

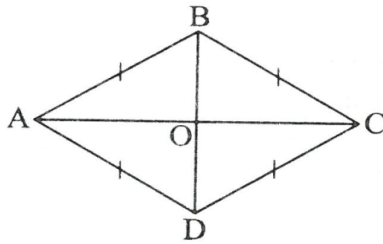
Chương 1
Chuyên đề 6

HÌNH THOI VÀ HÌNH VUÔNG

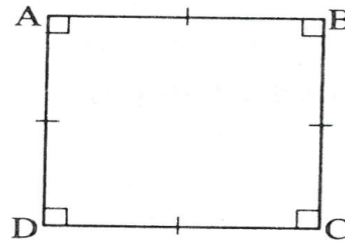
A. Kiến thức cần nhớ

1. Định nghĩa:

- Hình thoi là tứ giác có bốn cạnh bằng nhau (h.6.1).
- Hình vuông là tứ giác có bốn góc vuông và có bốn cạnh bằng nhau (h.6.2).



Hình 6.1



Hình 6.2

2. Tính chất:

* Trong hình thoi:

- Hai đường chéo của hình thoi vuông góc với nhau;
- Hai đường chéo là các đường phân giác của các góc của hình thoi;

* Hình vuông có đủ các tính chất của hình chữ nhật và hình thoi.

3. Dấu hiệu nhận biết:

* Nhận biết hình thoi:

- Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có hai cạnh kề bằng nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau là hình thoi;
- Hình bình hành có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình thoi.

* Nhận biết hình vuông:

- Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau là hình vuông;
- Hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc là hình vuông;
- Hình chữ nhật có một đường chéo là đường phân giác của một góc là hình vuông;
- Hình thoi có một góc vuông là hình vuông;
- Hình thoi có hai đường chéo bằng nhau là hình vuông.

B. Một số ví dụ

Ví dụ 1: Cho hình thoi $ABCD$, độ dài mỗi cạnh là $13cm$. Gọi O là giao điểm của hai đường chéo. Vẽ $OH \perp AD$. Biết $OH = 6cm$, tính tỉ số của hai đường chéo BD và AC .

Giải (h.6.3)

*** Tìm cách giải**

Vẽ thêm $BK \perp AD$ để dùng định lý đường trung bình của tam giác, định lý Py-ta-go tính bình phương độ dài của mỗi đường chéo.

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $BK \perp AD$.

Xét $\triangle BKD$ có $OH \parallel BK$ (vì cùng vuông góc với AD) và

$OB = OD$ nên $KH = HD$.

Vậy OH là đường trung bình của $\triangle BKD$.

Suy ra $OH = \frac{1}{2}BK$, do đó $BK = 12cm$.

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K , có

$$AK^2 = AB^2 - BK^2 = 13^2 - 12^2 = 25 \Rightarrow AK = 5cm$$

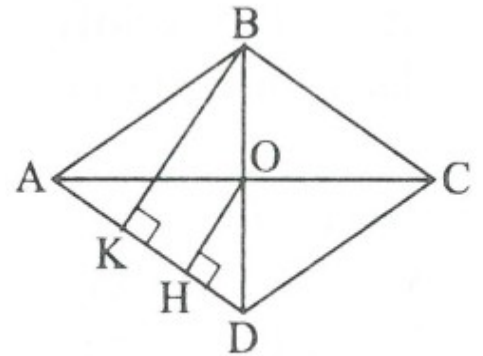
do đó $KD = 8cm$.

Xét $\triangle BKD$ vuông tại K có $BD^2 = BK^2 + KD^2 = 12^2 + 8^2 = 208$.

Xét $\triangle AOH$ vuông tại H có $OA^2 = OH^2 + AH^2 = 6^2 + 9^2 = 117$.

$$\Rightarrow \left(\frac{AC}{2}\right)^2 = 117 \Rightarrow AC^2 = 468.$$

$$\text{Do đó: } \frac{BD^2}{AC^2} = \frac{208}{468} = \frac{4}{9} \Rightarrow \frac{BD}{AC} = \frac{2}{3}.$$



Hình 6.3

Ví dụ 2: Cho tam giác ABC cân tại A , hai đường cao BE và CF cắt nhau tại H . Đường thẳng AH cắt EF tại D , cắt BC tại G . Gọi M và N lần lượt là hình chiếu của G trên AB và AC . Chứng minh rằng tứ giác $DNGM$ là hình thoi.

Giải (h.6.4)

*** Tìm cách giải**

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được tứ giác $DNGM$ là hình bình hành. Sau đó chứng minh hai cạnh kề bằng nhau.

