

TUYỂN TẬP
ĐỀ THI HỌC SINH GIỎI THPT CẤP TỈNH
MÔN TOÁN



ĐỒNG THÁP
TỪ NĂM HỌC 2000-2001
ĐẾN NĂM HỌC 2008-2009

<http://kinhhoa.violet.vn>

Nguyễn Đức Tuấn
(NDTuanMAT)

Tháng 9 Năm 2009

ĐỀ THI NĂM HỌC 2000 - 2001

Ngày thi: 25 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Cho dãy số xác định như sau:

$$u_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i(i+1)(i+2)(i+3)}; \forall n \in \mathbb{N} \text{ và } n \geq 1.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Bài 2: Cho phương trình: $y^3 - 9y^2 + 11y - \frac{1}{3} = 0$ (1)

- Chứng minh rằng $\tan^2 10^\circ$; $\tan^2 50^\circ$; $\tan^2 70^\circ$ là 3 nghiệm phân biệt của phương trình (1).
- Tính $P = \tan^6 10^\circ + \tan^6 50^\circ + \tan^6 70^\circ$.

Bài 3: Tìm tất cả các đa thức $P(x)$ có hệ số nguyên sao cho ta có:

$$x.P(x-20) = (x-2000).P(x); \forall x \in \mathbb{Z}.$$

Bài 4: Cho hình chóp $S.ABC$ đỉnh S ; $SA = x$; $SB = y$; $SC = z$.

- Chứng minh rằng $V_{S.ABC} = x.y.z.V_{S.A'B'C'}$; với $SA' = SB' = SC' = 1$ đơn vị dài. A' ; B' ; C' nằm tương ứng trên các tia SA ; SB ; SC .
- Xác định x, y, z để diện tích xung quanh của hình chóp $S.ABC$ bằng $3k^2$ (k là số thực cho trước) và thể tích của nó lớn nhất.

Bài 5: Cho a, b, c là 3 số thực dương và $ab + bc + ca = abc$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{a^2 + 2b^2}}{ab} + \frac{\sqrt{b^2 + 2c^2}}{bc} + \frac{\sqrt{c^2 + 2a^2}}{ca} \geq \sqrt{3}.$$

ĐỀ THI NĂM HỌC 2001 - 2002

Ngày thi: 24 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Cho 3 số thực dương a, b, c thỏa điều kiện $abc = 1$.

Chứng minh rằng:

$$\frac{1+ab^2}{c^3} + \frac{1+bc^2}{a^3} + \frac{1+ca^2}{b^3} \geq \frac{18}{a^3+b^3+c^3}.$$

Bài 2: Cho x, y là 2 số thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} x-2y-1 \leq 0 \\ x+3y-6 \leq 0 \\ 2x+y-2 \geq 0 \end{cases}$$

- Chứng minh: $x^2 + y^2 \leq 10$.
- Tìm tất cả các giá trị của x, y để: $x^2 + y^2 = 10$.

Bài 3: Cho phương trình: $x^n + x^{n-1} + x^{n-2} + \dots + x^2 + x - 1 = 0$ (1), n nguyên dương.

- Chứng minh rằng với mỗi n thì phương trình (1) có nghiệm dương duy nhất x_n .
- Tìm $\lim_{x \rightarrow +\infty} x_n$.

Bài 4: Cho tam giác ABC có $BC > CA > AB$. Gọi D là một điểm nằm trên đoạn BC . Trên phần nối dài của BA về phía A chọn điểm E . Biết rằng $BD = BE = CA$. Gọi P là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tam giác EBD với cạnh AC . Gọi Q là giao điểm thứ hai của BP với đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC . Chứng minh rằng:

- Tam giác AQC và tam giác EPD là hai tam giác đồng dạng.
- Ta có: $BP = AQ + CQ$.

Bài 5: Cho 3 tia Ox, Oy, Oz vuông góc với nhau đôi một tạo thành góc tam diện $Oxyz$.

Điểm M cố định nằm trong góc tam diện. Một mặt phẳng (α) qua M cắt Ox, Oy, Oz lần lượt tại A, B, C . Gọi khoảng cách từ M đến các mặt phẳng $(OBC), (OCA), (OAB)$ lần lượt là a, b, c .

- Chứng minh tam giác ABC là tam giác nhọn.
- Tính OA, OB, OC theo a, b, c để thể tích tứ diện $OABC$ là nhỏ nhất.

