

Người làm: Nguyễn Thị Hường

Zalo: Nguyễn Hường - số đt zalo: 0978010892

Email: nguyenthihuongthcsbaoson@gmail.com

CD3: CÁC BÀI TOÁN VỀ LŨY THỪA SỐ TỰ NHIÊN

Dạng 1. So sánh hai lũy thừa (không có)

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Dạng 2. So sánh biểu thức lũy thừa với một số (so sánh hai biểu thức lũy thừa)

A. Trắc nghiệm (nếu có)

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thanh Thủy 2022 - 2023)

Cho biểu thức $N = \frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \dots + \frac{99}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}}$. Khẳng định đúng là

- A.** $N < \frac{3}{16}$. **B.** $N > \frac{3}{16}$. **C.** $\frac{3}{16} < N < \frac{3}{4}$. **D.** $N > \frac{3}{4}$.

Lời giải

Chọn A

Ta có:

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3N &= 1 - \frac{2}{3} + \frac{3}{3^2} - \frac{4}{3^3} + \dots + \frac{99}{3^{98}} - \frac{100}{3^{99}} \\ \Rightarrow 4N &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} - \frac{100}{3^{100}} < 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} M &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \dots + \frac{1}{3^{98}} - \frac{1}{3^{99}} \\ \text{Đặt} \\ \Rightarrow 3M &= 3 - 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} = 2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^{97}} - \frac{1}{3^{98}} \\ 4M &= 3 - \frac{1}{3^{99}} < 3 \Rightarrow M < \frac{3}{4} \end{aligned} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2)} \Rightarrow 4N < M < \frac{3}{4} \Rightarrow N < \frac{3}{16}$$

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Thiệu Hóa 2022 - 2023)

Cho $C = \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{2023^2}$. Chứng minh rằng $C < \frac{3}{4}$.

Lời giải

Ta có:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3.3} &< \frac{1}{2.3} \\ \frac{1}{4.4} &< \frac{1}{3.4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots \\ & \frac{1}{2023 \cdot 2023} < \frac{1}{2022 \cdot 2023} \\ & C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{2022 \cdot 2023} \\ \text{Suy ra} & \\ & C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2022} - \frac{1}{2023} \\ & C < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2023} < \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \\ \text{Vậy} & \quad C < \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Câu 2. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho biết $a_1 = 1$; $a_2 = 1 + \frac{1}{2}$; $a_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$; ...; $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$. Chứng minh rằng:

$$\frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \frac{1}{3a_3^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 2$$

với mọi số tự nhiên n lớn hơn 1.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Với mọi } k \geq 2, \text{ ta có: } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k} \text{ (vì } a_k > a_{k-1}) \\ & \text{Ta có: } \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} = \frac{a_k - a_{k-1}}{a_{k-1} \cdot a_k} = \frac{1}{k \cdot a_{k-1} \cdot a_k} \\ & \text{Suy ra } \frac{1}{k \cdot a_k^2} < \frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k} \\ & \text{Cho } k=2; k=3; \dots; k=n \text{ ta có:} \\ & \frac{1}{2a_2^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}; \frac{1}{3a_3^2} < \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}; \dots; \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \\ & \text{Cộng theo vế ta được:} \\ & \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} = 1 \\ & \Rightarrow \frac{1}{a_1^2} + \frac{1}{2a_2^2} + \dots + \frac{1}{na_n^2} < 1 + 1 = 2 \quad (\text{đpcm}). \end{aligned}$$

Dạng 3. Một số bài toán khác

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Ninh Bình 2022 - 2023)

Cho biểu thức $A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}}$. Tính giá trị biểu thức $B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}}$.

Lời giải

$$\begin{aligned} & \text{Ta có:} \\ & A = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \\ & \Rightarrow 3A = -1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 3A + A = \left(-1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} - \frac{1}{3^4} + \dots + \frac{1}{3^{99}} \right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^4} - \frac{1}{3^5} + \dots + \frac{1}{3^{100}} \right)$$

$$\Rightarrow 4A = \frac{1}{3^{100}} - 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right)$$

$$\text{Do } 3^{100} > 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} < 1 \Rightarrow \frac{1}{3^{100}} - 1 < 0 \Rightarrow A = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) < 0 \Rightarrow |A| = -A$$

$$B = 4|A| + \frac{1}{3^{100}} = -4A + \frac{1}{3^{100}} = -4 \cdot \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = - \left(\frac{1}{3^{100}} - 1 \right) + \frac{1}{3^{100}} = -\frac{1}{3^{100}} + 1 + \frac{1}{3^{100}} = 1$$

Vậy $B = 1$.

