**SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO KỲ THI TUYỂN SINH LỚP 10 NĂM HỌC 2023**

 **BÌNH PHƯỚC Môn thi: TOÁN (CHUYÊN)**

 **ĐỀ CHÍNH THỨC Thời gian làm bài: 150 phút**

 ***(Đề thi gồm có 01 trang)*** Ngày thi: 07/06/2023

**Câu 1. (2,0 điểm)** Cho biểu thức *P* = $\frac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\geq 0, a\ne 1$.

a) Rút gọn $P.$

b) Tìm $a$ nguyên để biểu thức $P$ nhận giá trị nguyên.

**Câu 2. (4.0 điểm)**

a) Cho phương trình $5x^{2}+mx-28=0$, với $m$ là tham số. Tìm $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x\_{1}, x\_{2}$ phân biệt thỏa mãn $5x\_{1}+2x\_{2}=1.$

b) Giải phương trình $\left(x+4\right)\left(x-2\right)=2\sqrt{x^{2}+2x-5.}$

c) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}2x^{2}+y^{2}-3xy+7x-5y+6=0 \\4x^{2}-y^{2}+9x+6=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}\end{array}\right.$

**Câu 3. (1.0 điểm)**

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^{2}+xy+y^{2}=x^{2}y^{2}.$

b) Cho $p $ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

**Câu 4. (2.0 điểm)**

Cho đoạn thẳng *AB* và *C* là điểm nằm trên đoạn *AB* sao cho *BC > AC*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *AB*, vẽ đường tròn đường kính *AB* và nửa đường tròn đường kính *BC*. Lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đường kính *BC* $(m\ne B, M\ne C)$. Kẻ *MH* vuông góc với *BC* $(H\in BC)$, đường thẳng *MH* cắt nửa đường tròn đường kính *AB* tại *K*. Hai đường thẳng *AK* và *CM* cắt nhau tại *E*.

a) Chứng minh tứ giác *BMKE* nội tiếp và $BE^{2}=BA.BC$

b) Từ *C* kẻ *CN* vuông góc với *AB* (*N* thuộc đường tròn đường kính *AB*), gọi *P* là giao điểm của *NK* và *CE*. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác *BNE* và *PNE* cùng nằm trên đường thẳng *BP*.

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Cột | **1** | **2** | **3** | **4** | **…** | **2023** |
| **1**Hàng | 0 | 1 | 5 | 6 |  |  |
| **2** | 2 | 4 | 7 | 13 |  |  |
| **3** | 3 | 8 | 12 |  |  |  |
| **4** | 9 | 11 |  |  |  |  |
| **5** | 10 |  |  |  |  |  |
| **…** |  |  |  |  |  |  |
| **2023** |  |  |  |  |  |  |

**Câu 5. (1.0 điểm)**

a) Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới;

các cột được đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp 0, 1, 2,… vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao?

b) Cho $a, b, c$ là các số dương. Chứng minh:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{a+b+c}{4}$$

**Hết**

**Chú ý:** *Thí sinh không được sử dụng tài liệu, giám thị coi thi không giải thích gì thêm.*

**HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ THI VÀO CHUYÊN TOÁN TỈNH BÌNH PHƯỚC NĂM 2023**

**GV: Th.S Phạm Văn Quý – Tell: 0943.911.606**

**Câu 1. (2,0 điểm)** Cho biểu thức *P* = $\frac{3a+\sqrt{9a}-3}{a+\sqrt{a}-2}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}+\frac{\sqrt{a}-2}{1-\sqrt{a}}$ với $a\geq 0, a\ne 1$.

a) Rút gọn $P.$

**Giải**

Ta có *P* = $\frac{3a+3\sqrt{a}-3}{\left(\sqrt{a}-1\right)\left(\sqrt{a}+2\right)}-\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}+2}-\frac{\sqrt{a}-2}{\sqrt{a}-1}=\frac{3a+3\sqrt{a}-2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}-\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}-1)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}-\frac{(\sqrt{a}+2)(\sqrt{a}-2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2}$

= $\frac{3a+3\sqrt{a}-3-\left(a-1\right)-(a-4)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}=\frac{a+3\sqrt{a}+2}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}=\frac{(\sqrt{a}+1)(\sqrt{a}+2)}{(\sqrt{a}-1)(\sqrt{a}+2)}=\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}$

b) Tìm $a$ nguyên để biểu thức $P$ nhận giá trị nguyên.

