

CHUYÊN ĐỀ VỀ PHƯƠNG PHÁP ẨN PHỤ

MỞ ĐẦU : Vì tính quan trọng của ẩn phụ trong giải toán nên tôi quyết định chia bài viết này ra làm 3 phần cơ bản:

- (1) Ẩn phụ dựa trên hàm số
- (2) Ẩn ngược
- (3) Ẩn phụ dựa trên quan hệ Tổng_Hiệu_Tích(*)

Và các bài tập đưa vào sẽ ở mức độ từ vừa phải đến khó, thậm chí là rất khó để tăng sự hấp dẫn của bài viết.

PHẦN A: Ẩn phụ dựa trên hàm số

Kiến thức sơ bộ: (a) Phương pháp Cardan để giải phương trình bậc 3 (từ khóa Cardon method for solving cubic equation)

Sẽ là khá thú vị nếu chúng ta thử tìm hiểu một chút về lịch sử phát triển của pt bậc 3: Phác đồ giải thuật:

Nhận xét 1: Dựa vào khái niệm giới hạn suy ra mọi pt bậc 3 đều có nghiệm đó là việc 1 pt bậc 3 dạng đủ: $x^3 + px + q = 0$ tiến đến dương(âm) vô cùng..

(2) Sự chuyển ẩn: Mọi pt bậc 3 đều quy về dạng: $m^3 + n^3 + 3mnx = 0$ để ý công thức lượng giác $\cos 3x$.

Cho trường hợp m không thuộc $[-1,1]$ gợi ý để ý tới công thức $\cosh 3x$ với $\cosh$ là hàm Hyperbolic của x . e, g là hai hằng số thỏa mãn: $P(x)$ là phân tích được thành tích của các đa thức con với bậc nhỏ hơn hoặc bằng 4, việc giải pt $P(x) = 0$ được quy về việc giải các PT con.

Nhưng thường thì việc phân tích đa thức dựa trên hệ số bất định chỉ khả thi với các đa thức hệ số đẹp và nghiệm cũng đẹp(tức là trong nghiệm ko chứa các căn bậc 3,4 thậm chí là 5).

Nhưng bản thân tôi đã từng gặp những phương trình bậc cao 5 thậm chí là 7 hoặc 8,9 với những hệ số rất chẵn nhưng lại có nghiệm vô cùng lẻ? Vậy thì những phương trình đó được tạo thành như thế nào? Rõ ràng là không thể dựa vào việc phân tích phương trình gốc thành tích của các hạng tử bậc 1 được, điều đó nói thẳng ra là bất khả thi.

Do đó trong phần 1 của chuyên đề này tôi sẽ giới thiệu tới các bạn những phương trình được tạo thành bởi các ẩn dạng hàm số.

A) Các dạng lượng giác:

1) Trích đề thi Olympic 30-4 lần 7

Giải phương trình:

$\cos 7x = \frac{1}{2}$ như vậy để dẫn tới việc đặt ẩn phụ dạng lượng giác.

Thật vậy: Xét $\cos 7x$.

Do tập giá trị của hàm số: $[-1,1]$ nên ta có quyền đặt: $x = \arccos t$ (với t thuộc $[-1,1]$ để ý $\arccos$ khác 0) ta có

x thuộc $[0,2\pi]$ mà $\sin t, \cos t$ đều thuộc $[-1,1]$

Như vậy PT đã cho có nghiệm khi dấu các đẳng thức xảy ra tức là:

$x = 0$ hoặc $x = 2\pi$.

3) Trích đề thi HSG toàn quốc bảng A năm 1988

Giải phương trình:

$x = a \cos t$ hoặc $[0, a]$ với a dương nên nghĩ tới ẩn dạng: u khác $[-1, 1]$ của phương trình trên bằng cách đặt $[-1, 1]$

Hay là x nằm ngoài $[-1, 1]$ như vậy ta có thể đặt: $x > 1$.

Do đó ta có quyền đặt: t dương.

Vậy Pt đã cho quy về:

t dương

Xét hàm số: $t > 0$

$t = 1$, qua bảng biến thiên ta suy ra $g(1)$ chính là min của hàm $g(t)$ với $t > 0$

Nhưng $g(1) = 0$ nên PT: $g(t) = 0$ chỉ có nghiệm duy nhất $t = 1$, suy ra PT ban đầu cũng chỉ có nghiệm duy nhất: $x = 3$.

