

## TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ

**Câu 1:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|      |           |      |     |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$ | $+$       |

Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-2; 0)$ .      **B.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .  
**C.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .      **D.** Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$ .

**Lời giải**

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng  $(-2; 0); (0; 2)$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -2); (2; +\infty)$ .

**Câu 2:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau

|      |           |      |      |     |           |     |           |     |
|------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $0$  | $1$ | $+\infty$ |     |           |     |
| $y'$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $y$  | $+\infty$ |      | $-2$ | $3$ | $-2$      |     | $+\infty$ |     |

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $(0; 1)$       **B.**  $(-\infty; 0)$       **C.**  $(1; +\infty)$       **D.**  $(-1; 0)$

**Lời giải**

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng  $(0; 1); (-\infty; -1)$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0); (1; +\infty)$ .

**Câu 3:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có bảng biến thiên như sau:

|      |           |      |     |           |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |           |
| $y'$ |           | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$       |
| $y$  |           |      | $3$ |           |     | $+\infty$ |
|      | $+\infty$ |      |     | $-2$      |     |           |

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

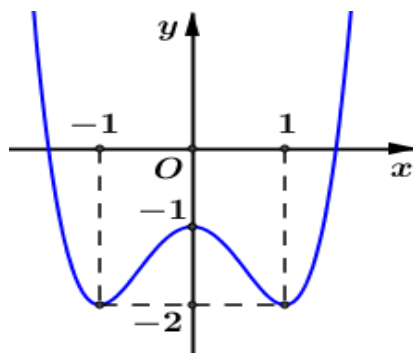
- A.**  $(-1; +\infty)$       **B.**  $(1; +\infty)$       **C.**  $(-1; 1)$       **D.**  $(-\infty; 1)$

**Lời giải**

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -1); (1; +\infty)$ .

**Câu 4:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(0; 1)$ .

B.  $(-\infty; -1)$ .

C.  $(-1; 1)$ .

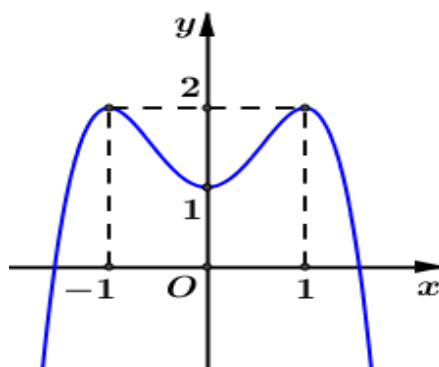
**D.  $(-1; 0)$ .**

**Lời giải**

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng  $(0; 1); (-\infty; -1)$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0); (1; +\infty)$ .

**Câu 5:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đồ thị là đường cong trong hình bên. Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng nào dưới đây?



A.  $(1; +\infty)$ .

B.  $(-1; 0)$ .

**C.  $(0; 1)$ .**

D.  $(-\infty; 0)$ .

**Lời giải**

Hàm số đã cho đồng biến trên các khoảng  $(0; 1); (-\infty; -1)$ .

Hàm số đã cho nghịch biến trên các khoảng  $(-1; 0); (1; +\infty)$ .

**Câu 6:** Cho hàm số  $y = x^3 - 2x^2 + x + 1$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

**A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$**

B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right)$

- C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$  D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(1; +\infty)$   
**Lời giải**

$$y' = 3x^2 - 4x + 1 \Rightarrow y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = \frac{1}{3} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} y = +\infty$$

Ta có . Do nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(\frac{1}{3}; 1\right)$ .

**Câu 7:** Cho hàm số  $y = x^3 - 3x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$  B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(2; +\infty)$   
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(0; 2)$  D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$

**Lời giải**

Ta có  $y' = 3x^2 - 6x$ ;  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 2 \end{cases}$  . Do  $\lim_{x \rightarrow \infty} y = +\infty$  nên hàm số nghịch biến trên khoảng  $(0; 2)$ .

**Câu 8:** Cho hàm số  $y = x^4 - 2x^2$ . Mệnh đề nào dưới đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  B. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$   
 C. Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-1; 1)$  D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$

**Lời giải**

Ta có  $y' = 4x^3 - 4x$  suy ra  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 1 \end{cases}$ .

Lại có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$  do đó hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 0); (1; +\infty)$

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1); (0; 1)$

**Câu 9:** Cho hàm số  $y = f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 1$ . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. Hàm số đồng biến trên  $(2; +\infty)$  B. Hàm số đồng biến trên  $(0; +\infty)$   
 C. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$  D. Hàm số đồng biến trên  $(-2; -1)$

**Lời giải**

Ta có  $y' = x^3 - 4x$  suy ra  $y' = 0 \Leftrightarrow x^3 - 4x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$ .

