

ĐÁP ÁN CHÍNH THỨC
MÔN : TOÁN – KHỐI : 10

Câu 1 (4,0 điểm). Cho hai đa thức $P(x) = x^9 - x^5 + x - 4$ và $Q(x) = x^{13} - 4x^4 + 2x - 4$. Gọi x_0 là một nghiệm thực của đa thức $P(x)$.

- a) Chứng minh $0 < x_0 \leq \sqrt[5]{4}$.
b) Chứng minh $\sqrt[6]{2} < Q(x_0) < \sqrt[5]{4}$.

Nội dung	Điểm
a) Do x_0 là nghiệm của $P(x)$ suy ra $4 = x_0(x_0^8 - x_0^4 + 1) \Rightarrow x_0 > 0$. Ta có $x_0^5 + 4 = x_0^9 + x_0 \geq 2x_0^5 \Rightarrow x_0 \leq \sqrt[5]{4}$.	2,0
b) Khi đó $x_0^8 - x_0^4 + 1 = \frac{4}{x_0} \Rightarrow \frac{x_0^{12} + 1}{4} = \frac{x_0^4 + 1}{x_0} = x_0^3 + \frac{1}{3x_0} + \frac{1}{3x_0} + \frac{1}{3x_0} \geq \frac{4}{\sqrt[4]{27}} > \frac{4}{3}$ $\Rightarrow x_0^{12} > \frac{13}{3} > 4 \Rightarrow x_0 > \sqrt[6]{2}$.	1,0
Mà $Q(x) = (x^4 + 1)P(x) + x \Rightarrow \sqrt[6]{2} < Q(x_0) < \sqrt[5]{4}$.	1,0

Câu 2 (3,0 điểm). Kí hiệu $\mathbb{Z}$ là tập hợp các số nguyên. Tìm tất cả hàm số $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}$ sao cho $f(1) = \frac{5}{4}$ và với mọi số nguyên m, n thì $f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n)$.

Nội dung	Điểm
Kí hiệu $P(m; n)$ là phép thế cặp số $(m; n)$ vào mệnh đề $f(m+n) + f(m-n) = 2f(m)f(n)$. $P(0; 0) \Rightarrow 2f(0) = 2f^2(0) \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$.	0,5
Trường hợp 1 : $f(0) = 0$. $P(m; 0) \Rightarrow 2f(m) = 2f(m)f(0) = 0 \forall m \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ vô lý.	0,5
Trường hợp 2 : $f(0) = 1$. $P(0; n) \Rightarrow f(n) + f(-n) = 2f(0)f(n) \Rightarrow f(-n) = f(n) \forall n \in \mathbb{Z} \Rightarrow f$ là hàm chẵn. $P(m; 1) \Rightarrow f(m+1) = \frac{5}{2}f(m) - f(m-1) \forall m \in \mathbb{Z}$.	0,5
Ta chứng minh $f(n) = \frac{1}{2} \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right) \forall n \in \mathbb{N}$ bằng quy nạp. Thật vậy $n = 0; n = 1$ mệnh đề đúng.	0,5
Giả sử $f(n-1) = \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \right)$ và $f(n) = \frac{1}{2} \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right)$. Khi đó : $f(n+1) = \frac{5}{4} \left(2^n + \frac{1}{2^n} \right) - \frac{1}{2} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 2^n \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{4} \right) + \frac{1}{2^n} \left(\frac{5}{4} - 1 \right) = 2^n + \frac{1}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \left(2^{n+1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right)$ mệnh đề được chứng minh.	0,5
Từ đây ta được $f(n) = \frac{1}{2} (2^n + 2^{-n}) \forall n \in \mathbb{Z}$. Thử lại thấy đúng.	0,5