Bài tập đề nghị:

1) Giải phương trình:

a, b cho trước lớn hơn 1)

$$(a+b)^2 \cos^2 x - a^2 \cos^2 x - b^2 \cos^2 x = a^2 \sin^2 x + b^2 \sin^2 x - (a+b)^2 \sin^2 x$$

(Bài này hơi khó, gợi ý các bạn sử dụng tính tăng của hàm *sin hyperbolic*)

Như vậy qua các bài trên chúng ta đã định hình được 1 lớp PT bậc cao hơn 5 giải được bằng sự chuyển ẩn về dạng *Hyperbolic* để quy về pt bậc 2 .

=====

Phương pháp suy biến ẩn ngược

Thế nào là suy biến ẩn ngược

Có thể nói vắn tắt về suy biến ẩn ngược như sau:

Từ phương trình ban đầu: $\sqrt{10-3x} = u$ (đk là u, v đều dương) ta có

phương trình (1) tương đương với: $\sqrt{2x+6} = v$ dễ thấy: $f(x) = 0$ chỉ có nghiệm duy nhất.

Mà $x = -1$ là nghiệm nên kết luận, nghiệm duy nhất của pt đã cho là $x = -1$

Như vậy qua các bài tập trên có lẽ các bạn đã ít nhiều quen với các phương trình dạng này rồi phải không? Dưới đây là một số bài tập tương đối hay tôi muốn giới thiệu tới các bạn:

1) Giải phương trình:

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 2 = \sqrt[3]{2x}$$

2) Giải phương trình:

$$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = \sqrt[3]{(x^2 + 3x + 4)^2} + \sqrt[3]{x^2 + 3x + 4}$$

3) Giải phương trình:

$$x^5 = \sqrt[5]{(x^3 + x - 1)^3} + \sqrt[5]{x^3 + x - 1} - 1$$

4) Giải phương trình:

HỆ KÌ DỊ & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

$$x^3 = \sqrt[3]{x+2\ln x} + \frac{2}{3}\ln(x+2\ln x)$$

(Ẩn ngược với hàm siêu việt)

5)Giải phương trình:

$$x^3 = \sqrt[3]{x-\sin x} - \sin \sqrt[3]{x-\sin x}$$

=====

ẨN PHỤ DỰA TRÊN QUAN HỆ TỔNG HIỆU TÍCH

Thế nào là ẩn phụ dựa trên quan hệ tổng hiệu tích. Minh họa hay nhất có lẽ là thông qua các ví dụ cụ thể dưới đây:

1)Giải phương trình:

$$x^2 - 3x + 1 = -\frac{\sqrt{3}}{3}\sqrt{x^4 + x^2 + 1}$$

(Lược trích đề 30-4 lần 5)

Lời giải:

Nhận xét:

$$x^4 + x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2 - x^2 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$$

Mặt khác: $x^2 - 3x + 1 = 2(x^2 - x + 1) - (x^2 + x + 1)$

Đặt: $\sqrt{x^2 - x + 1} = u$ và $\sqrt{x^2 + x + 1} = v$ lưu ý cả u, v dương

Như vậy phương trình đã cho quy về phương trình thuần nhất theo u và v như sau:

$$2u^2 - v^2 + \frac{\sqrt{3}}{3}uv = 0(*)$$

Giải (*) kết hợp với u, v dương ta có: $\sqrt{3}u = v$

Hay là: $3u^2 = v^2$ tức là

$$3(x^2 - x + 1) = (x^2 + x + 1) \Leftrightarrow 2(x - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Vậy $x=1$ là nghiệm duy nhất

2)Giải phương trình:

$$18x^2 - 13x + 2 = \sqrt{3}\sqrt{81x^4 - 108x^3 + 56x^2 - 12x + 1}$$

Lời giải:

Xét điều kiện: $x \geq \frac{1}{2}$ hoặc $x \leq \frac{2}{9}$

Mặt khác:

$$18x^2 - 13x + 2 = 18x^2 - 12x + 2 - x = 2(9x^2 - 6x + 1) - x = 2(3x - 1)^2 - x$$

Và dễ có VP bằng: $VP = (3x - 1)^4 + 2x^2$ (Tự kiểm tra)