ĐỀ THI NĂM HỌC 2002 - 2003

Ngày thi: 24 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1:

a. Cho 4 số thực dương a, b, c, d . Chứng minh rằng:

$$\frac{a^4}{(a+b)(a^2+b^2)} + \frac{b^4}{(b+c)(b^2+c^2)} + \frac{c^4}{(c+d)(c^2+d^2)} + \frac{d^4}{(d+a)(d^2+a^2)} \geq \frac{a+b+c+d}{4}$$

b. Cho 6 số thực dương a, b, c, d, e, f . Chứng minh rằng:

$$\sqrt{(a+b+c)^2 + (d+e+f)^2} \leq \sqrt{a^2+d^2} + \sqrt{b^2+e^2} + \sqrt{c^2+f^2}.$$

Bài 2: Kí hiệu $\mathbb{N}^*$ là tập các số nguyên dương. Tìm tất cả các hàm $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau:

$$(i): f(n+1) > f(n)$$

$$(ii): f(f(n)) = n + 2002, \forall n \in \mathbb{N}^*$$

Bài 3: Cho dãy $\{a_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} a_1 = a_2 = 1; a_3 = 2 \\ a_{n+3} = \frac{a_{n+2}a_{n+1} + p}{a_n} \text{ với } p \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

Định p để mọi số hạng của dãy $\{a_n\}$ đều là số nguyên.

Bài 4: Cho đa thức $f(x) = x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n$ là đa thức bậc $n \geq 2$ có các nghiệm thực $b_1, b_2, \dots, b_n$. Cho $x > b_i, \forall i = 1 \dots n$. Chứng minh:

$$f(x+1) \left(\frac{1}{x-b_1} + \frac{1}{x-b_2} + \dots + \frac{1}{x-b_n} \right) \geq 2n^2.$$

Bài 5: Cho tứ diện $ABCD$ có các cạnh xuất phát từ A đôi một vuông góc với nhau. Gọi a là cạnh lớn nhất xuất phát từ A và r là bán kính hình cầu nội tiếp tứ diện. Chứng minh rằng:

$$a \geq (3 + \sqrt{3})r.$$

ĐỀ THI NĂM HỌC 2003 - 2004

Ngày thi: 23 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Giải phương trình sau:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-x^2}} \left[\sqrt{(1-x)^3} - \sqrt{(1+x)^3} \right] = 2 + \sqrt{1-x^2}.$$

Bài 2:

a. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của $(x+y+z)$ biết: $y^2 + yz + z^2 = 1 - \frac{3}{2}x^2$.

b. Tìm các số nguyên a, b, c thỏa mãn bất đẳng thức:

$$a^2 + b^2 + c^2 + 3 < ab + 3b + 2c.$$

Bài 3: Trong tam giác ABC ta dựng các đường phân giác trong AA', BB', CC' ; giao điểm A', B', C' lần lượt thuộc các cạnh BC, CA, AB . Các giao điểm này lập thành tam giác $A'B'C'$. Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{A'B'C'}}{S_{ABC}} = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

Bài 4: Cho Z là tập các số nguyên. Cho hàm $f: Z \rightarrow Z$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i): f(-1) = f(1)$$

$$(ii): f(x) + f(y) = f(x + 2xy) + f(y - 2xy)$$

với mọi $x, y \in Z$.

a. Chứng minh $f(-n) = f(n), \forall n \in \mathbb{N}$.

b. Tìm tất cả các hàm f có tính chất nói trên.

ĐỀ THI NĂM HỌC 2004 - 2005

Ngày thi: 14 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Với 3 số thực x, y, z tùy ý, ta đặt:

$$S = x + y + z; \quad P = xy + yz + zx; \quad Q = xyz.$$

a. Chứng minh: $x^3 + y^3 + z^3 = S^3 - 3SP + 3Q$.

b. Hãy biểu diễn $x^4 + y^4 + z^4$ theo S, P và Q .

Bài 2: Tìm đa thức $f(x)$ có tất cả các hệ số đều là số nguyên không âm nhỏ hơn 9 và thỏa mãn $f(9) = 2004$.

Bài 3: Cho hai hình vuông $ABCD$ và $ABEF$ có cạnh AB là cạnh chung. Hai mặt phẳng $(ABCD)$ và $(ABEF)$ vuông góc với nhau. Tìm vị trí đường vuông góc chung của hai đường thẳng AE và BD .

