

Câu 1. (4,0 điểm)

$$A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

1) Rút gọn biểu thức

$$B = \frac{2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 2x + 3}{3x^3 - 10x^2 - 2x + 2} \quad \text{với } x \text{ thỏa mãn } \frac{x+1}{x^2+3x+8} = \frac{1}{7}$$

2) Tính giá trị biểu thức

$$x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - m - 3 = 0(1)$$

Câu 2. (4,0 điểm) Cho phương trình (với x là ẩn số)

a) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

b) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$

Câu 3. (4,0 điểm)

$$\begin{cases} \frac{4}{2x+y+1} + \frac{3}{3x+y+2} = 4 \\ \frac{5x+2y+3}{(2x+y+1)(3x+y+2)} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

a) Giải hệ phương trình :

$$(\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3)=4x$$

b) Giải phương trình

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định, (O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A và B thuộc đường tròn (O)), PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC, E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng :

a) $PF \cdot PC = PI \cdot PO$

b) E là trung điểm của đoạn thẳng AH

c) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d

Câu 5. (2,0 điểm)

a) Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $2x^2y + 3xy + x + y = x^2 + 2xy^2 + 3x + 1$

b) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x > 0, 5x^2 = yz, x + y + z = xyz$

$$x \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$$

Chứng minh rằng :

ĐÁP ÁN

Câu 1. (4,0 điểm)

$$A = \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix}$$

3) Rút gọn biểu thức

$$\begin{aligned} A &= \left(\frac{x+4\sqrt{x}+4}{x+\sqrt{x}-2} + \frac{x+\sqrt{x}}{1-x} \right) : \left(\frac{1}{\sqrt{x}+1} - \frac{1}{1-\sqrt{x}} \right) \begin{pmatrix} x > 0 \\ x \neq 1 \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{(\sqrt{x}+2)^2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-1)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)} \right) : \frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x}+1}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} \\ &= \left[\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}-1} - \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1} \right] : \frac{2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)}{2\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

4) Tính giá trị biểu thức

$$B = \frac{2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 2x + 3}{3x^3 - 10x^2 - 2x + 2} \quad \text{với } x \text{ thỏa mãn } \frac{x+1}{x^2+3x+8} = \frac{1}{7}$$

$$\frac{x+1}{x^2+3x+8} = \frac{1}{7} \Leftrightarrow x^2 + 3x + 8 = 7x + 7 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{2x^4 - 3x^3 - 15x^2 - 2x + 3}{3x^3 - 10x^2 - 2x + 2} = \frac{(2x^4 - 8x^3 + 2x^2) + (5x^3 - 20x^2 + 5x) + (3x^2 - 12x + 3) + 5x}{(3x^3 - 12x^2 + 3x) + (2x^2 - 8x + 2) + 3x} \\ &= \frac{2x^2(x^2 - 4x + 1) + 5x(x^2 - 4x + 1) + 3(x^2 - 4x + 1) + 5x}{3x(x^2 - 4x + 1) + 2(x^2 - 4x + 1) + 3x} = \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

Câu 2. (4,0 điểm) Cho phương trình $x^2 - (3m-2)x + 2m^2 - m - 3 = 0$ (1) (với x là ẩn số)

c) Chứng minh rằng phương trình luôn có nghiệm với mọi m

$$x^2 - (3m - 2)x + 2m^2 - m - 3 = 0 \quad (1)$$

$$\Delta = (3m - 2)^2 - 4 \cdot (-2m - m - 3) = 17x^2 - 8x + 16 = \left(\sqrt{17}x - \frac{4}{\sqrt{17}} \right)^2 + \frac{256}{17} > 0 (\forall x)$$

Vậy (1) luôn có hai nghiệm phân biệt

d) Xác định m để phương trình có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 = 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3m - 2 \Rightarrow x_1 = 3m - 2 - x_2 \\ x_1 x_2 = -2m^2 - m - 3 \end{cases}$$

Theo Vi-et và đề ta có:

Có $x_1 = 3x_2 \Leftrightarrow x_1 = 3x_2 = 3m - 2 - x_2$

$$\Rightarrow 4x_2 = 3m - 2 \Rightarrow x_2 = \frac{3m - 2}{4} \Rightarrow x_1 = \frac{9m - 6}{4}$$

Ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases} \frac{3m - 2}{4} + \frac{9m - 6}{4} = 3m - 2 \quad (1) \\ \frac{3m - 2}{4} \cdot \frac{9m - 6}{4} = -2m^2 - m - 3 \end{cases} \quad (\text{nghiệm đúng với mọi } m)$$