Như vậy nếu đặt: $u = (3x - 1)^2$ ta có phương trình đã cho tương đương với:

$$2u - x = \sqrt{3}\sqrt{u^2 + 2x^2}$$

Bình phương cả hai vế ta có:

$$(2u - x)^2 = 3(u^2 + 2x^2) \text{ hay là : } u^2 - 4ux - 5x^2 = 0$$

Giải ra ta có:

$$u + x = 0 \text{ (dễ dàng loại do } \text{😊} \text{elta} < 0 \text{)}$$

HỆ KÌ DỊ & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

Hoặc $u-5x=0$ hay là $9x^2-11x+1=0$

Giải ra ta có nghiệm là:

$$x = \frac{11-\sqrt{85}}{18} \text{ hoặc là}$$

$$x = \frac{11+\sqrt{85}}{18}$$

Có lẽ là không có gì quá nhiều để nói về lớp các bài toán giống như 2 bài trên, nền tảng cơ bản của nó là sự quy đổi phương trình ban đầu trở về các phương trình thuần nhất cơ bản, qua đó quy về các phương trình bậc thấp hơn 5 (tức là giải được)

Bài tập đề nghị:

1)Giải phương trình:

$$x^2+2x+19=4\sqrt[3]{x^4+x^3-3x^2-32x+52}$$

(Gợi ý chuyển ẩn $y=x+1$)

2)Giải phương trình:

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x^2-1}-1=(x+1)\sqrt{x-1}$$

3)(**) Giải phương trình:

$$\frac{3x^4+9x^3+17x^2+11x+8}{3x^2+4x+5}=(x+1)\sqrt{x^2+3}$$

(Tôi đánh giá rất cao bạn nào có thể giải được bài này trong 1,2 ngày)

4)Giải phương trình:

$$2x^2+3=3\sqrt[3]{x^4+x^2+1}$$

5)Giải phương trình:

$$27x^4+8\sqrt{1-x^2}=12$$

6)Giải phương trình:

$$4(3x-1)^4+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{2x-3x^2}=1$$

=====

PHƯƠNG PHÁP TRỰC CĂN THỨC MỘT CẢI TIẾN NHỎ

Thực ra không có gì nhiều để nói về phương pháp này, có lẽ các bạn cũng biết rằng phương pháp này là đặc dụng đối với các phương trình vô tỷ có chứa căn. Đối với những phương trình có chứa căn đồng bậc thì thường là dừng lại ở mức trực căn với một hằng số dương cho trước ví dụ như một bài tiêu biểu dưới đây:

1) Giải phương trình:

$$x^2+3x+1=(x+3)\sqrt{x^2+1}$$

Lời giải:

Viết lại phương trình đã cho về dạng:

$$(x^2-8)+3x+9-(x+3)\sqrt{x^2+1}=0 \text{ Hay là:}$$

$(x^2-8)-(x+3)(\sqrt{x^2+1}-3)=0$ Thực hiện trực căn và đặt (x^2-8) ra ngoài ta có phương trình tương đương sau:

$$(x^2-8)\left(1-\frac{x+3}{\sqrt{x^2+1}+3}\right)=0$$

Hay là :

HỆ KÌ DỊ & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

$$(x^2-8)\left(\frac{\sqrt{x^2+1}-x}{x+3}\right)=0 \quad (1)$$

Rõ ràng là (1) chỉ có nghiệm là : $x^2-8=0$ hay $x=2\sqrt{2}$ hoặc $x=-2\sqrt{2}$

Đây là 1 lời giải khá đặc biệt bằng trục căn thức phải không các bạn.
Để cụ thể hơn có lẽ chúng ta quay về xét một bài khá đơn giản:

2) Đề thi HSG Toàn quốc A-2002

Giải phương trình:

$$\sqrt{4-3\sqrt{10-3x}}=x-2$$

Lời giải:

$$\text{Đk } 2 \leq x \leq \frac{10}{3}$$

Phương trình đã cho tương đương với:

$$4-\sqrt{10-3x}=(x-2)^2$$

Viết lại phương trình đã cho về dạng như sau:

$$(x-2)^2-1+3(\sqrt{10-3x}-1)=0$$

Trục căn ta có phương trình tương đương như sau:

$$(x-3)\left((x-1)-\frac{9}{\sqrt{10-3x}+1}\right)=0$$

Như vậy dễ thấy $x=3$ là nghiệm. Xét tiếp cho phương trình thứ hai:

$$(x-1)-\frac{9}{\sqrt{10-3x}+1}=0$$

Nhưng do $x-1 \leq \frac{10}{3}-1 = \frac{7}{3} \leq 3 = \frac{9}{\sqrt{4}+1} \leq \frac{9}{\sqrt{10-3x}+1}$

Như vậy phương trình này vô nghiệm.