**Giải**

Ta có *P* = $\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}=\frac{\left(\sqrt{a}-1\right)+2}{\sqrt{a}-1}=1+\frac{2}{\sqrt{a}-1}$

Để *P* nhận giá trị nguyên thì $\frac{2}{\sqrt{a}-1}\in Z $ $⇔\sqrt{a}-1\in Ư\left\{2\right\}=\left\{-2;-1;1;2\right\}$

Trường hợp 1: $\sqrt{a}-1=-2⇔\sqrt{a}=-1$ (vô nghiệm)

Trường hợp 2: $\sqrt{a}-1=-1⇔\sqrt{a}=0⇔a=0$ (nhận)

Trường hợp 3: $\sqrt{a}-1=1⇔\sqrt{a}=2⇔a=4$ (nhận)

Trường hợp 4: $\sqrt{a}-1=2⇔\sqrt{a}=3⇔a=9$ (nhận)

Vậy để $P$ nhận giá trị nguyên thì $a\in \left\{0;4;9\right\}.$

**Câu 2. (4.0 điểm)**

a) Cho phương trình $5x^{2}+mx-28=0$, với $m$ là tham số. Tìm $m$ để phương trình đã cho có hai nghiệm $x\_{1}, x\_{2}$ phân biệt thỏa mãn $5x\_{1}+2x\_{2}=1.$

b) Giải phương trình $\left(x+4\right)\left(x-2\right)=2\sqrt{x^{2}+2x-5.}$

**Giải**

Phương trình có $∆=m^{2}-4.5.\left(-28\right)=m^{2}+560>0 ∀m⇒$ Phương trình luôn có 2 nghiệm phân biệt $∀m$

Theo định lí Vi-et ta có: $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=-\frac{m}{5} \left(1\right)\\x\_{1}x\_{2}=-\frac{28}{5} \left(2\right)\end{array}\right.$

Kết hợp (1) và $5x\_{1}+2x\_{2}=1$ ta có hệ:

$$\left\{\begin{array}{c}5x\_{1}+2x\_{2}=1\\x\_{1}+x\_{2}=-\frac{m}{5}\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}5x\_{1}+2x\_{2}=1 \\5x\_{1}+5x\_{2}=-m\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}5x\_{1}+2x\_{2}=1\\3x\_{2}=-m-1\end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}5x\_{1}+2.\frac{=m-1}{3}=1\\x\_{2}=\frac{-m-1}{3} \end{array}⇔\left\{\begin{array}{c}x\_{1}=\frac{2m+5}{15}\\x\_{2}=\frac{-m-1}{3}\end{array}\right.\right.\right.\right.$$

Thay $x\_{1},x\_{2}$ tìm được vào (2) ta có: $\frac{2m+5}{15}.\frac{-m-1}{3}=-\frac{28}{5}$ $⇔2m^{2}+7m-247=0⇔\left[\begin{array}{c}m=\frac{19}{2}\\m=-13\end{array}\right.$ (n)

Kết luận: Để thỏa mãn bài toán thì $m\in \left\{-13;\frac{19}{2}\right\}$

b) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}2x^{2}+y^{2}-3xy+7x-5y+6=0 \\4x^{2}-y^{2}+9x+6=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}\end{array}\right.$

**Giải**

Điều kiện: $x^{2}+2x-5\geq 0$

Ta có phương trình $⇔x^{2}+2x-8=2\sqrt{x^{2}+2x-5}⇔\left(x^{2}+2x-5\right)-3=2\sqrt{x^{2}+2x-5}$

Đặt $t=\sqrt{x^{2}+2x-5}, t\geq 0$ ta có phương trình trở thành: $t^{2}-3=2t ⇔t^{2}-2t-3=0⇔\left[\begin{array}{c}t=-1 \left(l\right)\\t=3 \left(n\right)\end{array}\right.$

Với $t=3$ ta có $\sqrt{x^{2}+2x-5}=3⇔x^{2}+2x-5=9⇔x^{2}+2x-14=0⇔\left[\begin{array}{c}x=-1-\sqrt{15} (n)\\x=-1+\sqrt{15} (n)\end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{-1-\sqrt{15;}-1+\sqrt{15}\right\}.$

c) Giải hệ phương trình: $\left\{\begin{array}{c}2x^{2}+y^{2}-3xy+7x-5y+6=0 \\4x^{2}-y^{2}+9x+6=\sqrt{2x+y+2}+\sqrt{x+4y+1}\end{array}\right.$