Câu 3 (4,0 điểm). Xét hai số nguyên tố p, q thay đổi sao cho tồn tại số nguyên dương n thỏa mãn đẳng thức

$$\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2}.$$

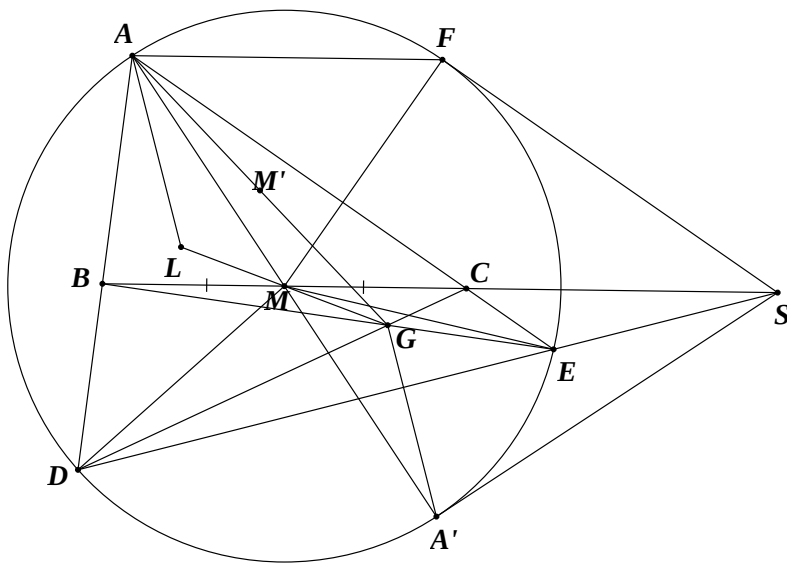
Tìm tập hợp giá trị của biểu thức $q-p$.

Nội dung	Điểm
Cách 1. $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2} \Leftrightarrow \frac{1}{p+1} - \frac{1}{q} = \frac{4}{n+2} \Leftrightarrow \frac{q-p-1}{(p+1)q} = \frac{4}{n+2}$	1,0
Có $q > p+1$ và $(q, q-p-1) = (q, p+1) = 1, (p+1, q-p-1) = (p+1, q) = 1$.	1,0
Vế trái là phân số tối giản nên $q-p-1 4$. Do đó $q-p \in \{2; 3; 5\}$.	1,0
Các bộ (p, q, n) thỏa mãn là $(3, 5, 78), (2, 5, 28), (2, 7, 19)$.	1,0

Nội dung	Điểm
Cách 2. Ta có $\frac{p}{p+1} + \frac{q+1}{q} = \frac{2n}{n+2} \Leftrightarrow 4pq + 2p + 2q + 2 = n(q-p-1)$.	1,0
Suy ra $q > p+1$ và $n = 4p + 2 + \frac{4(p+1)^2}{q-p-1}$.	1,0
Suy ra $q-p-1 4$ do $(q-p-1, p+1) = 1$. Do đó $q-p \in \{2; 3; 5\}$.	1,0
Các bộ (p, q, n) thỏa mãn là $(3, 5, 78), (2, 5, 28), (2, 7, 19)$.	1,0

Câu 4 (5,0 điểm). Cho tam giác ABC nhọn ($AB < AC$) có M là trung điểm BC . Giả sử đường tròn (M, MA) cắt các đường thẳng AB, AC lần lượt tại D, E (khác A).

- Chứng minh $BA \cdot BD = CA \cdot CE$.
- Đường thẳng qua A song song với BC cắt (M, MA) tại F (khác A). Chứng minh các đường thẳng BC, DE và tiếp tuyến tại F của (M, MA) đồng quy.
- Gọi G là giao điểm của các đường thẳng BE, CD và L là điểm đối xứng của G qua M . Chứng minh $LAC = MAB$.

Nội dung	Điểm
	
a) Ta có $BA \cdot BD = -\rho_{B(M)} = MA^2 - BM^2 = MA^2 - CM^2 = -\rho_{C(M)} = CA \cdot CE$.	1,0
b) Do $AF \parallel BC$ và $MB = MC$ nên $\angle FMCB = -1$.	0,5

Kẻ đường kính AA' của (M) . Ta có tứ giác $FEA'D$ điều hòa.	0,5
Gọi S là giao điểm các tiếp tuyến tại F, A' của (M, MA) . Suy ra DE đi qua S .	0,5
Ta có $FA \perp FA', MA = MA', MC \parallel AF$ nên MC là đường trung trực của $A'F$. Suy ra BC đi qua S . Vậy BC, DE và tiếp tuyến tại F của (M, MA) đồng quy tại S .	0,5
c) Gọi M' là trung điểm của AG thì MM' là đường trung bình của tam giác LAG nên $AL \parallel MM'$.	0,5
Ta có MM' đi qua trung điểm DE (đường thẳng Gauss) nên $MM' \perp DE$. Suy ra $AL \perp DE$.	1,0
Suy ra $LAC = 90^\circ - AED = MAB$.	0,5