Kết luận $x=3$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

Một số bài tập đề nghị cho phương pháp trục căn với số thực:

1) Thi HSG toàn quốc bảng B-1995

Giải phương trình:

$$2x^2-11x+21=3\sqrt[3]{4x+4}$$

2) Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{6}{2-x}}+\sqrt{\frac{10}{3-x}}=4$$

3) Giải phương trình (Trích THPT)

$$\sqrt[4]{17-x^8}+\sqrt[3]{2x^8-1}=1$$

4) Giải phương trình:

$$\sqrt{\frac{1-x}{x}}=\frac{2x+x^2}{1+x^2}$$

Tuy nhiên đối với một số phương trình vô tỷ đặc biệt là các phương trình chưa căn bậc sự trục căn với số thực dương tỏ ra ít nhiều hạn chế.

TRỤC CĂN VỚI CẢ MỘT BIỂU THỨC CỦA BIẾN

Chúng ta hãy thử bắt đầu bằng một bài toán khá khó

1) Giải phương trình:

$$2\sqrt{(2-x)(5-x)} = x + \sqrt{(2-x)(10-x)} \text{ cho } x < 2$$

(Trích trong cuốn " Tìm tòi để học toán- Lê Quang Năm)

Lời giải gốc:

Xin được tóm tắt như sau:

Thực hiện trực căn:

$$2(\sqrt{(2-x)(5-x)}-2) = (x-1) + \sqrt{(2-x)(10-x)}-3$$

Ta có:

$$2 \frac{x^2-7x+6}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} = (x-1) + \frac{x^2-12x+11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3}$$

Loại đi nghiệm $x=1$ (hiển nhiên có) chúng ta giải phương trình thứ 2

$$1 + \frac{x-11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} - \frac{2(x-6)}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} = 0 \quad (*)$$

Đánh giá như sau:

Do $x < 2$ nên :

$$(2-x)(10-x) \geq (2-x)(5-x) \text{ suy ra}$$

$$\frac{1}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} \leq \frac{1}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2}$$

Nhưng do $x < 2$ nên $x-11 < 0$ chính vì vậy dấu của BDT sẽ đổi chiều hay là:

$$\frac{x-11}{\sqrt{(2-x)(10-x)}+3} \geq \frac{x-11}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} \quad (1)$$

$$1 \geq \frac{1}{\sqrt{(2-x)(5-x)}+2} \quad (2)$$

Mặt khác hiển nhiên có

Lấy (1) cộng (2) nên ta suy ra được VT của PT luôn dương còn VP = 0 nên PT(*) vô nghiệm. Nên PT gốc chỉ có nghiệm $x=1$

Lời giải này rõ ràng là hay, nhưng tại sao lại phải giải cho $x < 2$, sau khi suy nghĩ tôi có đưa ra được 1 lời giải khác cho x thuộc $\mathbb{R}$ mà vẫn sử dụng trực căn (Ko cần phải bình phương quy về pt bậc 4).

PT đã cho tương đương với:

$$\sqrt{(2-x)(10-x)} - (x+2) = 2(\sqrt{(2-x)(5-x)} - (x+1))$$

Thực hiện trực thẳng căn(Kiểm chứng đk cho hai mẫu khác 0)

Ta có phương trình tương đương:

$$\frac{16(1-x)}{B+x+2} = \frac{18(1-x)}{A+x+1}$$

$$\text{Với } \sqrt{(2-x)(10-x)} = B \text{ và } \sqrt{(2-x)(5-x)} = A$$

$$\text{Pt gốc cho ta quan hệ: } 2A = B+x \quad (1)$$

Để ý loại đi nghiệm hiển nhiên thấy $x=1$ ta có

Phương trình cần giải còn lại là:

$$\frac{8}{B+x+2} = \frac{9}{A+x+1} \quad (2)$$

(1) và (2) lập thành 1 hệ phương trình như sau:

$$2A = B+x$$

$$8(A+x+1) = 9(B+x+2) \text{ Giải hệ trên ta suy ra:}$$

$$5B = 3x-10 \text{ Hay là } 5\sqrt{(2-x)(10-x)} = 3x-10 \text{ PT này quy về phương trình bậc 2, và}$$