Bài 4: Với số nguyên dương $a = \overline{a_1 a_2 \dots a_k}$, $k \in \mathbb{N}^*$, ta đặt:

$$T(a) = a_1 + a_2 + \dots + a_k \quad (\text{tổng các chữ số của } a)$$

Dãy số $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ xác định như sau:

$$\begin{cases} x_1 = (T(2004))^{2004} \\ x_n = (T(x_{n-1}))^{2004} \end{cases}$$

Chứng minh rằng dãy $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ bị chặn.

Bài 5: Tam giác ABC có 3 góc nhọn nội tiếp trong đường tròn tâm O bán kính R . Cho $AB = c; BC = a; CA = b$. Chọn I là điểm bất kì trong tam giác ABC ; gọi x, y, z là các khoảng cách từ I đến các cạnh BC, CA, AB . Chứng minh:

$$\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} \leq \sqrt{\frac{a^2 + b^2 + c^2}{2R}}.$$

ĐỀ THI NĂM HỌC 2005 - 2006

Ngày thi: 9 tháng 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Tính tổng:

$$S = \tan 1^0 \cdot \tan 2^0 + \tan 2^0 \cdot \tan 3^0 + \dots + \tan 2004^0 \cdot \tan 2005^0.$$

Bài 2:

a. Cho $P(x)$ là đa thức với hệ số nguyên sao cho:

$|P(a)| = |P(b)| = |P(c)| = 1$ với a, b, c là các số nguyên đôi một khác nhau. Chứng minh phương trình $P(x) = 0$ không có nghiệm nguyên.

b. Tìm một đa thức $f(x)$ bậc 5 sao cho $f(x) - 1$ chia hết cho $(x-1)^3$ và $f(x)$ chia hết cho x^3 .

Bài 3:

a. Tổng của 2 số nguyên dương bằng 2310. Chứng minh rằng tích của hai số này không chia hết cho 2310.

b. Tìm nghiệm nguyên (x, y) của phương trình $y = 2x + \sqrt{y^2 + 2(2x+1)y + 8x}$.

Bài 4:

a. Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (O) . Các đường thẳng vẽ qua A, B, C đôi một song song, cắt đường tròn (O) tại các điểm A_1, B_1, C_1 (khác với A, B, C). Chứng minh rằng trục tâm các tam giác A_1BC, B_1CA, C_1AB thẳng hàng.

b. Cho tam giác ABC đều cạnh bằng 2 đơn vị dài. Đường thẳng (d) không đi qua bất kì đỉnh nào của tam giác. Gọi α, β, γ là góc giữa (d) và theo thứ tự với các đường thẳng đi qua các cạnh BC, CA, AB của tam giác đều ABC . Tính:

$$M = \sin^2 \alpha \cdot \sin^2 \beta \cdot \sin^2 \gamma + \cos^2 \alpha \cdot \cos^2 \beta \cdot \cos^2 \gamma.$$

Bài 5: Cho dãy $\{u_n\}$, n nguyên dương, xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \frac{u_n^2 - u_n}{2005} + u_n \end{cases}. \text{Đặt } S_n = \sum_{i=1}^n \frac{u_i}{u_{i+1} - 1}.$$

Tìm $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

ĐỀ THI NĂM HỌC 2006 - 2007

Ngày thi: 22 tháng 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1: Tìm tổng của các số nguyên dương từ m đến n , kể cả m và n ($m < n$), suy ra tổng các số giữa 1000 và 2000 mà không chia hết cho 5.

Bài 2: Tìm tất cả các số thực x sao cho $k = \frac{x+2}{x^2+4x+5}$ là số nguyên.

Bài 3: Chứng minh rằng nếu a, b, c là 3 cạnh của một tam giác tương ứng với các đỉnh A, B, C thì:

$$\frac{a+b-2c}{\sin \frac{C}{2}} + \frac{b+c-2a}{\sin \frac{A}{2}} + \frac{c+a-2b}{\sin \frac{B}{2}} \geq 0.$$

Bài 4: Tìm tất cả các đa thức dạng $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$, với a, b, c là các số nguyên, sao cho a, b, c là nghiệm của $f(x)$.

Bài 5: Cho $F(1) = F(2) = 1, F(n+2) = F(n+1) + F(n)$ và hàm số $f(x) = \frac{1}{1+x}$.