Lại có  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = +\infty$  do đó hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-2; 0); (2; +\infty)$   
 Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -2); (0; 2)$

**Câu 10:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{2x+1}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A. Hàm số đồng biến trên  $\left(-\infty; \frac{1}{2}\right)$   
 B. Hàm số đồng biến trên  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$   
 C. Hàm số đồng biến trên  $(-2; +\infty)$   
 D. Hàm số nghịch biến trên  $(0; +\infty)$

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \left\{-\frac{1}{2}\right\}$ .

Ta có:  $y' = \frac{3}{(2x+1)^2} > 0$  với mọi  $x \neq -\frac{1}{2}$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$ .

**Câu 11:** Cho hàm số  $y = \frac{x-1}{x}$ . Mệnh đề nào sau đây là đúng?

- A. Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên  $(0; +\infty)$ .  
 B. Hàm số đã cho chỉ đồng biến trên  $(-\infty; 0)$ .  
 C. Hàm số đã cho đồng biến trên  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ .  
 D. Hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

Ta có  $y' = \frac{1}{x^2} > 0, \forall x \in D$ . Do đó hàm số đã cho đồng biến trên mỗi khoảng xác định.

**Câu 12:** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $y = 3x^3 + 3x - 2$  B.  $y = 2x^3 - 5x + 1$  C.  $y = x^4 + 3x^2$  D.  $y = \frac{x-2}{x+1}$

**Lời giải**

Ta có  $y = 3x^3 + 3x - 2$  suy ra  $y' = 9x^2 + 3 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 13:** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

- A.  $y = \frac{x+1}{x+3}$  B.  $y = x^3 + x$  C.  $y = \frac{x-1}{x-2}$  D.  $y = -x^3 - 3x$

**Lời giải**

Ta có  $y = x^3 + x$  suy ra  $y' = 3x^2 + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ .

**Câu 14:** Hàm số nào dưới đây đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

A.  $y = \frac{x+1}{x-2}$ .

B.  $y = x^2 + 2x$ .

**C.**  $y = x^3 - x^2 + x$ .

D.  $y = x^4 - 3x^2 + 2$ .

**Lời giải**

Ta có  $y = x^3 - x^2 + x$  suy ra  $y' = 3x^2 - 2x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  nên hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$ .

**Câu 15:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $f'(x) = (x+1)^2(2-x)(x+3)$ . Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A. Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-3; -1)$  và  $(2; +\infty)$

B. Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(2; +\infty)$

**C.** Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-3; 2)$

D. Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-3; 2)$

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(2-x)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-3; -1; 2\}$

Bảng xét dấu  $f'(x)$

|         |           |      |      |     |           |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $2$ | $+\infty$ |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-3; 2)$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -3)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Câu 16:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có  $f'(x) = (x+1)^2(x-1)^3(2-x)$ . Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-\infty; -1)$ .

B.  $(2; +\infty)$ .

C.  $(-1; 1)$ .

**D.**  $(1; 2)$ .

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2(x-1)^3(2-x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1; 1; 2\}$

Bảng xét dấu  $f'(x)$

|         |           |      |     |     |           |     |     |     |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $2$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$ | $-$ | $0$       | $+$ | $0$ | $-$ |

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(1;2)$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $(2; +\infty)$ .

**Câu 17:** Cho hàm số  $f(x)$ , bảng xét dấu  $f'(x)$  như sau:

|         |           |      |      |     |           |     |     |
|---------|-----------|------|------|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$  | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

Hàm số  $g(x) = f(5-2x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(2;3)$ .

B.  $(0;2)$ .

C.  $(3;5)$ .

D.  $(5; +\infty)$ .

Lời giải

$$g'(x) = -2f'(5-2x) \Rightarrow g'(x) \Leftrightarrow f'(5-2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 5-2x = -3 \\ 5-2x = -1 \\ 5-2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in [2;3;4]$$

Ta có

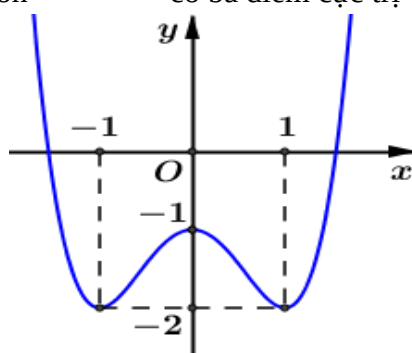
Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(5-2x)$

|         |           |     |     |     |           |     |     |
|---------|-----------|-----|-----|-----|-----------|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $2$ | $3$ | $4$ | $+\infty$ |     |     |
| $g'(x)$ | $-$       | $0$ | $+$ | $0$ | $-$       | $0$ | $+$ |

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 2)$  và  $(3;4)$ .

