BÀI 3. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VÉCTƠ

A. Lí thuyết:

**1. *Phép nhân một vectơ với một số thực:***

- Là một véc tơ kí hiệu là k.

- Hướng : cùng hướng với  nếu k > 0 và ngược hướng với  nếu k < 0

- Độ dài 

*- Điều kiện để ba điểm thẳng hàng:* Ba điểm A, B, C thẳng hàng



Tính chất :

; ; 

hoặc 

2.***Hệ thức trung điểm - trọng tâm***

***a) Hệ thức trung điểm:***

Cho đoạn thẳng AB, I là trung điểm của đoạn AB . Khi đó : 

Với mọi điểm M: ⇔  ⇔ 

b) ***Hệ thức trọng tâm:***Cho tam giác ABC. Gọi G là trọng tâm của tam giác.Điều kiện cần và đủ để G là trọng tâm tam giác ABC là 

Với mọi điểm O:

⇔  ⇔ 

**B.Bài tập:**

***Dạng 1: Chứng minh hai vectơ bằng nhau:***

*Phương pháp giải:*

* *Dùng định nghĩa hai vectơ bằng nhau: *
* *Sử dụng tính chất hình bình hành*

***Các ví dụ:***

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1**.**:** Cho  và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho:  **🖎Lời giải tham khảo**  Vẽ d đi qua O và // với giá của  (nếu O ∈ giá của  thì d là giá của )  − Trên d lấy điểm M sao cho OM=3| |, và  cùng hướng khi đó .  − Trên d lấy điểm N sao cho ON= 4||,  và  ngược hướng nên | **🖎Lưu ý:** |
| **Ví dụ 2.**  Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho AM=AB. Tìm k trong các đẳng thức sau:      **Lời giải**  **🖎Lời giải tham khảo**    a) , vì ⇒ k=  Tương tự, ta có:  b) k= −  c) k= − | **🖎Lưu ý:** |
| **Ví dụ 3.** Chứng minh:vectơ đối của  là  **🖎Lời giải tham khảo** | ***3.1:***  Tìm vectơ đối của các véctơ  **🖎Lời giải tham khảo** |

***Dạng 2: Chứng minh đẳng thức vectơ***

***Phương pháp giải:***

* *Biến đổi vế trái thành vế phải hoặc biến đổi vế phải thành vế trái.*
* *Biến đổi tương đương.*
* *Sử dụng tính chất bắc cầu.*

Sử dụng các quy tắc:

– Qui tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành,quy tắc phép trừ để phân tích các vectơ.

– Các hệ thức thường dùng như: hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm tam giác.

