**Bài 4. HỆ TRỤC TỌA ĐỘ**

# I – LÝ THUYẾT

## 1. Trục và độ dài đại số trên trục

### a) Định nghĩa

* Trục tọa độ (hay gọi tắt là trục) là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm  gọi là điểm gốc và một vectơ đơn vị 
* Điểm  gọi là gốc tọa độ.
* Hướng của vecto đơn vị là hướng của trục.
* Ta kí hiệu trục đó là 



*M*

*O*

Cho  là một điểm tùy ý trên trục  Khi đó có duy nhất một số  sao cho  Ta gọi số  đó là tọa độ của điểm  đối với trục đã cho.

Cho hai điểm  và  trên trục  Khi đó có duy nhất số  sao cho  Ta gọi số  là độ dài đại số của vectơ  đối với trục đã cho và kí hiệu 

### b) Nhận xét.

 Nếu  cùng hướng với  thì  còn nếu  ngược hướng với  thì 

 Nếu hai điểm  và  trên trục  có tọa độ lần lượt là  và  thì 

## 2. Hệ trục tọa độ

### a) Định nghĩa.

Hệ trục tọa độ  gồm hai trục  và  vuông góc với nhau. Điểm gốc  chung của hai trục gọi là gốc tọa độ. Trục  được gọi là trục hoành và kí hiệu là  trục  được gọi là trục tung và kí hiệu là  Các vectơ  và  là các vectơ đơn vị trên  và  và  Hệ trục tọa độ  còn được kí hiệu là 





1

1

*y*

*x*

*O*

*O*

Mặt phẳng mà trên đó đã cho một hệ trục tọa độ  còn được gọi là mặt phẳng tọa độ  hay gọi tắt là mặt phẳng 

### b) Tọa độ của vectơ

Trong mặt phẳng  cho một vectơ  tùy ý. Vẽ  và gọi  lần lượt là hình chiếu của vuông góc của  lên  và  Ta có  và cặp số duy nhất  để  Như vậy 

Cặp số  duy nhất đó được gọi là tọa độ của vectơ  đối với hệ tọa độ  và viết  hoặc  Số thứ nhất  gọi là hoành độ, số thứ hai  gọi là tung độ của vectơ 

Như vậy











*A*





*O*

**Nhận xét.** Từ định nghĩa tọa độ của vectơ, ta thấy hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

Nếu  và  thì 

Như vậy, mỗi vectơ được hoàn toàn xác định khi biết tọa độ của nó.

### c) Tọa độ của một điểm

Trong mặt phẳng tọa độ  cho một điểm  tùy ý. Tọa độ của vectơ  đối với hệ trục  được gọi là tọa độ của điểm  đối với hệ trục đó.

Như vậy, cặp số  là tọa độ của điểm  khi và chỉ khi  Khi đó ta viết  hoặc  Số  được gọi là hoành độ, còn số  được gọi là tung độ của điểm  Hoành độ của điểm  còn được kí hiệu là  tung độ của điểm  còn được kí hiệu là 



*O*











Chú ý rằng, nếu  thì 

### d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng

Cho hai điểm  và  Ta có



## 3. Tọa độ của các vectơ

Ta có các công thức sau:

|  |
| --- |
| Cho  Khi đó:   * ; * ; |

**Nhận xét.** Hai vectơ  với  cùng phương khi và chỉ khi có một số  sao cho  và 

## 4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm của tam giác

**a)** Cho đoạn thẳng  có  Ta dễ dàng chứng minh được tọa độ trung điểm  của đoạn thẳng  là



**b)** Cho tam giác  có  Khi đó tọa độ của trọng tâm  của tam giác  được tính theo công thức



# II – DẠNG TOÁN

## Dạng toán 1. Tìm tọa độ của một điểm; tọa độ vectơ; độ dài đại số của vectơ và chứng minh hệ thức liên quan trên trục (O ; )

### Phương pháp áp dụng

Sử dụng các kiến thức cơ bản sau:

* Điểm M có tọa độ 
* Vectơ  có độ dài đại số là 
* Nếu a, b lần lượt là tọa độ của A, B thì 
* Các tính chất