**Giải**

* Điều kiện: $\left\{\begin{array}{c}2x+y+2\geq 0\\x+4y+1\geq 0\end{array}\right.$
* Phương trình (1) $⇔\left(2x^{2}-xy+3x\right)+\left(-2xy+y^{2}-3y\right)+\left(4x-2y+6\right)=0$

$$⇔x\left(2x-y+3\right)-y\left(2x-y+3\right)+2\left(2x-y+3\right)=0$$

$$⇔\left(x-y+2\right)\left(2x-y+3\right)=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}x-y+2=0 \\2x-y+3=0\end{array}\right.$$

* Trường hợp 1; $x-y+2=0⇔y=x+2,$ thế vào phương trình (2) ta có:

$$4x^{2}-\left(x+2\right)^{2}+9x+9=\sqrt{2x+x+2+2}+\sqrt{x+4\left(x+2\right)+1}$$

$$⇔3x^{2}+5x+5=\sqrt{3x+4}+\sqrt{5x+9}$$

$$⇔3x^{2}+3x=\left[\sqrt{3x+4}-\left(x+2\right)\right]+\left[\sqrt{5x+9}-\left(x+3\right)\right]$$

$$⇔3\left(x^{2}+x\right)=\frac{3x+4-\left(x+2\right)^{2}}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{5x+9-\left(x+3\right)^{2}}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}$$

$$⇔3\left(x^{2}+x\right)=\frac{-x^{2}-x}{\sqrt{3x+4}+\left(x+2\right)}+\frac{-x^{2}-x}{\sqrt{5x+9}+\left(x+3\right)}$$

$$⇔\left(x^{2}+x\right)\left[3+\frac{1}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{1}{\sqrt{5x+9}+(x+3}\right]=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}x^{2}+x=0 \\3+\frac{1}{\sqrt{3x+4}+\left(x+2\right)}+\frac{1}{\sqrt{5x+9}+\left(x+3\right)}=0\end{array}\right.$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}x=0 \\x=-1 \\3+\frac{1}{\sqrt{3x+4}+(x+2)}+\frac{1}{\sqrt{5x+9}+(x+3)}=0 (\*)\end{array}\right.$$

Từ điều kiện ta có $x\geq -\frac{4}{3}⇒x+2\geq \frac{2}{3}$ và $x+3\geq \frac{5}{3}$ nên phương trình (\*) có vế trái luôn dương nên phương trình (\*) vô nghiệm

Với $x=0$ ta có $y=0+2=2$ (thỏa mãn điều kiện)

Với $x=-1$ ta có $y=-1+2=1$ (thỏa mãn điều kiện)

* Trường hợp 2: $2x-y+3=0⇔y=2x+3$, thế vào phương trình (2) ta có:

$$4x^{2}-\left(2x+3\right)^{2}+9x+9=\sqrt{2x+2x+3+2}+\sqrt{x+4\left(2x+3\right)+1}$$

$$⇔-3x=\sqrt{4x+5}+\sqrt{9x+13}$$

$$⇔-3x-3=\left(\sqrt{4x+5}-1\right)+\left(\sqrt{9x+13}-2\right)$$

$$⇔\frac{4x+4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{9x+9}{\sqrt{9x+13}+2}+3x+3=0$$

$$⇔\left(x+1\right)\left(\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{1}{\sqrt{9x+13}+2}+3\right)=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}x=-1 \\\frac{4}{\sqrt{4x+5}+1}+\frac{1}{\sqrt{9x+13}+2}+3=0 (\*\*)\end{array}\right.$$

Ta thấy phương trình (\*\*) có vế trái luôn dương nên phương trình (\*\*) vô nghiệm.

Với $x=-1$ ta có $y=2.\left(-1\right)+3=1$ (thỏa mãn điều kiện)

* Kết luận: Hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=2\end{array}\right.;\left\{\begin{array}{c}x=-1\\y=1 \end{array}\right.$

**Câu 3. (1.0 điểm)**

a) Giải phương trình nghiệm nguyên: $x^{2}+xy+y^{2}=x^{2}y^{2}.$

**Giải**

Ta có $x^{2}+xy+y^{2}=x^{2}y^{2}⇔x^{2}+2xy+y^{2}=x^{2}y^{2}+xy⇔\left(x+y\right)^{2}=xy(xy+1)$

Vì $(xy(xy+1)$ là tích của hai số nguyên liên tiếp và $\left(x+y\right)^{2}$ là một số chính phương.

