397 \times 401} = 101x$

$$\Rightarrow 100x + \frac{1}{1 \times 3} + \frac{1}{5 \times 7} + \dots + \frac{1}{397 \times 401} = 101x \Rightarrow 100x + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{401}\right) = 101x \Rightarrow x = \frac{100}{401}$$

$$x = \frac{100}{401}$$

Vậy .

Câu 26. (HSG 7 huyện Hưng Hà, 2022 - 2023)

Tìm x , biết:

$$\left|x + \frac{1}{2021}\right| + \left|x + \frac{2}{2021}\right| + \left|x + \frac{3}{2021}\right| + \dots + \left|x + \frac{2020}{2021}\right| = 2021x.$$

Lời giải

Điều kiện $x \geq 0$ suy ra:

$$x + \frac{1}{2021} + x + \frac{2}{2021} + x + \frac{3}{2021} + \dots + x + \frac{2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{1+2+3+\dots+2020}{2021} = 2021x$$

$$\Rightarrow 2020x + \frac{2020 \cdot 2021}{2 \cdot 2021} = 2021x \Rightarrow x = 1010.$$

Vậy $x = 1010$.

Câu 27. (HSG 7 huyện Trục Ninh 2020 - 2021)

Tìm x nguyên biết: $|x-1| + |x-2| + |x-3| + \dots + |x-90| = 2025$

Lời giải

Viết lại: $|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|x-46|+\dots+|x-90|=2025$

$$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\dots+|x-45|+|46-x|+\dots+|90-x|=2025$$

Với mọi giá trị của x , ta có:

$$|x-1| \geq x-1; |x-2| \geq x-2; \dots; |x-45| \geq x-45;$$

$$|46-x| \geq 46-x; |47-x| \geq 47-x; \dots; |90-x| \geq 90-x$$

$$\Rightarrow VT = |x-1|+|x-2|+\dots+|90-x| \geq x-1+x-2+\dots+90-x$$

$$\Rightarrow VT \geq (46+47+\dots+90)-(1+2+3+\dots+45)$$

$$\Rightarrow VT \geq 2025$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi

$$\left. \begin{array}{l} |x-1|=x-1 \\ |x-2|=x-2 \\ \dots \\ |x-45|=x-45 \\ |x-46|=46-x \\ |x-47|=47-x \\ \dots \\ |x-90|=90-x \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x-1 \geq 0 \\ x-2 \geq 0 \\ \dots \\ x-45 \geq 0 \\ x-46 \leq 0 \\ x-47 \leq 0 \\ \dots \\ x-90 \leq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} x \geq 1 \\ x \geq 2 \\ \dots \\ x \geq 45 \\ x \leq 46 \\ x \leq 47 \\ \dots \\ x \leq 90 \end{array} \right\} \Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

$$\Rightarrow 45 \leq x \leq 46$$

Mà x là số nguyên $\Rightarrow x \in [45; 46]$

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>