HỆ KÌ DỊ & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

cuối cùng tìm được thêm 1 nghiệm nữa là:

$$x = \frac{15+5\sqrt{5}}{2} \text{ và } x = 1 \text{ (ban đầu)}$$

Các bạn hãy thử luyện tập bằng 1 vài bài dưới đây:

1) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2-1} + x = \sqrt{x^3-2}$$

2) Giải phương trình:

$$2\sqrt{x^3-7} - \sqrt[3]{x^2+4} = 0$$

3) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2-1} + \sqrt{3x^3-2} = 3x-2$$

4) Giải phương trình:

$$\sqrt[3]{x^2+4} = \sqrt{x-1} + 2x-3$$

Đây chỉ là một bài viết có tính giới thiệu 1 phương pháp có lẽ là khá lạ với các bạn, hy vọng nó sẽ giúp ích ít nhiều cho các bạn trong việc mở khóa các phương trình chứa căn thức.

Kummer

HỆ KÌ DỊ VÀ VAI TRÒ CỦA PHÉP THẾ

Cách đây không lâu tôi có đưa lên tuyển tập một số hệ phương trình kì dị, hôm nay tôi muốn giới thiệu sơ qua về một số cách giải đặc chủng đối với các hệ đó, nổi bật lên là vai trò của phép thế đại số.

Xin bắt đầu với 1 hệ rất đơn giản:

$$ax + by + cxy = d$$

$$ex^2 + fy^2 = g \quad (2) \text{ với } (a, b, c, d, e, f, g \text{ đều là tham số})$$

Giải:

Nhận xét: $ax + by + cxy = d$ tương đương với: $x(a + cy) = d - by \Leftrightarrow x = \frac{d - by}{a + cy} \quad (1)$

Thế (1) vào phương trình thứ (2) ta có phương trình này quy về:

$$\frac{d - by^2}{a + cy} + y^2 = g \text{ quy đồng mẫu số ta có đây là 1 phương trình bậc 4 cho } y.$$

Tiếp tục với 1 hệ phương trình có tính tổng quát cao hơn:

$$ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + g = 0 \quad (1)$$

$$hx^2 + jy^2 + kxy + lx + my + n = 0 \quad (2)$$

Với x, y là ẩn số:

Giải :

Ta coi (1) là 1 phương trình bậc 2 theo biến x còn y là tham số, ta có:

$$ax^2 + x(cy + d) + (by^2 + ey + g) = 0$$

Tính biệt số Delta thông thường ta suy ra được x theo dạng của:

$$x_1 = \alpha y - \beta \sqrt{P_1(y)} \text{ hoặc } x_2 = \alpha y + \beta \sqrt{P_1(y)}$$

Làm tương tự cho phương trình (2) ta cũng suy ra dạng của x_3, x_4

Bằng việc đồng nhất: $x_1 = x_3, x_1 = x_4$ ta lại suy về phương trình bậc 4 theo y. Giải ra ta có x, y. Tuy nhiên cách này tương đối dài và thực sự nó mang tính mỹ thuật không cao, nhưng có lẽ khó có cách nào giải các hệ dạng này hiệu quả bằng phương pháp trên.

Tuy vậy trong 1 vài trường hợp nhất định (như tôi sẽ nêu ra dưới đây) chúng ta có thể rút gọn được các hệ phương trình đã cho về dạng hệ đẳng cấp mà cách giải quen thuộc là sử dụng tính tiến nghiệm:

$$x^2 + 3y^2 - xy + x + 17y + 21 = 0$$

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 13x + 27y + 44 = 0$$

Lần đầu tiên khi nhìn thấy hệ này hồi lớp 12 quả thực tôi cũng " váng đầu ngất xỉu " nhưng người đem hệ này đố tôi, khẳng định có 1 lời giải rất đẹp cho nó. Và quả thực sau gần 1h suy nghĩ về nó tôi đã nắm được 1 đặc điểm của các hệ số trong hệ đã cho như sau:

Giả sử nếu ta đặt:

$x = X-1, y = Y-3$ thì phương trình đã cho quy về.

$$X^2 - XY + 3Y^2 = 4$$

$$2X^2 + 3XY + 4Y^2 = 3$$

Tại sao tôi lại nghĩ đến bước chuyển ẩn này? :

Dưới đây là câu trả lời:

Chiến thuật : **Bắt đầu nhìn đề bài** : Khi nhìn vào đề chúng ta có nên tự hỏi tại sao các hệ số lại lớn đến như vậy không? Nên chứ, các hệ số thậm chí là 21, 44.