+ 

+ 

+ 

### Bài tập:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1**. Trên trục tọa độ (O ; ) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là  –2 ; 1 và 4.  a) Tính tọa độ các vectơ  b) Chứng minh B là trung điểm của AC.  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Ta có  b) Ta có  suy ra B là trung điểm AC | | **🖎Lưu ý** | |
| **1.1** Trên trục tọa độ (O ; ) cho 3 điểm A ; B ; C có tọa độ lần lượt là 3; 1 và -4.Tính  **Lời giải** | **1.2** Trên trục tọa độ cho 2 điểm  có tọa độ lần lượt  và . Tọa độ trung điểm  của  là :  **Lời giải**  Tọa độ điểm  là: | | |
| **1.3** .Trên trục cho hai điểm M và N có tọa độ lần lượt là -5; 3. tìm tọa độ điểm P trên trục sao cho  **Lời giải**  Gọi điểm  có tọa độ là . |  | | |
| **Câu 2.**Trên trục tọa độ (O; ) cho 4 điểm  bất kỳ. Chứng minh  **🖎Lời giải tham khảo**  **Cách 1**: Giả sử tọa độ các điểm A, B, C, D lần lượt là a, b, c, d.  Ta có    Cộng vế với vế lại ta được  **Cách 2**: | | | **🖎Lưu ý** |
| **2.1** Trên trục tọa độ (O ; ) cho 4 điểm  có tọa độ lần lượt là . Chứng minh rằng .  **Lời giải** |  | | |
| **Câu 3.**Trên trục cho 3 điểm có tọa độ lần lượt là .Tìm điểm  sao cho  **🖎Lời giải tham khảo**  Gọi điểm  có tọa độ là . | | | **🖎Lưu ý** |
| **3.1** Trên trục , cho ba điểm  lần lượt có tọa độ là . Tìm tọa độ điểm  thỏa mãn .  **Lời giải**  Gọi điểm  có tọa độ là .    Vậy tọa độ điểm M là | **3.2** Trên trục , cho ba điểm  lần lượt có tọa độ là **.** Tìm tọa độ điểm  sao cho .  **Lời giải**  Gọi điểm  có tọa độ là .      Vậy tọa độ điểm I là | | |

## Dạng toán 2. Xác định tọa độ điểm tọa độ vecto

### Phương pháp áp dụng

* Để tìm tọa độ của vectơ  ta làm như sau

Dựng vectơ . Gọi  lần lượt là hình chiếu vuông góc của M lên . Khi đó  với 

* Để tìm tọa độ điểm A ta đi tìm tọa độ vectơ 
* Nếu biết tọa độ hai điểm  suy ra tọa độ  được xác định theo công

thức 

*Chú ý:*  nếu H nằm trên tia (hoặc  ) và  nếu H nằm trên tia đối tia (hoặc )

Với hai vecto  và , ta có:



### Bài tập:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1 *:*** Trong mặt phẳng tọa độ . Cho điểm .  Tìm tọa độ của các điểm  a)  đối xứng với M qua trục hoành  b)  đối xứng với M qua trục tung  c)  đối xứng với M qua gốc tọa độ  **🖎Lời giải tham khảo**(hình 1.32)  a)  đối xứng với M qua trục hoành suy ra  b)  đối xứng với M qua trục tung suy ra  c)  đối xứng với M qua gốc tọa độ suy ra | | **🖎Lưu ý** | |
| **1.1** Trong hệ trục tọa độ (O; ;  ), cho hình vuông  tâm I và có . Biết điểm B thuộc trục (O; ) và  cùng hướng với . Tìm tọa độ các vectơ  và  Hình 1.33  **Lời giải** | | |  |
| **Câu 2.**Viết tọa độ của các vectơ sau: .  **🖎Lời giải tham khảo**  Theo định nghĩa | **🖎Lưu ý** | | |
| **2.1** Viết dưới dạng  khi biết toạ độ của vectơ  là:  **Lời giải**  Với  Với | | | **2.2** Cho . Tìm toạ độ của các vectơ sau: .  **Lời giải**  Áp dụng công thức tọa độ của tổng, hiệu, tích vectơ với một số thì |
| * 1. Cho . Tìm toạ độ của vectơ  sao cho: .     **Lời giải** | | | * 1. Cho 3 điểm     Tìm tọa độ điểm  sao cho  là hình bình hành.  **Lời giải**  Gọi  là hình bình hành  Mà  Khi đó |
| **Câu 3.** Các điểm , ,  lần lượt là trung điểm các cạnh , ,  của tam giác . Tọa độ đỉnh  của tam giác là:  **🖎Lời giải tham khảo**    Ta có: là hình bình hành nên   . | **🖎Lưu ý** | | |
| **3.1**Cho 3 điểm A(-1; 3), B(2; 4), C(0; -1) là 3 đỉnh của tam giác  a)Cho điểm G(3; -2). Tìm tọa độ điểm M để G là trọng tâm của ∆ ABM  b) Tìm tọa độ điểm E sao cho  **Lời giải**   1. G là trọng tâm tam giác ABM   mà G(3; -2)  Nên:   Vậy: M(8; -13)  b) Ta có: \* = (2; 5) \*  Mà:   Vậy: E | | | **3.2** Trong mặt phẳng tọa độ , cho tam giác  có  và  thuộc trục ,trọng tâm  của tam giác nằm trên trục .Toạ độ của điểm  là  **Lời giải**  Ta có:  thuộc trục **,**  nằm trên trục  là trọng tâm tam giác nên ta có:  Vậy . |
| **3.3.** Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba điểm . Xác định điểm  trên cạnh  sao cho .  **Lời giải**  Vì E thuộc đoạn BC và  suy ra  Gọi  khi đó  Do đó  Vậy | | | **3.4.** Trong mặt phẳng tọa độ cho  Tìm tọa độ điểm đối xứng với điểm  qua điểm  **Lời giải**  Ta có: điểm đối xứng với điểm  qua điểm B nên là trung điểm của đoạn thẳng |
| **3.5.** Cho hình chữ nhật  có  là tâm của hình chữ nhật. Tọa độ trung điểm  là:  **Lời giải**  Ta có  là trung điểm  Vậy  Ta có . vậy  Tọa độ trung điểm của  là | | |  |

## Dạng toán 3. Sự cùng phương, cùng hướng của hai vecto

### Phương pháp áp dụng

* Cho  ; . Vectơ  cùng phương với vectơ  khi và chỉ khi có số  sao cho 

**Chú ý:** Nếu  ta có  cùng phương 

Sử dụng điều kiện cần và đủ sau:

\*Hai vectơ  cùng phương khi và chỉ khi có số k để 

### 2. Bài tập:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1**. Cho hình bình hành  có  và tâm . Biết điểm  nằm trên đường thẳng AB và điểm D có hoành độ gấp đôi tung độ. Tìm các đỉnh  của hình bình hành.  **🖎Lời giải tham khảo**  I là trung điểm AC nên  Gọi    Vì  cùng phương nên | | **🖎Lưu ý** | |
| **1.1**. Trong mặt phẳng tọa độ  cho 4 điểm  và . Tìm giao điểm của 2 đường thẳng  và .  **Lời giải**  Gọi  là giao điểm  và  suy ra  cùng phương và  cùng phương  Mặt khác  suy ra  (1)  suy ra  thế vào (1) ta có . Vậy  là điểm cần tìm. |  | | |
| **Câu 2.**Cho  và . Tìm m để hai vecto  cùng phương.  **🖎Lời giải tham khảo**  + Với : Ta có  Vì  nên hai vectơ không cùng phương  + Với : Ta có cùng phương khi và chỉ khi    Vậy với  và  là các giá trị cần tìm. | | | | **🖎Lưu ý** |
| **2.1** Cho . Đặt . Tìm  sao cho  cùng phương với  và  .  **Lời giải:**  Ta có  ;      cùng phương với  và  khi và chỉ khi có sô  sao cho  Do đó  Suy ra  hoặc | | **2.2** Trong hệ trục tọa độ (O;) .Cho tam giác ABC có A(2; 3), B(−1; −1), C(6; 0) Cho , ( m là số thực).Tìm m để  và cùng phương  **Lời giải:**  ;  và  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho | | |

## Dạng toán 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song

### 1. Phương pháp chung

\*Ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng khi và chỉ khi có số k để 

\*Để chứng minh đường thẳng AB song song với CD ta đi chứng minh  và điểm A không thuộc đường thẳng CD.