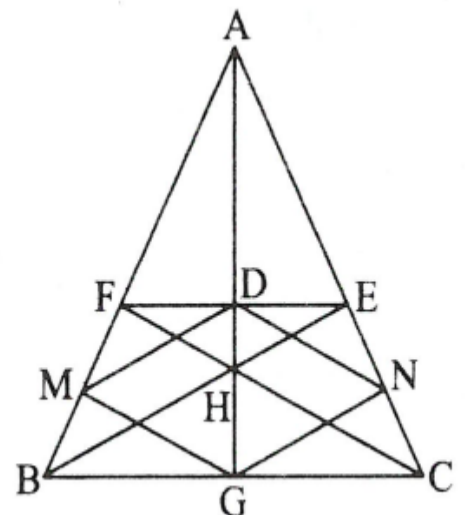
*** Trình bày lời giải**

$\triangle ABE = \triangle ACF$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AE = AF$ và $BE = CF$.

Vì H là trực tâm của $\triangle ABC$ nên AH là đường cao, đồng thời là đường trung tuyến, từ đó $GB = GC$ và $DE = DF$.

Xét $\triangle EBC$ có $GN \parallel BE$ (cùng vuông góc với AC) và

$GB = GC$ nên $NE = NC$.



Hình 6.4

Chứng minh tương tự, ta được: $MF = MB$.

Dùng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $DM \parallel GN$ và $DM = GN$ nên tứ giác $DNGM$ là hình bình hành.

Mặt khác, $DM = DN$ (cùng bằng $\frac{1}{2}$ của hai cạnh bằng nhau) nên $DNGM$ là hình thoi.

Ví dụ 3: Cho hình vuông $ABCD$. Lấy điểm M trên đường chéo AC . Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$ và $MH \perp EF$. Chứng minh rằng khi điểm M di động trên AC thì đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định.

Giải (h.6.5)

*** Tìm cách giải**

Về hình chính xác ta thấy đường thẳng MH đi qua một điểm cố định là điểm B . Vì thế ta sẽ chứng minh ba điểm H, M, B thẳng hàng bằng cách chứng minh $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

*** Trình bày lời giải**

Gọi N là giao điểm của đường thẳng EM và BC .

Khi đó $BN = AE$; $AE = ME$ (vì $\triangle AEM$ vuông cân) suy ra $BN = ME$.

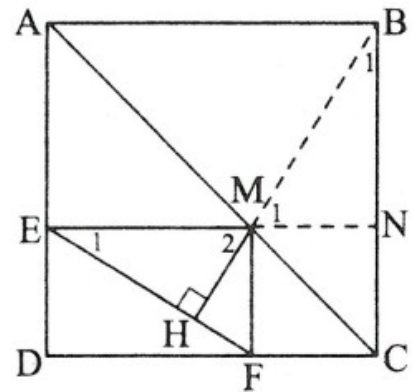
Chứng minh tương tự, ta được: $MN = MF$.

Nối MB ta được: $\triangle BMN \cong \triangle EFM$ (c.g.c).

Suy ra $\widehat{B}_1 = \widehat{E}_1$ do đó $\widehat{M}_1 = \widehat{M}_2$.

Từ đó ba điểm H, M, B thẳng hàng.

Vậy đường thẳng MH luôn đi qua một điểm cố định là điểm B .



Hình 6.5

Ví dụ 4: Cho hình vuông $ABCD$ cạnh a . Trên cạnh BC lấy điểm M , trên cạnh CD lấy điểm N sao cho chu vi các tam giác CMN bằng $2a$. Chứng minh rằng góc MAN có số đo không đổi.

Giải (h.6.6)

*** Tìm cách giải**

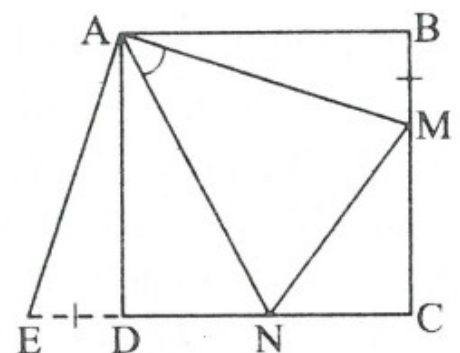
Về hình chính xác ta luôn thấy $\widehat{MAN} = 45^\circ$. Vì vậy ta vẽ hình phụ tạo ra góc 90° rồi chứng minh $\widehat{MAN}$ bằng nửa góc vuông đó.

*** Trình bày lời giải**

Trên tia đối của tia DC lấy điểm E sao cho $DE = BM$.

$\triangle BAM \cong \triangle DAE$ (c.g.c) suy ra $AM = AE$ và $\widehat{BAM} = \widehat{DAE}$.

Ta có: $\widehat{BAM} + \widehat{DAM} = 90^\circ$.



Hình 6.6

$$\Rightarrow \widehat{DAE} + \widehat{DAM} = 90^\circ \text{ hay } \widehat{EAM} = 90^\circ.$$

Theo đề bài, $CM + CN + MN = 2a$ mà $CM + CN + MB + ND = 2a$ nên $MN = MB + ND$ hay $MN = DE + ND = EN$.

$$\triangle MAN = \triangle EAN \text{ (c.c.c)} \Rightarrow \widehat{MAN} + \widehat{EAN} = \frac{\widehat{EAM}}{2} = 45^\circ.$$

Vậy, góc MAN có số đo không đổi.