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(2;3)$  và  $(4; +\infty)$ .

**Câu 18:** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  có ba điểm cực trị  $-1; 0; 1$ .



Hàm số  $g(x) = f(3 - 2x)$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

B.  $(2; +\infty)$ .

C.  $(-1; 2)$ .

**D.**  $(-\infty; -1)$ .

Lời giải

$$g'(x) = -2f'(3 - 2x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x = 1 \\ 3 - 2x = 0 \\ 3 - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$$

Ta có

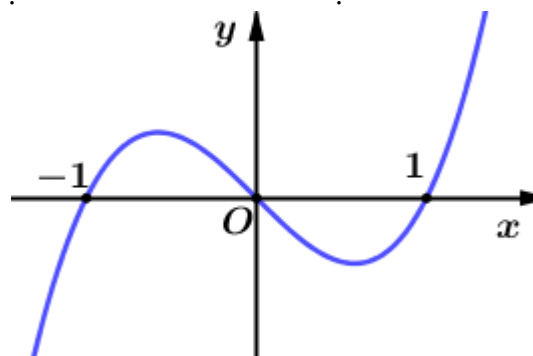
Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(3 - 2x)$

|         |           |   |   |   |               |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---------------|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | $\frac{3}{2}$ |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | - | 0 | + | 0             | - | 0 | + |           |

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$  và  $(2; +\infty)$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

**Câu 19:** Cho hàm số đa thức bậc bốn  $y = f(x)$  có đồ thị  $f'(x)$  như hình vẽ.



Hàm số  $g(x) = f(3 - 2x)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $(-\infty; 1)$ .

**B.**  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$ .

C.  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

D.  $(1; +\infty)$ .

Lời giải

$$g'(x) = -2f'(3 - 2x) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - 2x = 1 \\ 3 - 2x = 0 \\ 3 - 2x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{1; \frac{3}{2}; 2\right\}$$

Ta có

Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = f(3 - 2x)$

|         |           |   |   |   |               |   |   |   |           |
|---------|-----------|---|---|---|---------------|---|---|---|-----------|
| $x$     | $-\infty$ |   | 1 |   | $\frac{3}{2}$ |   | 2 |   | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | - | 0 | + | 0             | - | 0 | + |           |

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$  và  $(2; +\infty)$ .

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 1)$  và  $\left(\frac{3}{2}; 2\right)$ .

**Câu 20:** Tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{mx - 6}{x + 1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A.  $(-\infty; -6)$ .      **B.**  $(-6; +\infty)$ .      C.  $(-\infty; 6)$ .      D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ . Ta có  $y' = \frac{m+6}{(x+1)^2}$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq -1$

$$\Leftrightarrow \frac{m+6}{(x+1)^2} > 0, \forall x \neq -1 \Leftrightarrow m+6 > 0 \Leftrightarrow m > -6$$

**Câu 21:** Tập hợp các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x-m}{x-1}$  đồng biến trên từng khoảng xác định là

- A.  $(-\infty; 1)$ .      **B.**  $(1; +\infty)$ .      C.  $(-1; +\infty)$ .      D.  $(-\infty; +\infty)$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ . Ta có  $y' = \frac{m-1}{(x-1)^2}$ .

Hàm số đã cho đồng biến trên từng khoảng xác định  $\Leftrightarrow y' > 0, \forall x \neq 1$

$$\Leftrightarrow \frac{m-1}{(x-1)^2} > 0, \forall x \neq 1 \Leftrightarrow m-1 > 0 \Leftrightarrow m > 1$$

**Câu 22:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{2x+m}{x+m}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3)$ ?

- A.  $m \leq 3$ .      B.  $m > 0$ .      C.  $0 \leq m \leq 3$ .      **D.**  $0 < m \leq 3$ .

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$ . Ta có  $y' = \frac{m}{(x+m)^2}$

Hàm số đồng biến trên khoảng  $(-\infty; -3) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -3)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 0 \\ -m \notin (-\infty; -3) \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3$$

**Câu 23:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  để hàm số  $y = \frac{x+2}{x+3m}$  đồng biến trên  $(-\infty; -6)$ ?

- A.  $m \leq 2$ .      B.  $m > \frac{2}{3}$ .      C.  $\frac{2}{3} \leq m \leq 2$ .      **D.  $\frac{2}{3} < m \leq 2$ .**

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{-3m\}$ . Ta có  $y' = \frac{3m-2}{(x+3m)^2}$ .

Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -6) \Leftrightarrow y' > 0, \forall x \in (-\infty; -6)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3m-2 > 0 \\ -3m \notin (-\infty; -6) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > \frac{2}{3} \\ -3m \geq -6 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{2}{3} < m \leq 2$$

Vậy có 2 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn yêu cầu bài toán.

**Câu 24:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-20; 20)$  để hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2+4m)x + 5$  đồng biến trên khoảng  $(3; 8)$  là

- A. 30.      **B. 31.**      C. 32.      D. 33.

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = \frac{1}{3}x^3 - (m+2)x^2 + (m^2+4m)x + 5$  trên khoảng  $(3; 8)$ .

Ta có  $y' = x^2 - 2(m+2)x + (m^2+4m)$ . Suy ra  $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ x = m+4 \end{cases}$ .

Do  $m < m+4, \forall m$  và  $\lim_{x \rightarrow +\infty} y' = +\infty$  nên hàm số đồng biến trên khoảng  $(3; 8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 8 \leq m \\ m+4 \leq 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8 \leq m \\ m \leq -1 \end{cases} \text{ Do } \begin{cases} m \in (-20; 20) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m \in \{-19; -18; -17; \dots; -1; 8; 9; \dots; 19\}$$

**Câu 25:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-5; 5)$  để hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + (m-2)x + 2$  nghịch biến trên  $(-\infty; 2)$

- A. 2      B. 3      **C. 4**      D. 5

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = -x^3 + 3x^2 + (m-2)x + 2$  trên khoảng  $(-\infty; 2)$ .

Ta có  $y' = -3x^2 + 6x + m - 2$ .

Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 2) \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in (-\infty; 2)$

$$\Leftrightarrow -3x^2 + 6x + m - 2 \leq 0, \forall x \in (-\infty; 2) \Leftrightarrow m \leq 3x^2 - 6x + 2, \forall x \in (-\infty; 2) (*)$$

Xét hàm số  $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$  trên  $(-\infty; 2)$ . Ta có  $f'(x) = 6x - 6$ ;  $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ .

Bảng biến thiên của  $f(x) = 3x^2 - 6x + 2$ .

|         |           |          |          |
|---------|-----------|----------|----------|
| $x$     | $-\infty$ | <b>1</b> | <b>2</b> |
| $f'(x)$ |           | - 0 +    |          |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-1$     | <b>2</b> |

Từ bảng biến thiên suy ra  $(*) \Leftrightarrow m \leq -1 \Rightarrow m \in \{-4; -3; -2; -1\}$ .

**Câu 26:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (0; 10)$  để hàm số  $y = x^3 + x^2 + mx + 1$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$

A. 10.

B. 7.

C. 8.

**D. 9!**

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = 3x^2 + 2x + m$

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3x^2 + 2x + m \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow 1 - 3m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq \frac{1}{3} \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 9\}$$

**Câu 27:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-20; 20)$  để hàm số  $y = -\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + mx - 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$ .

A. 14.

B. 17.

**C. 16!**

D. 15.

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có  $y' = -x^2 - 4x + m$ .

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 4 + m \leq 0 \Leftrightarrow m \leq -4 \Rightarrow m \in \{-19; -18; \dots; -4\}$ .

**Câu 28:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-10; 10)$  để hàm số  $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$  đồng biến trên khoảng  $(1; 3)$ ?

A. 9

B. 8

C. 10

**D. 12**

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = x^4 - 2(m-1)x^2 + m - 2$  trên khoảng  $(1;3)$ .

Ta có:  $y' = 4x^3 + 4x - 4mx$ .

Hàm số đồng biến trên  $(1;3) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1;3) \Leftrightarrow 4x^3 + 4x - 4mx \geq 0, \forall x \in (1;3)$   
 $\Leftrightarrow m \leq x^2 + 1, \forall x \in (1;3) (*)$

Xét hàm số  $f(x) = x^2 + 1$  trên khoảng  $(1;3)$ . Ta có  $f'(x) = 2x > 0, \forall x \in (1;3)$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $f(x) = x^2 + 1$

|         |   |    |
|---------|---|----|
| $x$     | 1 | 3  |
| $f'(x)$ | + |    |
| $f(x)$  | 2 | 10 |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow m \leq 2 \Rightarrow m \in \{-9; -8; -7; \dots; -1; 0; 1; 2\}$ .

**Câu 29:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m \in (-10;10)$  để hàm số  $y = x^4 - mx^2$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

A. 4.

**B. 8.**

C. 9.

D. 7.

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = x^4 - mx^2$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ .

Ta có:  $y' = 4x^3 - 2mx$ .

Hàm số đồng biến trên  $(2; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow 4x^3 - 2mx \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$   
 $\Leftrightarrow m \leq 2x^2, \forall x \in (2; +\infty) (*)$

Xét hàm số  $f(x) = 2x^2$  trên khoảng  $(2; +\infty)$ . Ta có  $f'(x) = 4x > 0, \forall x \in (2; +\infty)$ .