Vậy với mọi m phương trình (1) luôn có nghiệm $x_1 = 3x_2$

Câu 3. (4,0 điểm)

c) Giải hệ phương trình :
$$\begin{cases} \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{3}{3x + y + 2} = 4 \\ \frac{5x + 2y + 3}{(2x + y + 1)(3x + y + 2)} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4}{2x + y + 1} + \frac{3}{3x + y + 2} = 4 \\ \frac{5x + 2y + 3}{(2x + y + 1)(3x + y + 2)} = \frac{5}{4} \end{cases} \quad \begin{cases} a = 2x + y + 1 \\ b = 3x + y + 2 \end{cases} (a, b \neq 0) \Rightarrow (1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{a} + \frac{3}{b} = 4 \\ \frac{a + b}{ab} = \frac{5}{4} \end{cases}$$

. Đặt $\Leftrightarrow \begin{cases} 3a + 4b = 4ab \\ 4a + 4b = 5ab \end{cases} \Rightarrow a = ab \Leftrightarrow a(1 - b) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \Rightarrow b = 0 \text{ (ktm)} \\ b = 1 \Rightarrow a = 4 \end{cases}$

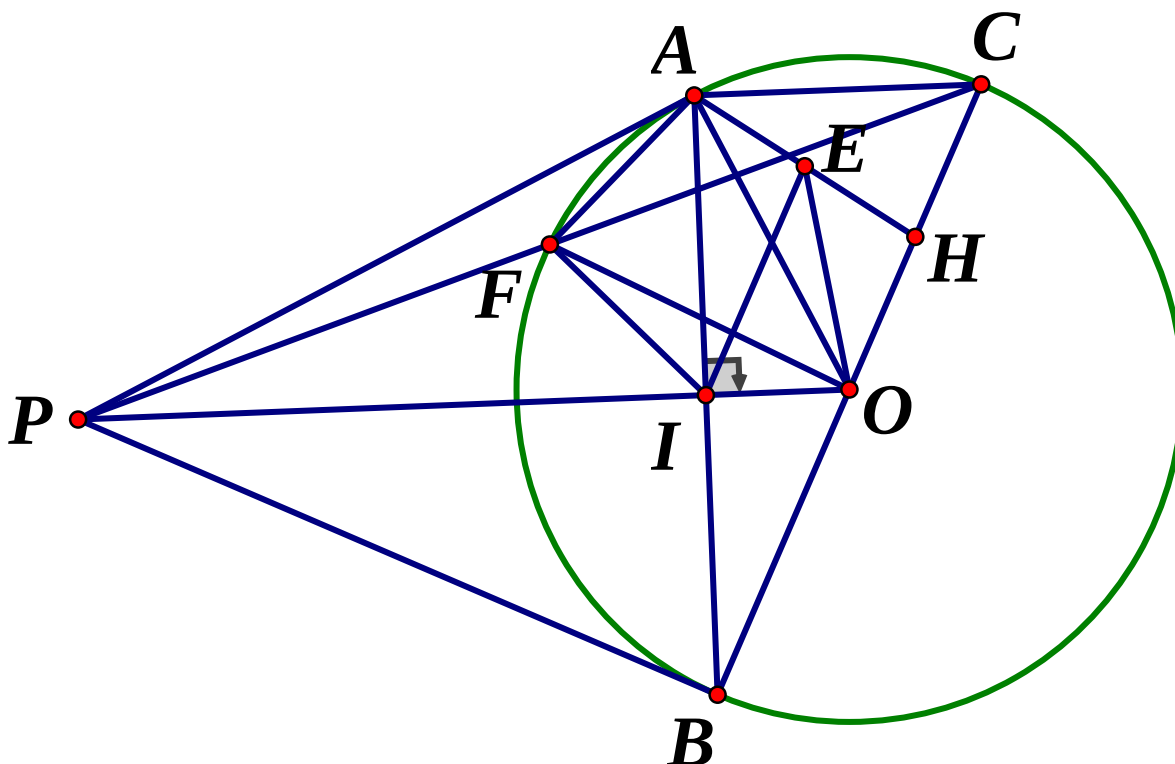
$$\Rightarrow \begin{cases} 2x + y + 1 = 4 \\ 3x + y + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4 \\ y = -11 \end{cases}$$

d) Giải phương trình $(\sqrt{9 - 2x} + 3)(\sqrt{2x + 9} - 3) = 4x$

$$\begin{aligned}
& (\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3)=4x \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{9-2x}+3)(\sqrt{2x+9}-3)(\sqrt{2x+9}+3)=4x(\sqrt{2x+9}+3) \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{9-2x}+3)(2x+9-9)=4x(\sqrt{2x+9}+3) \Leftrightarrow 2x[(\sqrt{9-2x}+3)-2(\sqrt{2x+9}+3)]=0 \\
& \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ [(\sqrt{9-2x}+3)-2(\sqrt{2x+9}+3)]=0 \end{cases} \\
& \Leftrightarrow (\sqrt{9-2x}+3)-2(\sqrt{2x+9}+3)=0 \Rightarrow 9-2x=4(2x+9)+12\sqrt{2x+9}+9 \\
& \Leftrightarrow -(5x+18)=6\sqrt{2x+9} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x+18 \leq 0 \\ (5x+18)^2=36(2x+9) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-\frac{108}{25} \end{cases}
\end{aligned}$$