Đặt: $G_n(x) = x + f(x) + f(f(x)) + \dots + f(f(\dots f(x)\dots))$, trong số hạng sau cùng f lặp

lại n lần. Chứng minh: $G_n(1) = \frac{F(1)}{F(2)} + \frac{F(2)}{F(3)} + \dots + \frac{F(n+1)}{F(n+2)}$.

Bài 6: Từ điểm P nằm ngoài đường tròn cho trước kẻ hai tiếp tuyến tiếp xúc với đường tròn lần lượt tại A và B . Chọn điểm S nằm trên dây cung AB . Tia PS cắt cung nhỏ

AB tại R và cắt cung lớn AB tại Q . Chứng minh: $PS = \frac{2PR \cdot PQ}{PR + PQ}$.

Bài 7: Chứng minh rằng mọi số nguyên dương n tùy ý luôn biểu diễn dưới dạng tổng của các số hạng $2^r 3^s$ với r, s là các số nguyên không âm.

ĐỀ THI NĂM HỌC 2007 - 2008

Ngày thi: 14 tháng 10

Thời gian làm bài: 180 phút

Bài 1:

- Tìm tất cả các số nguyên m sao cho phương trình $x^2 + (m^2 - m)x - m^3 + 1 = 0$ có một nghiệm nguyên.
- Giải bất phương trình: $\left| \log_2 (\sqrt{2} - 1)^x + 3 \right| + \left| 1 - \log_2 (\sqrt{2} + 1)^x \right| \leq 2$.

Bài 2:

- Giải phương trình: $4 \sin^2 5x - 4 \sin^2 x + 2(\sin 6x + \sin 4x) + 1 = 0$.
- Cho các số thực $x_1, x_2, \dots, x_n$ thỏa mãn $\sin^2 x_1 + 2 \sin^2 x_2 + \dots + n \sin^2 x_n = a$, với n là số nguyên dương, a là số thực cho trước, $0 \leq a \leq \frac{n(n+1)}{2}$. Xác định các giá trị của $x_1, x_2, \dots, x_n$ sao cho tổng $S = \sin 2x_1 + 2 \sin 2x_2 + \dots + n \sin 2x_n$ đạt giá trị lớn nhất và tìm giá trị lớn nhất này theo a và n .

Bài 3:

- Cho 3 số thực a, b, c thỏa $abc = 1$. Chứng minh:
$$\frac{1}{a^6(b^2 + c^2)} + \frac{1}{b^6(c^2 + a^2)} + \frac{1}{c^6(a^2 + b^2)} \geq \frac{3}{2}.$$
- Cho tam giác ABC nhọn thỏa mãn điều kiện:
$$\frac{\cot A(\cot A + 2 \cot B)}{2 \cot\left(\frac{A+B}{2}\right) + \cot B} = 2 \cot\left(\frac{A+B}{2}\right) - \cot B.$$
 Chứng minh tam giác ABC là tam giác cân.

Bài 4: Cho tam giác ABC , trên các cạnh BC, CA, AB lần lượt lấy các điểm A', B', C' sao cho AA', BB' và CC' đồng quy tại điểm M . Gọi S_1, S_2, S_3 lần lượt là diện tích của các tam giác MBC, MCA, MAB và đặt $\frac{MA'}{MA} = x, \frac{MB'}{MB} = y, \frac{MC'}{MC} = z$.
Chứng minh rằng: $(y + z - 1)S_1 + (x + z - 1)S_2 + (x + y - 1)S_3 = 0$.

Bài 5: Cho dãy $\{u_n\}$, n là số nguyên dương, xác định như sau:

$$\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{\sqrt{1+u_n^2}-1}{u_n}, u_n > 0 \end{cases}.$$

Tính u_n và chứng minh rằng: $u_1 + u_2 + \dots + u_n \geq 1 + \frac{\pi}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} \right]$.

Bài 6: Cho đa thức $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + b$ có 3 nghiệm x_1, x_2, x_3 và đa thức $g(x) = x^3 + bx^2 + bx + a$. Tính tổng: $S = g(x_1) + g(x_2) + g(x_3)$ theo a, b .

ĐỀ THI NĂM HỌC 2008 - 2009

Ngày thi: 16 tháng 11

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Giải phương trình: $\frac{2\sqrt{3}}{3}(\tan x - \cot x) = \tan^2 x + \cot^2 x - 2$.