Bảng biến thiên  $f(x) = 2x^2$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 2 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + |           |
| $f(x)$  | 8 | $+\infty$ |

Dựa vào bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow m \leq 8$ . Vì  $m$  nguyên dương nên  $m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$ .

**Câu 30:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = (m - 7)x^3 + (m - 7)x^2 - 2mx - 1$  nghịch biến trên  $\mathbb{R}$  bằng

**A.** 7.

**B.** 9.

**C.** 4.

**D.** 6.

**Lời giải**

Tập xác định:  $D = \mathbb{R}$ .

Ta có:  $y' = 3(m - 7)x^2 + 2(m - 7)x - 2m$ .

Hàm số nghịch biến trên  $\mathbb{R} \Leftrightarrow y' \leq 0, \forall x \in \mathbb{R} (*)$

**TH1:**  $m - 7 = 0 \Leftrightarrow m = 7 \Rightarrow y = -14x - 1 \Rightarrow y' = -14 < 0$ . Do đó  $(*)$  đúng.

**TH2:**  $m - 7 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 7 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ 7m^2 - 56m + 49 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 7 \\ 1 \leq m \leq 7 \end{cases}$

$\Leftrightarrow 1 \leq m < 7 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; \dots; 6\}$ . Kết hợp hai trường hợp trên suy ra  $m \in \{1; 2; 3; \dots; 7\}$

**Câu 31:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của  $m \in (-10; 10)$  để hàm số  $y = m^2x^4 - 2(4m - 1)x^2 + 1$  đồng biến trên khoảng  $(1; +\infty)$ ?

**A.** 15

**B.** 6

**C.** 7

**D.** 16

**Lời giải**

Xét hàm số  $y = m^2x^4 - 2(4m - 1)x^2 + 1$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ .

Hàm số đồng biến trên  $(1; +\infty) \Leftrightarrow y' \geq 0, \forall x \in (1; +\infty) (*)$

**TH 1:**  $m^2 = 0 \Rightarrow y = 2x^2 + 1 \Rightarrow y' = 4x \geq 0, \forall x \in (1; +\infty)$ . Do đó  $(*)$  đúng.

**TH 2:**  $m^2 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 0 \Rightarrow y' = 4x(m^2x^2 - (2m - 1))$ . Suy ra  $(*) \Leftrightarrow \frac{4m - 1}{m^2} \leq x^2 (1)$

Xét hàm số  $f(x) = x^2$  trên khoảng  $(1; +\infty)$ . Ta có  $f'(x) = 2x > 0, \forall x \in (1; +\infty)$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $f(x) = x^2$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 1 | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | + |           |
| $f(x)$  | 1 | $+\infty$ |

$$(1) \Leftrightarrow \frac{4m-1}{m^2} \leq 1 \Leftrightarrow m^2 - 4m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq 2 + \sqrt{3} \\ m \leq 2 - \sqrt{3} \end{cases}$$

Dựa vào bảng biến thiên ta có

$$\text{Do } \begin{cases} m \in (-10; 10) \\ m \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow m = \{-9; -8; -7; \dots; 0; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

**Câu 32:** Cho hàm số  $y = f(x)$   $\mathbb{R}$  có bảng biến thiên như hình vẽ dưới đây

|      |           |      |      |           |     |
|------|-----------|------|------|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ | $3$  | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $+$       | $0$  | $-$  | $0$       | $+$ |
| $y$  | $-\infty$ | $4$  | $-2$ | $+\infty$ |     |

Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $g(x) = f(x+m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1)$ ?

A. 3.

**B. 5.**

C. 1.

D. 4.

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 3$

Có  $g'(x) = f'(x+m) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x+m \leq 3 \Leftrightarrow -2-m \leq x \leq 3-m$

Vậy hàm số  $f(x+m)$  nghịch biến trên  $(-2-m; 3-m)$

Hàm số  $y = f(x+m)$  nghịch biến trên khoảng  $(0; 1) \Leftrightarrow (0; 1) \subset (-2-m; 3-m)$   
 $\Leftrightarrow -2-m \leq 0 < 1 \leq 3-m \Leftrightarrow -2 \leq m \leq 2$ .

Vậy có tất cả 5 số nguyên thỏa mãn.

**Câu 33:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng biến thiên sau:

|      |           |                |               |           |
|------|-----------|----------------|---------------|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $m-1$          | $m+3$         | $+\infty$ |
| $y'$ |           | $0$            | $0$           |           |
| $y$  | $+\infty$ | $-\frac{2}{3}$ | $\frac{2}{3}$ | $-\infty$ |

Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = f(2m-x)$  nghịch biến trên khoảng  $(2; 3)$ ?