### 2. Bài tập:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1**.Cho . Điểm  trên trục  sao cho ba điểm thẳng hàng thì tọa độ điểm  là:  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có:  trên trục  Ba điểm  thẳng hàng khi  cùng phương với  Ta có . Do đó,  cùng phương với . Vậy . | | **🖎Lưu ý** | |
| **1.1**.Trong mặt phẳng , cho . Tìm giá trị  để  là ba điểm thẳng hàng?  **Lời giải**  Ta có: ,  Ba điểm  thẳng hàng khi và chỉ khi  cùng phương với | **1.2** Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba điểm . Xác định điểm  trên trục hoành sao cho ba điểm  thẳng hàng.  **Lời giải**  Vì  thuộc đoạn  và  suy ra  Gọi  khi đó  Do đó  Vậy . | | |
| **Câu 2.** Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba điểm .Chứng minh rằng .  **🖎Lời giải tham khảo**    Ta có  không cùng phương  không thẳng hàng (1)    Ta có  cùng phương  (2)  Từ (1) và (2) suy ra | | | | **🖎Lưu ý** |
| * 1. Trong mặt phẳng tọa độ , cho ba điểm .Chứng minh rằng .   **Lời giải**    Ta có  không cùng phương  không thẳng hàng (1)    Ta có  cùng phương  (2)  Từ (1) và (2) suy ra | |  | | |

## Dạng toán 6. Xác định tọa độ điểm thỏa mãn đẳng thức vecto

### Phương pháp chung

Dùng công thức tính tọa độ của vectơ

Với  ; và số thực k, khi đó  và 



### Bài tập:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1**.Trong mặt phẳng Oxy, cho hai điểm  và . Tìm tọa độ điểm M biết rằng  **🖎Lời giải tham khảo**  Gọi | | **🖎Lưu ý** |
| **1.1**. Trong mặt phẳng Oxy cho cho tam giác ABC với . Tìm tọa độ điểm I thỏa .  **Lời giải**  Gọi | **1.2**  Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm  Tìm tọa độ điểm D sao cho  **Lời giải**  Gọi  Có    Theo đề bài .  . | |

## Dạng toán 7 : Phân tích một vecto theo hai vecto không cùng phương

### Phương pháp áp dụng

Ta thực hiện theo các bước

Ta thực hiện theo các bước:

Bước 1: Giả sử  = α + β. (1)

Bước 2: Ta có α + β = α(a1, a2) + β(b1, b2) = (αa1 + βb1, αa2 + βb2).

Vậy (1) xảy ra khi và chỉ khi

. (I)

Giải (I), ta nhận được giá trị cặp (α, β)

Bước 3: Kết luận .

### Bài tập:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1.** Hãy biểu diễn vecto  theo các vecto  biết :    **🖎Lời giải tham khảo**  Giả sử  (1)  Ta có :  Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:  ⇔ .  Vậy, ta được . | | **🖎Lưu ý** |
| **1.1**. Cho bốn điểm A(1; 1), B(2; -1), C(4; 3) và D(16; 3). Hãy biểu diễn vectơ  theo các vectơ ,  **Lời giải:**  Giả sử  (1)  Ta có:  , ,  ⇒  Khi đó (1) xảy ra khi và chỉ khi:  ⇔ .  Vậy, ta được | **1.2**  Cho  a) Chứng minh hai vectơ  không cùng phương  b) Phân tích vectơ  qua  **Lời giải**  a) Ta cú  và  không cùng phương  b) Giả sử . Ta có  Suy ra | |

## Dạng toán 8. Tìm tham số thỏa mãn mối liên hệ về vecto

### Phương pháp chung

Sử dụng điều kiện hai vecto cùng phương, 3 điểm thẳng hàng, sự bằng nhau của hai vecto để tìm ra giá trị của tham số