Câu 2: Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm I . Gọi D là trung điểm của cạnh AB , E là trọng tâm của tam giác ADC . Chứng minh rằng nếu $AB = AC$ thì IE vuông góc với CD .

Câu 3: Tìm nghiệm nguyên dương của phương trình:
 $x^2 - 2y^2 = 1$.

Câu 4: Cho dãy số $\{x_n\}$, $n \in \mathbb{N}^*$ được xác định bởi:

$$\begin{cases} x_1 = 1 \\ x_{n+1} = \frac{x_n^{2008}}{2008} + x_n \end{cases} \text{ . Tìm giới hạn của dãy } u_n \text{ với:}$$
$$u_n = \frac{x_1^{2007}}{x_2} + \frac{x_2^{2007}}{x_3} + \dots + \frac{x_n^{2007}}{x_{n+1}} \text{ .}$$

Câu 5: Cho n là số tự nhiên, chứng minh rằng: $\left(C_0^n\right)^2 + \left(C_1^n\right)^2 + \dots + \left(C_n^n\right)^2 = C_{2n}^n$.

Câu 6:

a. Cho $x, y, z \geq 1$ và $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 2$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{x+y+z} \geq \sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} + \sqrt{z-1}.$$

b. Cho đa thức $f(x) = x^3 - 3x - 1$ có 3 nghiệm là a, b, c . Hãy tính:

$$S = \frac{1+a}{1-a} + \frac{1+b}{1-b} + \frac{1+c}{1-c}.$$

Câu 7: Cho điểm $A(0;3)$ và parabol $(P): y = x^2$. Gọi M là một điểm thuộc (P) có hoành độ $x_M = a$. Tìm a để độ dài AM là ngắn nhất. Từ đó chứng tỏ rằng nếu đoạn AM là ngắn nhất thì AM vuông góc với tiếp tuyến tại M của (P) .

PHỤ LỤC

ĐỀ THI CHỌN ĐỘI TUYỂN DỰ THI CẤP QUỐC GIA NĂM HỌC 2008 – 2009

Ngày thi: 14 tháng 12

Thời gian làm bài: 180 phút

Câu 1: Giải phương trình: $(1 + \tan 1^\circ)(1 + \tan 2^\circ) \dots (1 + \tan 45^\circ) = 2^x$.

Câu 2: Cho tam giác ABC có các góc đều nhọn. Gọi AH, BI, CK là các đường cao của tam giác ABC . Chứng minh rằng:

$$\frac{S_{HIK}}{S_{ABC}} = 1 - \cos^2 A - \cos^2 B - \cos^2 C.$$

Câu 3: Cho a, b là hai số nguyên. Chứng minh rằng:

$$A = ab(a^2 + b^2)(a^2 - b^2) \text{ chia hết cho } 30.$$

Câu 4: Cho hàm số $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$ thỏa mãn hai điều kiện:

$$\begin{cases} f(ab) = f(a) \cdot f(b) \\ f(p+q) = f(p) + f(q) \end{cases} \text{ . Trong đó } a, b \in \mathbb{N}^*, (a, b) = 1 \text{ và } p, q \text{ là số nguyên tố.}$$

Chứng minh rằng: $f(2008) = 2008$.

Bài 5: Chứng minh rằng nếu n chẵn thì 2^n chia hết (*)

$$C_{2n}^0 + 3C_{2n}^2 + \dots + 3^k C_{2n}^{2k} + \dots + 3n C_{2n}^{2n}.$$

Bài 6: Cho 3 số thực a, b, c . Chứng minh rằng:

$$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) \geq (ab + bc + ca - 1)^2.$$

Bài 7: Cho tam giác ABC cân tại A . Đường tròn (C) tiếp xúc với đường thẳng AB, AC lần lượt tại B, C . M là điểm tùy ý nằm trên đường tròn (C) . Gọi d_1, d_2, d_3 lần lượt là các khoảng cách từ M đến các đường thẳng AB, AC, BC . Chứng minh: $d_1 \cdot d_2 = d_3^2$.

(*) hiểu là: $C_{2n}^0 + 3C_{2n}^2 + \dots + 3^k C_{2n}^{2k} + \dots + 3n C_{2n}^{2n}$ chia hết cho 2^n