Ví dụ 5: Cho hình vuông $ABCD$. Trên các cạnh AB, BC, CD lần lượt lấy các điểm M, N, P sao cho $AM = BN = CP$. Qua N vẽ một đường thẳng vuông góc với MP cắt AD tại Q . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

Giải (h.6.7)

*** Tìm cách giải**

Từ giả thiết ta nghĩ đến việc chứng minh các tam giác bằng nhau để suy ra bốn cạnh của tứ giác $MNPQ$ bằng nhau, ta được tứ giác này là hình thoi. Sau đó chứng minh hai đường chéo bằng nhau để được hình vuông.

*** Trình bày lời giải**

Vẽ $ME \perp CD$, $NF \perp AD$.

Gọi O là giao điểm của ME và NF .

Ta có: $AB = BC = CD = DA$ mà $AM = BN = CP$ nên $BM = CN = DP$.

Dễ thấy tứ giác $AMOF$ là hình vuông.

$\triangle EMP$ và $\triangle FNQ$ có:

$\widehat{E} = \widehat{F} = 90^\circ$; $ME = NF$ (bằng cạnh hình vuông);

$\widehat{EMP} = \widehat{FNQ}$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

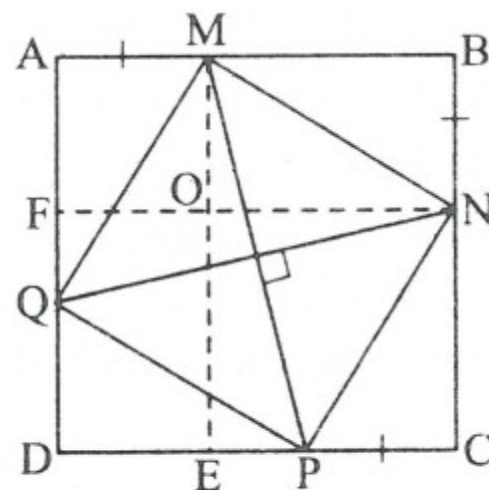
$\Rightarrow \triangle EMP = \triangle FNQ$ (g.c.g) $\Rightarrow MP = NQ$ và $EP = FQ$.

Ta có: $DE = AM = AF \Rightarrow DP = AQ$ do đó $DQ = CP$.

Các tam giác BNM, CPN, DQP và AMQ bằng nhau suy ra:

$MN = NP = PQ = QM$.

Do đó tứ giác $MNPQ$ là hình thoi. Hình thoi này có hai đường chéo bằng nhau nên là hình vuông.



Hình 6.7

C. Bài tập vận dụng

• Hình thoi

6.1. Một hình thoi có góc nhọn bằng 30° . Khoảng cách từ giao điểm của hai đường chéo đến mỗi cạnh bằng h . Tính độ dài mỗi cạnh của hình thoi.

6.2. Cho hình thoi $ABCD$, chu vi bằng $8cm$. Tìm giá trị lớn nhất của tích hai đường chéo.

6.3. Cho hình thoi $ABCD$, $\angle A = 40^\circ$. Gọi M là trung điểm của AB . Vẽ $DH \perp CM$. Tính số đo của góc MHB .

6.4. Cho hình thoi $ABCD$. Trên nửa mặt phẳng bờ BD có chứa điểm C , vẽ hình bình hành $BDEF$ có $DE = DC$. Chứng minh rằng C là trực tâm của tam giác AEF .

6.5. Cho hình bình hành $ABCD$, hai đường chéo cắt nhau tại O . Gọi E, F, G, H lần lượt là giao điểm các đường phân giác của tam giác AOB, BOC, COD và DOA . Chứng minh tứ giác $EFGH$ là hình thoi.

6.6. Dựng hình thoi $ABCD$ biết $AC + BD = 8cm$ và $\angle ABD = 25^\circ$.

• **Hình vuông**

6.7. Cho hình vuông $ABCD$. Trên cạnh BC lấy các điểm E và F sao cho $BE = EF = FC$. Trên cạnh AD lấy điểm G sao cho $AG = \frac{1}{3}AD$.

Tính tổng: $\angle AEG + \angle AFG + \angle ACG$

6.8. Cho hình vuông $ABCD$. Trên đường chéo AC lấy một điểm M . Vẽ $ME \perp AD$, $MF \perp CD$. Chứng minh rằng ba đường thẳng AF, CE và BM đồng quy.

6.9. Cho tam giác ABC vuông tại A , đường cao AH . Vẽ ra phía ngoài tam giác này các hình vuông $ABDE$ và $ACFG$. Chứng minh rằng:

a) Ba đường thẳng AH, DE và FG đồng quy;

b) Ba đường thẳng AH, BF và CD đồng quy.