### Bài tập:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1**.Trong mặt phẳng Oxy, cho .Tìm m, n để  **🖎Lời giải tham khảo** | | **🖎Lưu ý** | |
| **1.1**.Cho .Tìm giá trị m thỏa mãn  **Lời giải**  Ta có    Ta có: . | **1.2**  Cho .  Tìm 2 số *m, n* sao cho: .  **Lời giải**    Ta có  Mà  . | | |
| **Câu 2.** Cho =(4; -m); =(2m+6; 1). Tìm tất cả các giá trị của m để 2 vectơ cùng phương  **🖎Lời giải tham khảo**  và  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho | | | | **🖎Lưu ý** |
| **2.1** Cho 3 vecto . Tìm m để  cùng phương với  **Lời giải**  Ta có  và  cùng phương khi và chỉ khi tồn tại số k sao cho | |  | | |
| **Câu 3.** Cho ba điểm  Tìm  để ba điểm  thẳng hàng.  **🖎Lời giải tham khảo**  .  Ba điểm  thẳng hàng | | **🖎Lưu ý** | | |
| **3.1** Trong mặt phẳng , cho  . Tìm giá trị  để  là ba điểm thẳng hàng?  **Lời giải**  Ta có: ,  Ba điểm  thẳng hàng khi và chỉ khi  cùng phương với  . | | **3.2.** Trong hệ tọa độ , cho hai điểm  Tìm tọa độ điểm  trên trục hoành sao cho  thẳng hàng.    **Lời giải**  Điểm  Ta có  và  thẳng hàng | | |
| **3.3.**  Cho 3 điểm A(3; 4); B(2; 5) và C(1; 5). Tìm m để (-7; m) thuộc đường thẳng AB.  **Lời giải**  Gọi .  thuộc đường thẳng AB khi và chỉ khi A, B, C thẳng hàng  Ta có  và  thẳng hàng | |  | | |

Contents

[I – LÝ THUYẾT 1](#_Toc521645473)

[1. Trục và độ dài đại số trên trục 1](#_Toc521645474)

[a) Định nghĩa 1](#_Toc521645475)

[b) Nhận xét. 1](#_Toc521645476)

[2. Hệ trục tọa độ 1](#_Toc521645477)

[a) Định nghĩa. 1](#_Toc521645478)

[b) Tọa độ của vectơ 1](#_Toc521645479)

[c) Tọa độ của một điểm 2](#_Toc521645480)

[d) Liên hệ giữa tọa độ của điểm và tọa độ của vectơ trong mặt phẳng 2](#_Toc521645481)

[3. Tọa độ của các vectơ  2](#_Toc521645482)

[4. Tọa độ trung điểm của đoạn thẳng. Tọa độ trọng tâm của tam giác 3](#_Toc521645483)

[II – DẠNG TOÁN 3](#_Toc521645484)

[Dạng toán 1. Tìm tọa độ của một điểm; tọa độ vectơ; độ dài đại số của vectơ và chứng minh hệ thức liên quan trên trục (O ; ) 3](#_Toc521645485)

[1. Phương pháp áp dụng 3](#_Toc521645486)

[2. Bài tập: 3](#_Toc521645487)

[Dạng toán 2. Xác định tọa độ điểm tọa độ vecto 5](#_Toc521645488)

[1. Phương pháp áp dụng 5](#_Toc521645489)

[2. Bài tập: 6](#_Toc521645490)

[Dạng toán 3. Sự cùng phương, cùng hướng của hai vecto 9](#_Toc521645491)

[1. Phương pháp áp dụng 9](#_Toc521645492)

[2. Bài tập: 10](#_Toc521645493)

[Dạng toán 4. Chứng minh 3 điểm thẳng hàng, hai đường thẳng song song 11](#_Toc521645494)

[1. Phương pháp chung 11](#_Toc521645495)

[2. Bài tập: 11](#_Toc521645496)

[Dạng toán 6. Xác định tọa độ điểm thỏa mãn đẳng thức vecto 13](#_Toc521645497)

[1. Phương pháp chung 13](#_Toc521645498)

[2. Bài tập: 13](#_Toc521645499)

[Dạng toán 7 : Phân tích một vecto theo hai vecto không cùng phương 13](#_Toc521645500)

[1. Phương pháp áp dụng 13](#_Toc521645501)

[2. Bài tập: 14](#_Toc521645502)

[Dạng toán 8. Tìm tham số thỏa mãn mối liên hệ về vecto 14](#_Toc521645503)

[1. Phương pháp chung 14](#_Toc521645504)

[2. Bài tập: 14](#_Toc521645505)