Vậy người ra đề sáng tạo ra bài này trên cơ sở nào? Rõ ràng không thể dễ dàng hay là : " Từ trên trời rơi xuống " các hệ số này rồi. Như vậy vô hình chung điều chúng ta làm giờ đây là **đoán thử ý người ra đề**.

Thực vậy giả sử $x = X-a, y = Y-b$ ta dùng hệ số bất định để tìm hai hằng số a, b phù hợp để các hạng tử tự triệt tiêu rồi quy về phương trình đẳng cấp như đã nêu trên. Vậy câu trả lời ở đây đã có. Lưu ý điều này chỉ áp dụng cho 1 số ko lớn các hệ chứ không thể mang tính tổng quát, nhưng dấu sao đó vẫn là 1 kĩ thuật đáng lưu tâm.

Trên đây là 2 ví dụ cơ bản nhưng ít nhiều chúng ta có thể thấy vai trò của phép thế trong việc giải HPT.

Tiếp tục với 1 hệ khác mà có lẽ chúng ta đã khá quen thuộc:

Đề thi HSG Toán toàn quốc bằng A-1994

Giải hệ :

$$\sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) = 2$$

$$\sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) = 4\sqrt{2}$$

Phân tích đề bài:

Đặc điểm chung của cả hai phương trình trên là sự xuất hiện của hạng tử $\frac{1}{x+y}$ ta đặt

$$u = \frac{1}{x+y}$$

HỆ KÌ DI & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

Như vậy từ phương trình 1 ta có:

$$\sqrt{3}x = \frac{2}{2+u} \text{ như vậy:}$$

$$x = \frac{4}{3(2+u)^2}.$$

Tương tự ta cũng có:

$$y = \frac{32}{7(1-u)^2}$$

Từ đó suy ra: $x+y = \frac{1}{u} = \frac{4}{3(2+u)^2} + \frac{32}{7(1-u)^2}$ đây là 1 phương trình quy về phương trình hồi quy theo biến u sau khi quy đồng mẫu số, việc giải xin dành bạn đọc.

Tiếp theo, ta lại xét thêm 1 ví dụ khá đặc trưng:

$$\begin{aligned} x(x+y)^2 &= 9 \\ x(y^3-x^3) &= 7 \end{aligned}$$

Giải :

Rõ ràng, từ phương trình (1) ta suy ra x luôn dương theo điều này thì ở phương trình (2) ta cũng suy ra y luôn dương :

Thực hiện khai căn cả 2 vế của (1) ta có:

$$x+y = \frac{3}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow y = \frac{3}{\sqrt{x}} - x$$

Thế kết quả trên vào phương trình (2) ta có:

$$x\left(\frac{3}{\sqrt{x}} - x\right)^3 - x^3 = 7 \text{ chuyển biến: } t = \sqrt{x} \text{ ta có:}$$

Phương trình đã cho quy về:

$$f(t) = 2t^9 - 9t^6 + 27t^3 + 7t - 27 = 0 \text{ lưu ý, } t \text{ dương.}$$

Hay là:

$$f'(t) = 18t^8 - 54t^5 + 81t^2 + 7 \geq 0 \text{ như vậy } f(t) \text{ đồng biến, xét thấy } t=1 \text{ là nghiệm suy ra } t=1$$

là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho. Ứng với $t=1$ ta có: $x=1, y=2$.

Đây chỉ là 1 bài viết ngắn nhưng theo tôi là khá quan trọng đặc biệt ở phần đầu khi nói về hệ bậc 2 dạng đủ, điều này sẽ khá hữu ích với các bạn khi gặp những hệ dạng dưới đây:

1) [Tuyen tap he ki di](#)

2) [Anh Cuong-Moderator](#)

Trước khi giải bất cứ bài nào trong số các hệ dưới đây, theo tôi các bạn nên thử cố giải 3 hệ vô cùng đơn giản nhưng tổng quát để thấy được vai trò của phép thế trong việc giải hệ phương trình:

Hệ 1)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

Hệ 2)

$$\begin{aligned} a_1x + b_1y + c_1xy &= d_1 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

Hệ 3)

$$\begin{aligned} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 &= 0 \\ ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f &= 0 \end{aligned}$$

Với x, y là ẩn còn lại là tham số.

1) Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} xy &= \frac{z}{x} + 1 \\ \frac{1}{xz} &= \frac{z}{y} + 1 \\ \frac{1}{yz} &= \frac{y}{x} + 1 \end{aligned}$$

2) Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} x(x+y)^2 &= 9 \\ x(x^3 - y^3) &= 7 \end{aligned}$$

3) Cho trước : $a^2 = b^2 + c^2$

Giải hệ:

$$\begin{aligned} x^2 &= y^2 + z^2 \\ (x+a)^2 &= (y+b)^2 + (z+c)^2 \end{aligned}$$

4) Giải hệ:

$$\begin{aligned} xyz &= 8 \\ x^2y + y^2z + z^2x &= 73 \\ x(y-z)^2 + y(x-z)^2 + z(y-x)^2 &= 98 \end{aligned}$$

5) Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2^2 + x_3^3 &= 3 \\ x_2 + x_3^2 + x_4^3 &= 3 \\ x_3 + x_4^2 + x_5^3 &= 3 \\ x_4 + x_5^2 + x_1^3 &= 3 \\ x_5 + x_1^2 + x_2^3 &= 3 \end{aligned}$$

6) Giải hệ phương trình:

$$\begin{aligned} x^y &= z \\ y^z &= x \\ z^x &= y \end{aligned}$$

7) Giải hệ phương trình (HSG Toàn Quốc A-1994)

$$\begin{aligned} \sqrt{3x} \left(1 + \frac{1}{x+y} \right) &= 2 \\ \sqrt{7y} \left(1 - \frac{1}{x+y} \right) &= 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

8) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (x-1)(y^2+6) = y(x^2+1) \\ (y-1)(x^2+6) = x(y^2+1) \end{cases}$$

9) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+x)(1+x^2)(1+x^4) = 1+y^7 \\ (1+y)(1+y^2)(1+y^4) = 1+x^7 \end{cases}$$

10) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 - 4x^2 - 16x + 60 = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

11) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} x + y^2 + z^4 = 0 \\ y + z^2 + x^4 = 0 \\ z + x^2 + y^4 = 0 \end{cases}$$

Tương tự giải hệ:

12)

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3 \\ y + z^2 + x^3 = 3 \\ z + x^2 + y^3 = 3 \end{cases}$$

13) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} a+b+c+d+e = 0 \\ \sum a^3 = 0 \\ \sum a^5 = 10 \end{cases}$$

Với a,b,c,d,e thuộc [0,2]

14) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + 3x - 3 + \ln(x^2 - x + 1) = y \\ f(y) = z \\ f(z) = x \end{cases}$$

15) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} (1+4^{2x-y})5^{1-2x+y} = 1+2^{2x-y+1} \\ y^3 + 4x + 1 + \ln(y^2 + 2x) = 0 \end{cases}$$

16) Giải hệ phương trình:

$$\begin{cases} 5^x + 9^y = 86 \\ 2(5^x) + 9^{\frac{1}{y}} = 13 \end{cases}$$

Trở lại với một số bài dễ chịu hơn:

HỆ KÌ DỊ & PHƯƠNG PHÁP ĐẶT ẨN PHỤ - KUMMER.

17) Giải hệ phương trình:

$$x^2 + 3y^2 - xy - x + 17y + 21 = 0$$

$$2x^2 + 3xy + 4y^2 + 13x + 27y + 44 = 0$$

(Gợi ý nhằm nghiệm trước khi giải để có cách ẩn phụ thích hợp)

18) Giải hệ phương trình:

$$x^6 + 2x^4y^2 - 4x^3y^3 + 2x^2y^4 + y^6 = 2$$

$$x^6 + x^3y^3 + y^6 = 3$$

19) Giải hệ phương trình:

$$x^2 + y^2 = -y(x+z)$$

$$x^2 + x + y = -2yz$$

$$3x^2 + 6y^2 + 8xy + 8yz = 2x + 4z + 2$$

20) Giải hệ phương trình:

$$x^5 + x^3 - 1 = e^{y^5 + y^3 - 1}$$

$$y^5 + y^3 - 1 = e^{x^5 + x^3 - 1}$$