6.10. Cho hình vuông $ABCD$. Trên tia đối của tia BA lấy điểm E . Trên tia đối của tia CB lấy điểm F sao cho $AE = CF$. Gọi O là trung điểm của EF . Vẽ điểm M sao cho O là trung điểm của DM . Chứng minh rằng tứ giác $DEMF$ là hình vuông.

6.11. Cho tam giác ABC , $\angle A = 45^\circ$. Vẽ ba đường cao AD, BE, CF cắt nhau tại H . Gọi M, N, P, Q lần lượt là trung điểm của AB, AC, HB và HC . Chứng minh rằng tứ giác $MNPQ$ là hình vuông.

6.12. Cho hình bình hành $ABCD$. Vẽ ra phía ngoài của hình bình hành các hình vuông có một cạnh là cạnh của hình bình hành. Gọi E, F, G, H lần lượt là tâm (tức là giao điểm của hai đường chéo) của các hình vuông vẽ trên các cạnh AB, BC, CD và DA . Chứng minh rằng: $EG = HF$ và $EG \perp HF$.

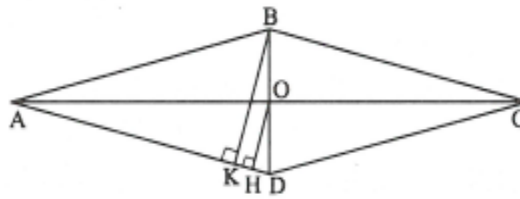
6.13. Dựng hình vuông $ABCD$ biết đỉnh A và trung điểm M của CD .

6.14. Một bàn cờ hình vuông có kích thước 6×6 . Có thể dùng 9 mảnh gỗ hình chữ nhật có kích thước 1×4 để ghép kín bàn cờ được không?

6.15. Một hình chữ nhật có kích thước 3×6 . Hãy chia hình chữ nhật này thành nhiều phần (hình tam giác, tứ giác) để ghép lại thành một hình vuông (số phần được chia ra càng ít càng tốt).

Hướng dẫn giải

6.1. (h.6.8)



Hình 6.8

Giả sử $ABCD$ là hình thoi, $\angle A = 30^\circ$. Hai đường chéo cắt nhau tại O .

Vẽ $OH \perp AD$, $BK \perp AD$ thì $OH \parallel BK$ và OH là đường trung bình của tam giác

$$BKD \Rightarrow OH = \frac{1}{2}BK. (1)$$

Xét $\triangle ABK$ vuông tại K , $\angle A = 30^\circ \Rightarrow BK = \frac{1}{2}AB. (2)$

Từ (1) và (2) suy ra: $\Rightarrow OH = \frac{1}{4}AB$ do đó $AB = 4OH = 4h$.

6.2. (h.6.9)

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Ta đặt $OA = x, OB = y$ thì $AC = 2x, BD = 2y$.

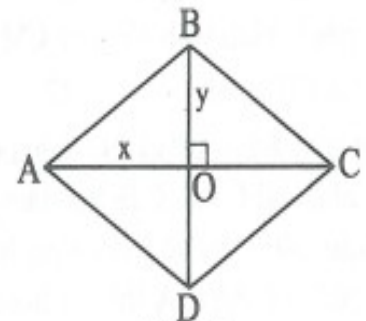
Ta có: $AB = 8:4 = 2cm$ và $x^2 + y^2 = 4$.

Từ bất đẳng thức $x^2 + y^2 \geq 2xy$ suy ra $xy \leq \frac{x^2 + y^2}{2} = \frac{4}{2} = 2$.

Do đó: $AC \cdot BD = 2x \cdot 2y = 4xy \leq 8$.

Vậy giá trị lớn nhất của tích $AC \cdot BD$ là $8(cm^2)$ khi $x = y$

$\Leftrightarrow AC = BD \Leftrightarrow ABCD$ là hình vuông.



Hình 6.9

6.3. (h.6.10)

Gọi N là trung điểm của CD .

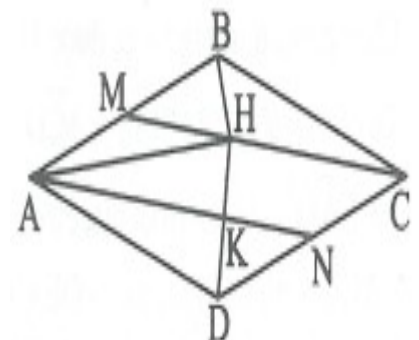
Ta có $AM \parallel CN$ và $AM = CN$ nên tứ giác $AMCN$ là hình bình hành $\Rightarrow AN \parallel CM$.

Mặt khác, $DH \perp CM$ nên $DH \perp AN$ tại K .

Xét $\triangle HCD$ có $KN \parallel CH$ và $NC = ND$ nên $KH = KD$.