$⇒\left\{\begin{array}{c}\left(x+y\right)^{2}=0 \\xy\left(xy+1\right)=0\end{array}⇔\right.$ $\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\\left[\begin{array}{c}xy=0 \\xy=-1\end{array}\right.\end{array}⇔\right.$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\xy=0 \end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{c}x+y=0\\xy=-1 \end{array}\right.\end{array}⇔\right.$ $\left[\begin{array}{c}\left\{\begin{array}{c}x=0\\y=0\end{array} (n)\right.\\\left\{\begin{array}{c}x=1\\y=-1\end{array} (n)\right.\\\left\{\begin{array}{c}x=-1\\y=1\end{array} (n)\right.\end{array}\right.$

Vậy phương trình có tập nghiệm là $S=\left\{\left(0;0\right);\left(1;-1\right);\left(-1;1\right)\right\}$

b) Cho $p $ là số nguyên tố lớn hơn 3. Chứng minh $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 24.

**Giải**

Ta có $\left(p-1\right)\left(p+1\right)=p^{2}-1$ và $p^{2}$ là số chính phương nên $p^{2}$ chia 3 dư 0 hoặc 1, mà $p$ là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p$ không chia hết cho 3 $⇒p^{2}$ không chia hết cho 3 nghĩa là $p^{2}$ chia 3 dư 1

$⇒p^{2}-1\vdots 3$ (\*)

Ta có $p$ là số nguyên tố lớn hớn 3 nên $p$ lẻ suy ra $(p-1)(p+1)$ là tích của 2 số chẵn liên tiếp suy ra tích $(p-1)(p+1)$ chia hết cho 8 (\*\*)

Từ (\*) và (\*\*) kết hợp với (3;8)⇒$\left(p-1\right)\left(p+1\right) $chia hết cho 24 .

**Câu 4. (2.0 điểm)**

Cho đoạn thẳng *AB* và *C* là điểm nằm trên đoạn *AB* sao cho *BC > AC*. Trên cùng một nửa mặt phẳng bờ là đường thẳng *AB*, vẽ đường tròn đường kính *AB* và nửa đường tròn đường kính *BC*. Lấy điểm *M* thuộc nửa đường tròn đường kính *BC* $(m\ne B, M\ne C)$. Kẻ *MH* vuông góc với *BC* $(H\in BC)$, đường thẳng *MH* cắt nửa đường tròn đường kính *AB* tại *K*. Hai đường thẳng *AK* và *CM* cắt nhau tại *E*.

a) Chứng minh tứ giác *BMKE* nội tiếp và $BE^{2}=BA.BC$

b) Từ *C* kẻ *CN* vuông góc với *AB* (*N* thuộc đường tròn đường kính *AB*), gọi *P* là giao điểm của *NK* và *CE*. Chứng minh rằng tâm đường tròn nội tiếp của các tam giác *BNE* và *PNE* cùng nằm trên đường thẳng *BP*.

**Giải**



a) Chứng minh tứ giác *BMKE* nội tiếp và $BE^{2}=BA.BC$

Ta có: $\hat{AKB}=90^{0}$(góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

⇒$\hat{BKE}=180^{0}-\hat{AKB}=180^{0}-90^{0}=90^{0}$

Ta có: $\hat{BMC}=90^{0}$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn đường kính AB)

⇒$\hat{BME}=180^{0}-\hat{BMC}=180^{0}-90^{0}=90^{0}$

Do đó: $\hat{AKB}=\hat{BME }=90^{0}$ cùng nhìn cạnh BE của tứ giác *BMKE*

⇒Tứ giác *BMKE* nội tiếp

⇒$\hat{BEC}=\hat{BKM} $(góc nội tiếp cùng chắn cung BM)

Lại có: $\hat{BAK}=\hat{BKM} $(cùng phụ $\hat{AKH}$)

⇒$\hat{BEC}=\hat{BAK}$

Xét Δ*BEC* và Δ*BAE*

có $\hat{BEC}=\hat{BAK}$

$\hat{EBA}$chung

⇒Δ*BEC* ~ Δ*BAE* (g-g)

⇒$\frac{BE}{BA}=\frac{BC}{BE}$⇒$BE^{2}=BA.BC$đpcm)

b) Xét tam giác *ABN* vuông tại *N* có $BN^{2}=BA.BC$

Từ câu (a) ta có $BE^{2}=BA.BC$

⇒$BN^{2}=BE^{2}$

⇒$BN=BE$

Mặt khác: $\hat{BEC}=\hat{BAK}=\hat{BNP}$ suy ra $\hat{PNE}=\hat{PEN}$

⇒$∆PNE$cân tại *P*

⇒$PN=PE$(2)

Từ (1) và (2) suy ra *BP* là đường trung trực của *NE*.