A. 3.

B. 5.

C. 1.

**D. 4.**

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow m-1 \leq x \leq m+3$

Ta có  $y' = -f'(2m-x) \leq 0, \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow f'(2m-x) \geq 0, \forall x \in (2; 3) \Leftrightarrow m-1 \leq 2m-x \leq m+3$   
 $\Leftrightarrow m-3 \leq x \leq m+1$ .

Vậy hàm số  $y = f(2m-x)$  nghịch biến trên khoảng  $(m-3; m+1)$

Hàm số  $y = f(2m - x)$  nghịch biến trên  $(2; 3)$   $(2; 3) \subset (m - 3; m + 1) \Leftrightarrow \begin{cases} m + 1 \geq 3 \\ m - 3 \leq 2 \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq m \leq 5$   
 Vậy có 4 giá trị nguyên thỏa mãn.

**Câu 34:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm trên  $\mathbb{R}$  và bảng xét dấu của đạo hàm như hình vẽ bên.

|         |           |       |     |      |     |     |     |     |     |           |
|---------|-----------|-------|-----|------|-----|-----|-----|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-10$ |     | $-2$ |     | $3$ |     | $8$ |     | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$   | $+$ | $0$  | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |           |

Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $y = f(x^2 + 4x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ ?

**A.** 3.

**B.** 1.

**C.** 0.

**D.** 2.

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 8$

Xét hàm số  $g(x) = f(x^2 + 4x + m) \Rightarrow g'(x) = (2x + 4)f'(x^2 + 4x + m)$

Hàm số  $y = f(x^2 + 4x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1) \Leftrightarrow g'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow (2x + 4)f'(x^2 + 4x + m) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow f'(x^2 + 4x + m) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow -2 \leq x^2 + 4x + m \leq 8, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\begin{cases} x^2 + 4x \leq 8 - m \\ x^2 + 4x \geq -2 - m \end{cases}, \forall x \in (-1; 1)$$

Xét hàm số  $h(x) = x^2 + 4x$  trên khoảng  $(-1; 1)$ . Ta có  $h'(x) = 2x + 2 > 0, \forall x \in (-1; 1)$

Bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = x^2 + 4x$

|         |      |     |
|---------|------|-----|
| $x$     | $-1$ | $1$ |
| $h'(x)$ | $+$  |     |
| $h(x)$  | $-3$ | $5$ |

Từ bảng biến thiên ta có:  $\begin{cases} 8 - m \geq 5 \\ -2 - m \leq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 3 \\ m \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq m \leq 3$

Suy ra  $m \in \{1; 2; 3\}$ . Vậy có 3 giá trị nguyên của  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 35:** Cho hàm số  $f(x)$  có bảng xét dấu đạo hàm như sau

|         |           |   |   |   |   |           |   |   |   |
|---------|-----------|---|---|---|---|-----------|---|---|---|
| $x$     | $-\infty$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $+\infty$ |   |   |   |
| $f'(x)$ | -         | 0 | + | 0 | + | 0         | - | 0 | + |

Có bao nhiêu số nguyên  $m \in (-10; 10)$  để hàm số  $y = f(x^2 - 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$ ?

A. 8.

**B. 5.**

C. 3.

D. 6.

**Lời giải**

Ta có  $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x \leq 3 \\ x \geq 4 \end{cases}$

Xét hàm số  $g(x) = f(x^2 - 2x + m) \Rightarrow g'(x) = f'(x^2 - 2x + m) \cdot (2x - 2)$ .

Để hàm số  $y = f(x^2 - 2x + m)$  nghịch biến trên khoảng  $(-1; 1)$   $g'(x) \leq 0, \forall x \in (-1; 1)$

$$\Leftrightarrow (2x - 2) f'(x^2 - 2x + m) \leq 0 \Leftrightarrow f'(x^2 - 2x + m) \geq 0, \forall x \in (-1; 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 \leq x^2 - 2x + m \leq 3 \\ x^2 - 2x + m \geq 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \leq 3 - m \\ x^2 - 2x \geq 1 - m \\ x^2 - 2x \geq 4 - m \end{cases}, \forall x \in (-1; 1)$$

Xét hàm số  $h(x) = x^2 - 2x$  trên khoảng  $(-1; 1)$ . Ta có  $h'(x) = 2x - 2 < 0, \forall x \in (-1; 1)$

Bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = x^2 - 2x$

|         |    |    |
|---------|----|----|
| $x$     | -1 | 1  |
| $h'(x)$ | —  |    |
| $h(x)$  | 3  | -1 |

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3-m \geq 3 \\ 1-m \leq -1 \\ 4-m \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq 0 \\ m \geq 2 \\ m \geq 5 \end{cases} \Leftrightarrow m \geq 5$$

Từ bảng biến thiên ta có:

Mà  $m$  là số nguyên thuộc khoảng  $(-10; 10)$  nên  $m \in \{5; 6; 7; 8; 9\}$ .