$\triangle ADH$ Có AK vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên $\triangle ADH$ cân

$\Rightarrow AH = AD$.



Hình 6.10

Mặt khác, $AB = AD$ nên $AH = AB \Rightarrow \triangle ABH$ cân.

Suy ra $\angle ADH = \angle AHD$ và $\angle ABH = \angle AHB$.

Xét tứ giác $ABHD$ có $\angle ADH + \angle BHA + \angle BHA + \angle ABH = 360^\circ - \angle A$
 $\Rightarrow 2(\angle BHA + \angle BHA) = 360^\circ - 40^\circ \Rightarrow 2\angle BHD = 320^\circ \Rightarrow \angle BHD = 160^\circ$.

Mặt khác, $\angle BHM = 90^\circ$ nên $\angle MHB = 160^\circ - 90^\circ = 70^\circ$.

6.4. (h.6.11)

Ta có $AC \perp DB$ mà $DB \parallel EF$ nên $AC \perp EF$. (1)

Vẽ điểm M sao cho D là trung điểm của EM .

Xét $\triangle CEM$ có CD là đường trung tuyến mà $CD = \frac{1}{2}EM$ nên

$\triangle CEM$ vuông tại C .

$\Rightarrow CM \perp CE$.

Tứ giác $MDFB$ có hai cạnh đối song song và bằng nhau nên là hình bình hành.

$\Rightarrow DB$ và MF cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.

Mặt khác, O là trung điểm của DB nên O là trung điểm của MF .

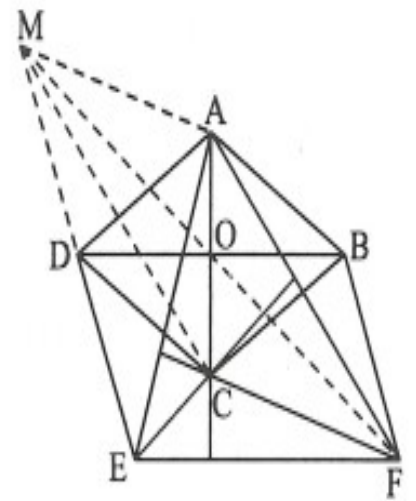
Tứ giác $AMCF$ có $OA = OC, OM = OF$ nên là hình bình hành

$\Rightarrow CM \parallel AF$

$\Rightarrow CE \perp AF$. (2)

Xét $\triangle AEF$ có AC và EC là hai đường cao cắt nhau tại C nên C là trực tâm.

Nhận xét: Nếu vẽ hình bình hành $DBEF$ về phía điểm A thì kết luận của bài toán vẫn đúng.



Hình 6.11

6.5. (h.6.12)

Ta có $OE \perp OH, OG \perp OH$ (hai tia phân giác của hai góc kề bù)

$\Rightarrow E, O, G$ thẳng hàng.

Chứng minh tương tự, ta được H, O, F thẳng hàng.

Ta có $AB \parallel CD \Rightarrow \angle BAC = \angle ACD$

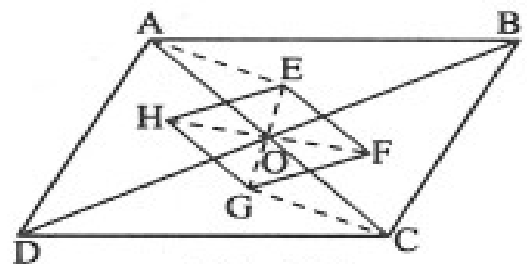
$\Rightarrow \angle EAO = \angle GCO$ (một nửa của hai góc bằng nhau)

$\triangle AOE = \triangle COG$ (g.c.g) $\Rightarrow OE = OG$.

Chứng minh tương tự, ta được $OF = OH$.

Tứ giác $EFGH$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành.

Hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên là hình thoi.



Hình 6.12

6.6. (h.6.13)

Giả sử đã dựng được hình thoi $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Gọi O là giao điểm của hai đường chéo.

Ta có $AC \perp BD$ và $OA = OC; OB = OD$.

Do đó $OA + OB = 8 : 2 = 4(cm)$.

Trên tia OD lấy điểm E sao cho $OE = OA$.

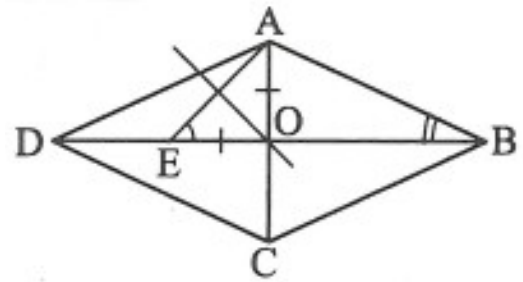
Khi đó $BE = 4cm$ và $\triangle AOE$ vuông cân

$\Rightarrow \angle AEB = 45^\circ$.