Vậy tâm đường tròn nội tiếp các tam giác *BNE* và *PNE* cùng nằm trên đường thẳng *BP*.

**Câu 5. (1.0 điểm)**

a) Cho một bảng gồm 2023 hàng, 2023 cột. Các hàng được đánh số từ 1 đến 2023 từ trên xuống dưới; các cột được đánh số từ 1 đến 2023 từ trái qua phải. Viết các số tự nhiên liên tiếp 0, 1, 2,… vào các ô của bảng theo đường chéo zíc-zắc (như hình vẽ bên). Hỏi số 2024 được viết ở hàng nào, cột nào? Vì sao?

|  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Cột | **1** | **2** | **3** | **4** | **…** | **2023** |
| **1**Hàng | 0 | 1 | 5 | 6 |  |  |
| **2** | 2 | 4 | 7 | 13 |  |  |
| **3** | 3 | 8 | 12 |  |  |  |
| **4** | 9 | 11 |  |  |  |  |
| **5** | 10 |  |  |  |  |  |
| **…** |  |  |  |  |  |  |
| **2023** |  |  |  |  |  |  |

**Giải**

Theo yêu cầu bài toán ta thấy:

* Đường chéo thứ 1 đánh một số 0.
* Đường chéo thứ 2 đánh hai số 1, 2.
* Đường chéo thứ 3 đánh ba số 3, 4, 5.

….

* Đường chéo thứ n đánh n số (ta chưa cần biết cụ thể các số nào)

Nhận thấy trên mỗi đường chéo luôn viết nhiều hơn 1 số nên số 2024 phải ghi ở vị trí đường chéo *n* và *n* > 2023.

Khi *n* > 2023 ta có tổng các số đã viết là: 1+ 2 + 3+ …+ *n* = $\frac{n(n+1)}{2}$

Đến đây ta chỉ cần đi tìm 1 đường chéo liền trước của đường chéo chứa số 2024.

Dễ thấy $\frac{63.64}{2}$ = 2016 < 2024. Điều này có nghĩa là ở đường chéo thứ 63 sẽ có 63 số và số lớn nhất được ghi sẽ là 2015 (vì bắt đầu là số 0 nên số thứ 2016 sẽ là 2015). Vậy ở đường chéo thứ 64 sẽ có 64 số là: 2016; 2017; …; 2079, trong các số này có chứa số 2024.

Từ các đường chéo ban đầu ta thấy ở đường chéo thứ 64 các số 2017; 2018; …; 2080 sẽ được ghi giảm dần tính từ trên xuống dưới. Hàng đầu tiên sẽ là số 2016 nên số 2024 sẽ ở hàng thứ 2024 - 2016 + 1 = 9, cột chứa số 2024 sẽ là 64 - 9 + 1 = 56.

Vậy số 2024 được viết ở hàng 9 và cột 56.

b) Cho $a, b, c$ là các số dương. Chứng minh:$ \frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{a+b+c}{4}$

**Giải**

Ta luôn có bất đẳng thức: $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq \frac{4}{a+b},$ với mọi $a,b,c>0$ (\*)

Thật vậy (\*) $⇔\left(a+b\right)^{2}\geq 4ab⇔\left(a-b\right)^{2}\geq 0$ (luôn đúng). Dấu “=” xảy ra khi $a=b$.

Áp dụng (\*) ta có: $\frac{1}{2a+b+c}=\frac{1}{4}.\frac{4}{\left(a+b\right)+(a+c)}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{a+c}\right)⇒\frac{bc}{2a+b+c}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}\right)$

Tương tự, ta có $\frac{ac}{2b+a+c}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}\right)$ và $\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right).$

Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên ta có:

$$\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{1}{4}\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{bc}{a+c}+\frac{ac}{b+c}+\frac{ac}{b+a}+\frac{ab}{a+c}+\frac{ab}{b+c}\right)$$

$$⇔\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{1}{4}\left[\left(\frac{bc}{a+b}+\frac{ca}{a+b}\right)+\left(\frac{bc}{a+c}+\frac{ab}{a+c}\right)+\left(\frac{ca}{b+c}+\frac{ab}{b+c}\right)\right]$$

$$⇔\frac{bc}{2a+b+c}+\frac{ca}{2b+c+a}+\frac{ab}{2c+a+b}\leq \frac{a+b+c}{4}, (đpcm)$$

Dấu “=” xảy ra $⇔a=b=c.$

**Hết**