Vậy có 5 giá trị  $m$  thỏa mãn bài toán.

**Câu 36:** Cho hàm số  $y = f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x) = x^2(x-2)(x^2-6x+m)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có tất cả bao nhiêu số nguyên  $m \in (0; 20)$  để hàm số  $g(x) = f(1-x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$ ?

A. 10.

B. 12.

**C. 11.**

D. 9.

**Lời giải**

Ta có:  $g(x) = f(1-x) \Rightarrow g'(x) = -f'(1-x) = -(x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5)$ .

Hàm số  $g(x) = f(1-x)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  thì  $g'(x) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$ .

$$\Leftrightarrow (x-1)^2(x+1)(x^2+4x+m-5) \leq 0, \forall x \in (-\infty; -1) \Leftrightarrow x^2+4x+m-5 \geq 0, \forall x \in (-\infty; -1)$$

$$\Leftrightarrow -m \leq x^2+4x-5, \forall x \in (-\infty; -1) (*)$$

Xét hàm số  $h(x) = x^2+4x-5$  trên khoảng  $(-\infty; -1)$ .

Ta có:  $h'(x) = 2x+4; h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -2$ .

Bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = x^2+4x-5$

|         |           |             |      |
|---------|-----------|-------------|------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$        | $-1$ |
| $h'(x)$ |           | $-$ $0$ $+$ |      |
| $h(x)$  | $+\infty$ | $-9$        | $-8$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow -m \leq -9 \Leftrightarrow m \geq 9 \Rightarrow m \in \{9; 10; 11; \dots; 19\}$ .

**Câu 37:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x(x-1)^4(x^2+mx+9)$  với mọi  $x \in \mathbb{R}$ . Có bao nhiêu giá trị nguyên dương của  $m$  để hàm số  $g(x) = f(3-x)$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

A. 5.

**B. 6.**

C. 7.

D. Vô số.

**Lời giải**

Ta có  $g'(x) = -f'(3-x) = (x-3)(2-x)^4(x^2-6x+18+m(3-x))$

Hàm số  $g(x) = f(3-x)$  đồng biến trên khoảng  $(3; +\infty) \Leftrightarrow g'(x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2-x)^4(x^2-6x+18+m(3-x)) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow x^2-6x+18+m(3-x) \geq 0, \forall x \in (3; +\infty) \Leftrightarrow m \leq x-3+\frac{9}{x-3}, \forall x \in (3; +\infty)$$

Xét hàm số  $h(x) = x-3+\frac{9}{x-3}$  trên khoảng  $(3; +\infty)$ .

Ta có:  $h'(x) = \frac{x^2-6x}{(x-3)^2}; h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ x=0 \notin (3; +\infty) \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = x^2+4x-5$

|         |           |       |           |
|---------|-----------|-------|-----------|
| $x$     | 3         | 6     | $+\infty$ |
| $h'(x)$ |           | - 0 + |           |
| $h(x)$  | $+\infty$ | 6     | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow m \leq 6 \Rightarrow m \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ .

**Câu 38:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm thỏa mãn  $f'(x) = (4-x^2)g(x) + 2019$  với  $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(1-x) + 2019x + 2020$  nghịch biến trên khoảng nào trong các khoảng sau

A.  $(-1; +\infty)$ .

B.  $(-\infty; 3)$ .

C.  $(3; +\infty)$ .

**D.  $(-1; 3)$ .**

**Lời giải**

Ta có  $y' = -f'(1-x) + 2019 = -[4-(1-x)^2]g(1-x) = (x^2-2x-3)g(1-x)$ .

Suy ra  $y' = 0 \Leftrightarrow (x^2-2x-3)g(1-x) = 0 \Leftrightarrow x^2-2x-3 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$ .

Bảng xét dấu của hàm số  $y = f(1-x) + 2019x + 2020$ :

|      |           |      |     |           |     |
|------|-----------|------|-----|-----------|-----|
| $x$  | $-\infty$ | $-1$ | $3$ | $+\infty$ |     |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$       | $-$ |

Hàm số nghịch biến trên các khoảng  $(3; +\infty), (-\infty; -1)$ .

Hàm số đồng biến trên các khoảng  $(-1; 3)$ .