Từ đó $\triangle AEB$ dựng được ngay (g.c.g).

- Điểm O thỏa mãn hai điều kiện: O nằm trên BE và O nằm trên đường trung trực của AE .
- Điểm C thỏa mãn hai điều kiện: C nằm trên tia AO sao cho $OC = OA$.
- Điểm D thỏa mãn hai điều kiện: D nằm trên tia BO sao cho $OB = OD$.

Các bước còn lại, bạn đọc tự giải.



Hình 6.13

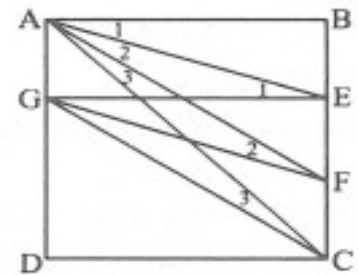
6.7. (h.6.14)

Các tứ giác $ABEG, AEFG, AFCG$ là hình bình hành nên:

$$AB \parallel EG, AE \parallel GF, AF \parallel CG$$

$$\text{Suy ra } \angle E_1 = \angle A_1; \angle F_2 = \angle A_2; \angle C_3 = \angle A_3$$

$$\text{Do đó: } \angle E_1 + \angle F_2 + \angle C_3 = \angle A_1 + \angle A_2 + \angle A_3 = \angle BAC = 45^\circ.$$



Hình 6.14

6.8 (h.6.15)

* Tìm cách giải

Muốn chứng minh AF, CE và BM đồng quy ta chứng minh chúng là các đường thẳng chứa đường cao của $\triangle BEF$.

* Trình bày lời giải

Tứ giác $MEDF$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật

$$\Rightarrow ME = DF; MF = DE$$

$$\triangle ADC \text{ vuông cân} \Rightarrow \angle A_1 = \angle A_2 = 45^\circ.$$

$$\text{Do đó } \triangle AEM \text{ và } \triangle CFM \text{ vuông cân} \Rightarrow AE = ME$$

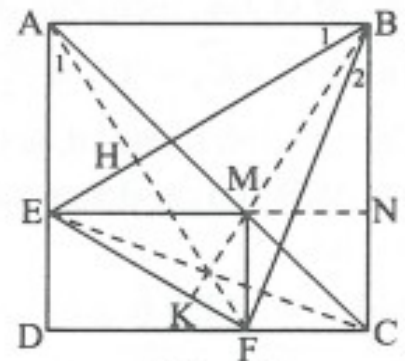
$$\Rightarrow AE = DF;$$

$$CF = MF \Rightarrow DE = CF.$$

$$\triangle ABE = \triangle DAF \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle B_1 = \angle A_1 \Rightarrow \angle H = 90^\circ$$

(H là giao điểm của BE và CF).

Chứng minh tương tự, ta được $CE \perp BF$.



Hình 6.15

Gọi N là giao điểm của EM với BC ; K là giao điểm của BM với EF .

Ta có $MF = MN$ (vì M nằm trên tia phân giác của góc C).

$$ME = BN (= AE)$$

$$\triangle MFE = \triangle NMB \text{ (g.c.g)} \Rightarrow \angle MFE = \angle NMB$$

Ta có: $\angle NMB + \angle PMK = 90^\circ$ (vì $\angle NMF = 90^\circ$).

$$\Rightarrow \angle MFE + \angle PMK = 90^\circ \Rightarrow \angle K = 90^\circ \Rightarrow BM \perp EF$$

Vậy ba đường thẳng AF, CE và BM là ba đường cao của $\triangle BEF$ nên chúng đồng quy.

6.9 (h.6.16)

a) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng DE và FG .

Tứ giác $AGKE$ có ba góc vuông nên là hình chữ nhật.

Gọi O là giao điểm của AH và EG .

$$\triangle AEG = \triangle ABC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow \angle E_1 = \angle C_1.$$

Ta lại có: $\angle E_1 = \angle A_1$ (cùng phụ với $\angle ABC$); và $\angle A_1 = \angle A_2$

$$\Rightarrow \angle E_1 = \angle A_2. \text{ Do đó } \triangle OAG \text{ cân.}$$

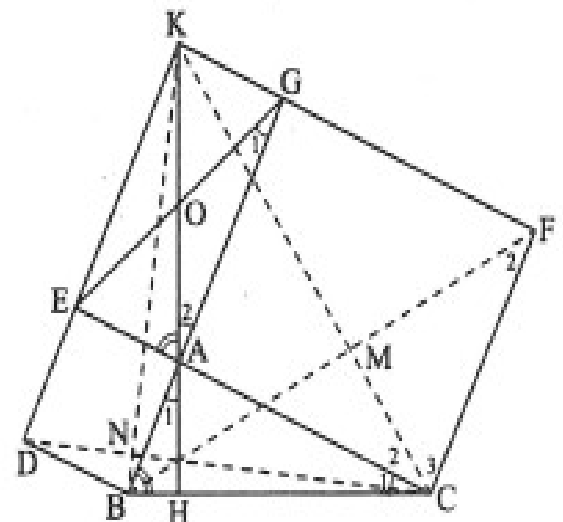
$$\Rightarrow OG = OA$$

Chứng minh tương tự, ta được $OE = OA$

$$\Rightarrow OG = OE$$

Xét hình chữ nhật $AGKE$ có O là trung điểm của đường chéo EG nên đường chéo AK phải đi qua O hay đường thẳng AH đi qua K .