Câu 2. (HSG 7 Trường THCS Nguyệt Ấn –TP Vinh 2022 - 2023)

Cho $A = 1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000}$ và $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002}$. Tính tỉ số $\frac{A}{B}$.

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000}$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot A = 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2000} + 2^{2004}$$

$$\Rightarrow 2^4 \cdot A - A = (2^4 + 2^8 + \dots + 2^{2000} + 2^{2004}) - (1 + 2^4 + 2^8 + \dots + 2^{1996} + 2^{2000})$$

$$\Rightarrow 15A = 2^{2004} - 1$$

$$\Rightarrow A = \frac{2^{2004} - 1}{15}$$

Lại có: $B = 1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002}$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot B = 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2002} + 2^{2004}$$

$$\Rightarrow 2^2 \cdot B - B = (2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2002} + 2^{2004}) - (1 + 2^2 + 2^4 + \dots + 2^{2000} + 2^{2002})$$

$$\Rightarrow 3B = 2^{2004} - 1$$

$$\Rightarrow B = \frac{2^{2004} - 1}{3}$$

$$\frac{A}{B} = \frac{\frac{2^{2004} - 1}{15}}{\frac{2^{2004} - 1}{3}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$$

Suy ra:

$$\frac{A}{B} = \frac{1}{5}$$

Vậy $\frac{A}{B} = \frac{1}{5}$.

Câu 3. (HSG 7 Phòng GD&ĐT TP Thủ Đức 2022 - 2023)

Cho $D = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$. Tìm $x \in \mathbb{N}$ biết $2D + 3 = 3^x$.

Lời giải

$$\text{Ta có: } D = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023}$$

$$\Rightarrow 3D = 3^2 + 3^3 + 3^4 + \dots + 3^{2022} + 3^{2023} + 3^{2024}$$

$$\Rightarrow 2D = 3D - D = 3^{2024} - 3$$

$$\text{Mà } 2D + 3 = 3^x \text{ nên } 3^{2024} - 3 + 3 = 3^x \Rightarrow 3^{2024} = 3^x \Rightarrow x = 2024$$

Vậy $x = 2024$.

Câu 4. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Huyện Vũ Thư 2022 - 2023)

Cho biểu thức $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$. Tìm số tự nhiên n để: $2C + 1 = 3^{2023}$

Lời giải

Ta có: $C = 1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n$

$$\Rightarrow 3C = 3(1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C = 3C - C = (3 + 3^2 + \dots + 3^{n+1}) - (1 + 3 + 3^2 + \dots + 3^n) = 3^{n+1} - 1$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{n+1} - 1 + 1 = 3^{n+1}$$

$$\Rightarrow 2C + 1 = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow 3^{n+1} = 3^{2023}$$

$$\Rightarrow n + 1 = 2023$$

$$\Rightarrow n = 2022$$

Vậy $n = 2022$

Câu 5. (HSG 7 Phòng GD&ĐT Huyện Bình Lục 2022 - 2023)

Tìm số dư của $A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{89} + 4^{90}$ khi chia cho 21.

Lời giải

Ta có:

$$A = 1 + 4 + 4^2 + 4^3 + \dots + 4^{89} + 4^{90}$$

$$= 1 + (4 + 4^2 + 4^3) + (4^4 + 4^5 + 4^6) + \dots + (4^{88} + 4^{89} + 4^{90})$$

$$= 1 + 4(1 + 4 + 4^2) + 4^4(1 + 4 + 4^2) + \dots + 4^{88}(1 + 4 + 4^2)$$

$$= 1 + 4 \cdot 21 + 4^4 \cdot 21 + \dots + 4^{88} \cdot 21$$

$$= 1 + 21 \cdot (4 + 4^4 + \dots + 4^{88})$$

Ta có 1 chia 21 dư 1

$$21 \cdot (4 + 4^4 + \dots + 4^{88}) \text{ chia } 21 \text{ dư } 0 \text{ (Vì } 21 \cdot (4 + 4^4 + \dots + 4^{88}) : 21 \text{)}$$

Vậy A chia 21 dư 1. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>