Câu 4. (6,0 điểm)

Cho đường tròn (O) và đường thẳng d cố định, (O) và d không có điểm chung). Điểm P di động trên đường thẳng d , từ P vẽ hai tiếp tuyến PA, PB (A và B thuộc đường tròn (O)), PO giao AB tại I. Gọi H là chân đường vuông góc hạ từ điểm A đến đường kính BC, E là giao điểm của hai đường thẳng CP và AH . Gọi F là giao điểm thứ hai của đường thẳng CP và đường tròn (O). Chứng minh rằng :



a) $PF.PC = PI.PO$

$\Delta PFI \sim \Delta POC (c.g.c) \Rightarrow \angle PFI = \angle POC (1)$
Xét

$$\Rightarrow \frac{PF}{PO} = \frac{PI}{PC} \Rightarrow PF.PC = PO.PI$$

c) **E là trung điểm của đoạn thẳng ^{AH}**

Vì $\angle AHO + \angle AIO = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow PIOH$ là tứ giác nội tiếp
 $\Rightarrow \angle IAH + \angle IOH = 180^\circ$ hay $\angle IAE + \angle POC = 180^\circ (2)$

$\angle PFI + \angle EFI = 180^\circ (3)$
Mà

Từ (1), (2), (3) suy ra $\angle IAF = \angle EFI \Rightarrow IFAE$ là tứ giác nội tiếp $\Rightarrow \angle AFE = \angle AIE$

Xét (O): $\angle AFE = \angle ABC$ (cùng chắn cung ^{AC}) $\Rightarrow \angle AIE = \angle ABC$

Mà hai góc này ở vị trí đồng vị nên $IE \parallel BC$ hay $IE \parallel AM$

Xét ΔABH có I là trung điểm AB, $IE \parallel AH$ nên IE là đường trung bình

Vậy ^E là trung điểm của AH

c) Điểm I luôn thuộc một đường cố định khi P di động trên d

Gọi M là chân đường vuông góc hạ từ O lên đường thẳng d . Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng OM, AB

Xét $\triangle OIK$ & $\triangle OMP$ có $\angle POM$ chung, $\angle OIK = \angle OMP = 90^\circ$

$$\Rightarrow \triangle OIK \sim \triangle OMP \Rightarrow \frac{OK}{OP} = \frac{OI}{OM} \Leftrightarrow OK = \frac{OP \cdot OI}{OM}$$

Mặt khác $OP \cdot OI = OB^2 \Rightarrow OK = \frac{OB^2}{OM}$ cố định, K thuộc OM cố định suy ra điểm K cố định

Mà $\angle OIK = 90^\circ$ với mọi vị trí của M

Vậy khi M di động trên d thì I di động trên đường tròn đường kính OK cố định

Câu 5. (2,0 điểm)

d) Tìm nghiệm nguyên của phương trình : $2x^2y + 3xy + x + y = x^2 + 2xy^2 + 3x + 1$

$$2x^2 + 2xy + y^3 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 + x(x-1) = 2 (*)$$

Vì $(x+y)^2 \geq 0$ nên để $x, y \in \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} (x+y)^2 = 1 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \text{ (ktm)} \\ (x+y)^2 = 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow x(x-1) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow y=-2 \\ x=-1 \Rightarrow y=1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Vậy } (x; y) \in \{(2; -2); (-1; 1)\}$$

e) Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn các điều kiện $x > 0, 5x^2 = yz, x + y + z = xyz$

Chứng minh rằng : $x \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$

$$x + y + z = xyz \Leftrightarrow x + y + z = x \cdot 5x^2 \Leftrightarrow y + z \geq 2\sqrt{yz} = 2\sqrt{5x^2} = 2x\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow 5x^3 - x = y + z \geq 2x\sqrt{5} \Leftrightarrow x(5x^2 - 2\sqrt{5} - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1+2\sqrt{5}}{5}$$

$$\Rightarrow x \geq \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}}$$

Dấu bằng xảy ra khi $\begin{cases} x = \sqrt{\frac{1+2\sqrt{5}}{5}} \\ y = z = \sqrt{5}x = \sqrt{1+2\sqrt{5}} \end{cases}$