Vậy ba đường thẳng AH, DE, FG đồng quy.



Hình 6.16

b) $\triangle BCF$ và $\triangle KAC$ có:

$$BC = KA \text{ (cùng bằng } EG); \angle BCF = \angle KAC \text{ (vì } 90^\circ + \angle E_1 = 90^\circ + \angle A_2); CF = AC.$$

$$\text{Do đó } \triangle BCF = \triangle KAC \Rightarrow \angle F_2 = \angle C_2$$

Gọi M là giao điểm của BF và KC .

$$\text{Ta có } \angle C_2 + \angle C_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle F_2 + \angle C_3 = 90^\circ \Rightarrow \angle M = 90^\circ. \text{ Vậy } BF \perp KC$$

Chứng minh tương tự, ta được $CD \perp KB$

Xét $\triangle KBC$ có các đường thẳng AH, BF, CD chứa ba đường cao nên chúng đồng quy.

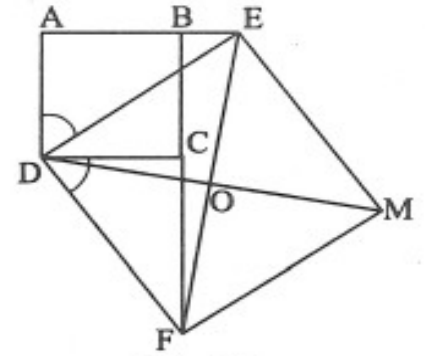
6.10. (h.6.17)

$\triangle ADE = \triangle CDF$ (c.g.c) $\Rightarrow DE = DF$ và $\angle ADE = \angle CDF$.

Ta có $\angle ADE + \angle EDF = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle CDF + \angle EDF = 90^\circ$ hay $\angle EDF = 90^\circ$.

Tứ giác $DEMF$ có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường nên là hình bình hành. Hình bình hành này có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi. Hình thoi này có $\angle EDF = 90^\circ$ nên là hình vuông.



Hình 6.17

6.11. (h.6.18)

$\triangle FAC$ vuông tại F , $\angle A = 45^\circ$ nên là tam giác vuông cân

$\Rightarrow AF = FC$

$\triangle AFH$ và $\triangle CFB$ có: $\angle AFH = \angle CFB = 90^\circ$; $AF = FC$;

$\angle FAH = \angle FCB$ (hai góc có cạnh tương ứng vuông góc)

Do đó $\triangle AFH = \triangle CFB$ (g.c.g) $\Rightarrow AH = BC$

Vận dụng định lý đường trung bình của tam giác ta chứng minh được $MNPQ$ là hình bình hành.

Ta có: $MQ = \frac{1}{2}AH$; $MN = \frac{1}{2}BC$

mà $AH = BC$ nên $MQ = MN$

Hình bình hành $MNPQ$ có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình thoi.

Bạn đọc tự chứng minh $\angle M = 90^\circ$ suy ra $MNPQ$ là hình vuông.

6.12 (h.6.19)

Ta đặt $\angle B = \alpha$ ($\alpha \leq 90^\circ$)

Khi đó $\angle EBF = \angle CFB = 90^\circ + \alpha$

$\triangle EFB = \triangle GFC$ (c.g.c)

$\Rightarrow EF = GF$ và $\angle EFB = \angle GFC$.

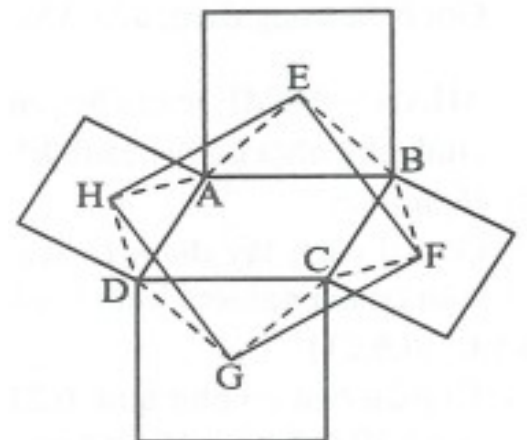
Ta có $\angle FEG + \angle EFB = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle FEG + \angle GFC = 90^\circ$ hay $\angle EFG = 90^\circ$

Chứng minh tương tự, ta được $FG = GH = HE$

Tứ giác $EFGH$ có bốn cạnh bằng nhau nên là hình thoi.