Câu 5 (4,0 điểm). Trên bảng có viết các số $1; 2; 3; \dots; 2024$ gồm 2024 số nguyên dương đầu tiên. Người ta thực hiện liên tiếp thao tác sau : mỗi lần chọn tùy ý hai số x, y ở trên bảng sao cho $x \geq y + 2$ rồi xóa hai số này đi và thay bởi hai số $x - 1; y + 1$. Nếu từ các số trên bảng mà không thể thực hiện được thao tác như trên, ta gọi đó là trạng thái dừng.

- Chứng minh dù có thực hiện như thế nào theo quy luật trên thì sau hữu hạn thao tác cũng sẽ đạt được trạng thái dừng.
- Gọi S là số thao tác thực hiện để đạt trạng thái dừng. Tìm giá trị nhỏ nhất của S .

Nội dung	Điểm
a) Ở thời điểm thứ t , ta kí hiệu A_t là tổng bình phương các số trên bảng. Giả sử ta chọn hai số x, y với $x \geq y + 2$. Khi đó $A_{t+1} - A_t = (x-1)^2 + (y+1)^2 - x^2 - y^2 = -2x + 2y + 2 = -2(x - y - 1) \leq -2$.	1,0
Giả sử quá trình thực hiện được vô hạn lần, sau mỗi lần đại lượng A_t giảm ít nhất 2 đơn vị. Như vậy đến lúc nào đó đại lượng này sẽ nhận giá trị âm. Tuy nhiên đại lượng tổng bình phương luôn không âm $\Rightarrow$ vô lý. Vậy đến lúc nào đó sẽ đạt trạng thái dừng.	1,0
b) Ở trạng thái dừng, các số trên bảng hơn kém nhau không quá 1 đơn vị. Giả sử lúc đó có k số $n+1$ và $2024 - k$ số n với $0 \leq k < 2024$. Do tính bất biến của tổng các số trên bảng nên ta được : $k(n+1) + (2024 - k)n = 1 + 2 + \dots + 2024 = \frac{2024 \cdot 2025}{2} = 1012 \cdot 2025.$	0,5
$\Rightarrow k + 2024n = 2025 \cdot 1012 \Rightarrow 2024(1012 - n) = k - 1012$ Dễ thấy $ k - 1012 < 2024 \Rightarrow 1012 - n = 0 \Rightarrow k = n = 1012$. Như vậy trạng thái dừng bao gồm 1012 số 1012 và 1012 số 1013.	0,5
Để đạt trạng thái dừng thì số 1 phải chịu “tác động” ít nhất 1011 lần (để đến được số 1012), tương tự số 2 chịu “tác động” ít nhất 1010 lần, ..., số 1011 chịu “tác động” ít nhất 1 lần, số 1014 chịu “tác động” ít nhất 1 lần (để đến được số 1013), ..., số 2024 chịu “tác động” ít nhất 1011 lần. Do đó số sự “tác động” ít nhất là $2(1 + 2 + \dots + 1011) = 1010 \cdot 1011$. Tuy nhiên mỗi bước thực hiện thao tác thì “tác động” vào hai số. Do đó số thao tác thực hiện ít nhất là $\frac{1010 \cdot 1011}{2} = 505 \cdot 1011 \Rightarrow S \leq 505 \cdot 1011$.	0,5
Ta chỉ ra một cách thực hiện thao tác mà $S = 505 \cdot 1011$ như sau : Chọn hai số $(1; 2024)$ và thực hiện liên tiếp 1011 bước để đưa đến bộ $(1012; 1013)$. Chọn hai số $(2; 2023)$ và thực hiện liên tiếp 1010 bước để đưa đến bộ $(1012; 1013)$ Chọn hai số $(1011; 1014)$ và thực hiện 1 bước để đưa đến bộ $(1012; 1013)$. Khi đó số thao tác thực hiện là $S = 1 + 2 + \dots + 1011 = 505 \cdot 1011$. Vậy giá trị nhỏ nhất của S là $505 \cdot 1011$.	0,5