– Tính chất của các hình

**Các ví dụ:**

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Cho 4 điểm  là trung điểm .Chứng minh:  a)  b) 2 =  +  =  + .  **🖎Lời giải tham khảo**  A  B  C  D  N  M  a)Ta có thể trình bày theo các cách sau:  *Cách 1*: Ta có phân tích:  =  +  + , (1)  =  +  + . (2)  Cộng theo vế (1) và (2) với lưu ý  +  =  và  +  =  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:  +  = 2, đpcm. (\*)  *Cách 2*: Ta có phân tích:  , (3)  , (4)  Cộng theo vế (3) và (4) với lưu ý  và  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:  2 =  + , đpcm.  b) Ta có:  + =  +  +  +  =  +  (\*\*)  Từ (\*) và (\*\*) ta được đẳng thức cần chứng minh |  |
| **Ví dụ 2**: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh: .  **🖎Lời giải tham khảo**  Áp dụng qui tắc hình bình hành ta có  ⇒ VT=(đpcm) |  |
| ***Ví dụ 3****: Cho* O *là tâm của hình bình hành* ABCD. *Chứng minh rằng với điểm* M *bất kì, ta có*:  = ( +  +  + ).  *Giải*  Ta có:  +  +  +  =  +  +  +  +  +  +  +  = 4 + ( + ) + ( + ) = 4  ⇔ ( +  +  + ) = , đpcm. | ***Ví dụ 3.1:*** Cho tứ giác . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:  a)  b)  với M là điểm bất kì  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Theo hệ thức trung điểm ta có  Mặt khác O là trung điểm IJ nên  Suy ra  đpcm  b)Theo câu a ta có  do đó với mọi điểm M thì |
| **3.2:** Chứng minh rằng nếu G và G’ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A’B’C’ thì .  **🖎Lời giải tham khảo** | ***3.3****: Cho* ΔABC. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng*:  +  +  = .  **✍ Lời giải tham khảo**  Sử dụng quy tắc trung điểm ta biến đổi:  VT =  +  +  = , đpcm. |
| ***3.5:*** Cho tam giác  có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng  a)  b)  c)  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Dễ thấy  nếu tam giác  vuông  Nếu tam giác không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó  (vì cùng vuông góc với AC)  (vì cùng vuông góc với AB)  Suy ra  là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì  (1)  Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên  (2)  Từ (1) và (2) suy ra  b) Theo câu a) ta có    đpcm  c) Vì G là trọng tâm tam giác  nên    Mặt khác theo câu b)  ta có  Suy ra | ***3.4:*** Cho hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G. Gọi  lần lượt là trọng tâm tam giác . Chứng minh rằng  **🖎Lời giải tham khảo**  Vì  là trọng tâm tam giác  nên  Tương tự  lần lượt là trọng tâm tam giác  suy ra  và  Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có    Mặt khác hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G nên  và  Suy ra |

**Dạng 3 : Phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1****: Cho* ΔABC. *Gọi* M *là trung điểm của* AB *và* N *là một điểm trên cạnh* AC, *sao cho* NC = 2NA. *Gọi* K *là trung điểm của* MN.   * 1. *Chứng minh rằng*  =  + .   *b. Gọi* D *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng*  =  + .  **✍ Lời giải tham khảo**   1. Từ giả thiết ta nhận thấy:   ⇔  = 2;  ⇔  = 3.  Vì K là trung điểm MN nên:  = ( + ) = ( + ) =  + , đpcm.  b)Vì D là trung điểm BC nên:  = ( + )  từ đó, suy ra:  =  - = ( + ) - ( + ) =  + , đpcm. | **1.1:** Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt . Hãy phân tích các vectơ  theo hai vectơ .  **✍ Lời giải tham khảo**  Ta có  A |
| **1.2:** Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho MB= 2MC. Hãy phân tích vectơ  theo hai vectơ  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có  mà  ⇒ | ***1.3:*** Cho tam giác  , trên cạnh BC lấy M sao cho , trên đoạn AM lấy N sao cho . G là trọng tâm tam giác .  a) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  b) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Theo giả thiết ta có:  và          b) Vì G là trọng tâm tam giác  nên  suy ra  Ta có |
| ***1.4:*** Cho hình bình hành . Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho  và G là trọng tâm tam giác . Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có:    Vì G là trọng tâm tam giác nên  Suy ra |  |

**Dạng 4: Tính độ dài véctơ tổng, hiệu, tích với 1 số**

**Phương pháp giải.**

**- Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.**

* Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựngvectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng

**Các ví dụ.**

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác đều  cạnh . điểm  là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.  a)  b)  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Do  suy ra theo quy tắc ba điểm ta có    Vậy  b) Vì  nên theo quy tắc trừ ta có  Theo định lí Pitago ta có    Vậy | 1.1: Cho tam giác đều  cạnh . điểm  là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.  a)  b)  **🖎Lời giải tham khảo**  a) Gọi  là trung điểm ,  là điểm đối xứng của  qua  và  là đỉnh của hình bình hành .  Khi đó ta có  suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có  Gọi  là hình chiếu của  lên  Vì  Xét tam giác vuông  ta có    Ta lại có  Áp dụng định lí Pitago trong tam giác  ta có    Vậy  b) Gọi  là điểm nằm trên đoạn  sao cho ,  thuộc tia  sao cho .  Khi đó  Do đó  Ta có ,  Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông  ta có    Vậy | | |
| *1.2: Cho* ΔOAB *vuông cân với* OA = OB = a. *Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng*:  A  B  C  O  a. 3 + 4  b. + 2.5  **✍ 🖎Lời giải tham khảo**   1. Để dựng vectơ 3 + 4 ta lần lượt thực hiện:   +)Trên tia OA lấy điểm A1 sao cho OA1 = 3OA.  +)Trên tia OB lấy điểm B1 sao cho OB1 = 4OB.  +)Dựng hình chữ nhật OA1C1B1.  Từ đó, ta có:  3 + 4 = + =  ⇒ ⏐3 + 4⏐ = ⏐⏐ = OC1 = = 5a.   1. Thực hiện tương tự câu c), ta dựng được vectơ   + 2.5 và  ⏐ + 2.5⏐ = . | | ***Chú ý***: Với các em học sinh chưa nắm vững kiến thức về tổng của hai vectơ thì thường kết luận ngay rằng:  ⏐ + ⏐ = ⏐⏐ + ⏐⏐ = a + a = 2a. | |
| ***Ví dụ 2:*** Cho hình vuông  cạnh .  a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.  b) Tính độ dài vectơ  **🖎Lời giải tham khảo**  Hình 1.15  a) Gọi  là tâm hình vuông.  Theo quy tắc ba điểm ta có    Mà  nên  Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M  b) Lấy điểm  trên tia sao cho  khi đó  do đó  Mặt khác  Suy ra | | |  |

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 1:** Cho hình vuông  cạnh .

a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ 

**Bài 2:** Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho , *,*

a) Biểu diễn các vectơ  theo các vectơ và

b) Biểu diễn các vectơ, theo các vectơ và

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

**Bài 3:** Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi 

a)Tính theo  và **.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác 

**Bài 4.** Cho tam giác  có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho  và J là điểm trên BC kéo dài sao cho .

a) Hãy phân tích  theo  và .

b) Hãy phân tích  theo  và .

**Bài 5:** Cho hai vectơ  không cùng phương. Tìm x sao cho

a)  và  cùng phương

b)  và  cùng hướng

**DẠNG 5: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ**

**1. Phương pháp giải.**

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả "  với  là hai vectơ không cùng phương "

**Các ví dụ.**

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác . Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết .  Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành.  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có:    là hình bình hành. |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn:  Chứng minh rằng  là tam giác đều.  **🖎Lời giải tham khảo**  G là trọng tâm tam giác  nên  Suy ra    Vì  và  là hai vecơ không cùng phương, do đó (\*) tương đương với:  hay tam giác  đều. |  |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn . Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác .  **🖎Lời giải tham khảo**  Giả sử  Suy ra  và  Mặt khác A' là trung điểm của BC nên  Do đó    hay  Vì  không cùng phương suy ra  do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB  Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác . |  |

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 6:** Cho  có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn . Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 7:** Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn . Chứng minh J là trung điểm của CD.

**Bài 8:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác  . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác .

**§3 HƯỚNG DẪN GIẢ BÀI TẬP TỰ LUYỆN TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

**Bài 1:** Gọi  là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có



Mà  nên 

Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) 

**Bài 2:** a) 

b) 

M, N, P thẳng hàng

**Bài 3:** a) 

b)  suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

**Bài 4:**  a) Ta có:



b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:





**Bài 5:**  a)  cùng phương với  có số thực k sao cho 



b)  cùng phương với  có số thực k dương sao cho 



**Bài 6:** Ta có 



AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 7:**  

Gọi K là trung điểm DC suy ra  do đó  hay J là trung điểm của CD.

**Bài 8:** G là trọng tâm tam giác  nên 

Do đó 

Suy ra G là trực tâm tam giác 