Hình thoi này có $\angle EFG = 90^\circ$ nên là hình vuông, suy ra $EG = HF$ và $EG \perp HF$.



Hình 6.19

6.13 (h.6.20)

a) Phân tích

Giả sử đã dựng được hình vuông $ABCD$ thỏa mãn đề bài.

Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$.

Qua M vẽ một đường thẳng vuông góc với AM cắt đường thẳng AD tại E .

Xét $\triangle ADM$ có $NH \parallel MD$ và $AN = NM$ nên $AH = HD = \frac{1}{2}AD$.

Mặt khác, $MD = MC = \frac{1}{2}CD$ nên $MD = AH$

Ta có $\angle DME = \angle HAN$ (cùng phụ với $\angle DMA$).

$\triangle DME = \triangle HAN$ (g.c.g) $\Rightarrow ME = AN = \frac{1}{2}AM$

Vậy E xác định được, từ đó xác định được D, C, B .

b) Cách dựng

- Dựng đường thẳng $d \perp AM$ tại M ;
- Trên d lấy điểm E sao cho $ME = \frac{1}{2}AM$;
- Dựng $MD \perp AE$
- Dựng điểm C sao cho M là trung điểm của CD ;
- Dựng $Cx \parallel AD$ và $Ay \parallel CD$ chúng cắt nhau tại B .

Tứ giác $ABCD$ là hình vuông phải dựng.

c) Chứng minh

Thật vậy, tứ giác $ABCD$ có các cặp cạnh đối song song nên là hình bình hành.

Hình bình hành này có $\angle D = 90^\circ$ nên là hình chữ nhật.

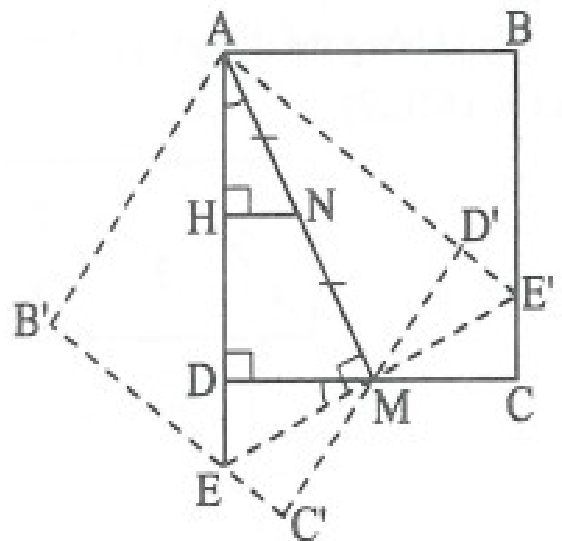
Gọi N là trung điểm của AM . Vẽ $NH \perp AD$ thì $AH = \frac{1}{2}AD$.

$\triangle HAN = \triangle DME$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow AH = DM \Rightarrow AD = DC$

Hình chữ nhật có hai cạnh kề bằng nhau nên là hình vuông.

d) Biện luận

Có hai cách lấy điểm E trên đường thẳng d (về hai phía của điểm M) nên bài toán có hai nghiệm hình là các hình vuông $ABCD$ và $AB'C'D'$.



Hình 6.20

6.14 (h.6.21)

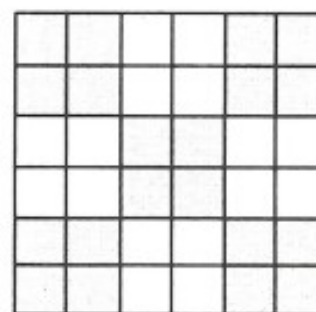
Tô màu bàn cờ như hình 6.21. Lúc này trên bàn cờ có 20 ô đen và 16 ô trắng.

Mỗi mảnh gỗ 1×4 khi đặt lên bàn cờ che lấp được 2 ô đen và 2 ô trắng.

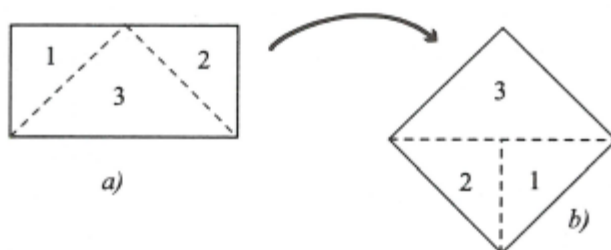
Do đó 9 mảnh gỗ 1×4 chỉ che lấp được 18 ô đen.

Như vậy với mọi cách đặt 9 mảnh gỗ lên bàn cờ bao giờ cũng còn thừa hai ô đen không được che lấp.

Vậy không thể dùng 9 mảnh gỗ 1×4 để lấp kín bàn cờ.



Hình 6.21

6.15 (h.6.22)

Hình 6.22