**Câu 39:** Cho hàm số  $f(x)$  xác định và liên tục trên  $\mathbb{R}$  và có đạo hàm  $f'(x)$  thỏa mãn  $f'(x) = (1-x)(x+2)g(x) + 2019$  với  $g(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$ . Hàm số  $y = f(1-x) + 2019x + 2020$  nghịch biến trên khoảng nào?

- A.  $(1; +\infty)$ . B.  $(0; 3)$ . C.  $(-\infty; 3)$ . **D.  $(3; +\infty)$ .**

**Lời giải**

Đặt  $h(x) = f(1-x) + 2019x + 2020$ .

Vì hàm số  $f(x)$  xác định trên  $\mathbb{R}$  nên hàm số  $h(x)$  cũng xác định trên  $\mathbb{R}$ .

Ta có  $h'(x) = -f'(1-x) + 2019$ .

Do  $h'(x) = 0$  tại hữu hạn điểm nên để tìm khoảng nghịch biến của hàm số  $h(x)$ , ta tìm các giá trị của  $x$  sao cho  $h'(x) < 0 \Leftrightarrow -f'(1-x) + 2019 < 0 \Leftrightarrow f'(1-x) - 2019 > 0$

$$\Leftrightarrow x(3-x)g(1-x) > 0 \Leftrightarrow x(3-x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x > 3 \end{cases}.$$

Vậy hàm số  $y = f(1-x) + 2019x + 2020$  nghịch biến trên các khoảng  $(-\infty; 0)$  và  $(3; +\infty)$ .

**Câu 40:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ .

- A.  $m \leq 0$  hoặc  $1 \leq m < 2$ .** B.  $m \leq 0$ . C.  $1 \leq m < 2$ . D.  $m \geq 2$

**Lời giải**

Đặt  $t = \sin x \Rightarrow t' = \cos x > 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t-2}{t-m}, \forall t \in (0; 1)$ . Tập xác định:  $D = \mathbb{R} \setminus \{m\}$

Ta có  $f'(t) = \frac{2-m}{(t-m)^2}$ .

Ta thấy hàm số  $t = \sin x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  nên để hàm số  $y = \frac{\sin x - 2}{\sin x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$  khi và chỉ khi:  $f'(t) > 0, \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \frac{2-m}{(t-m)^2} > 0, \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2-m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}.$$

**Câu 41:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\cot x + 5}{\cot x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $m \leq -5$  hoặc  $m > 1$     B.  $-5 < m \leq 1$     C.  $m \leq -5$     D.  $m > -5$

**Lời giải**

Ta có  $x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow \cot x \in (1; +\infty)$ .

$$y = \frac{\cot x + 5}{\cot x - m} \Rightarrow y' = \frac{m + 5}{(\cot x - m)^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x}$$

Để hàm số  $y$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$  khi và chỉ khi:

$$y' > 0 \quad \forall x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m \notin (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m > -5 \\ m \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

**Câu 42:** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  $m$  sao cho hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ .

- A.  $m \leq 0$  hoặc  $1 \leq m < 2$     B.  $m \leq 0$     C.  $1 \leq m < 2$     D.  $m \geq 2$

**Lời giải**

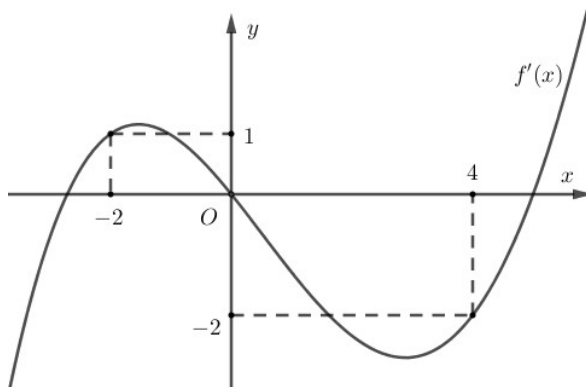
Đặt  $t = \tan x \Rightarrow t' = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 \quad x \in \left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Rightarrow t \in (0; 1)$

Xét hàm số  $f(t) = \frac{t - 2}{t - m}, \forall t \in (0; 1)$ .

Do hàm số  $t = \tan x$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right)$ . Nên hàm số  $y = \frac{\tan x - 2}{\tan x - m}$  đồng biến trên khoảng  $\left(0; \frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow f'(t) > 0 \quad \forall t \in (0; 1)$

$$\Leftrightarrow \frac{2 - m}{(t - m)^2} > 0 \quad \forall t \in (0; 1) \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - m > 0 \\ m \notin (0; 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m < 2 \\ m \leq 0 \Leftrightarrow m \in (-\infty; 0] \cup [1; 2) \\ m \geq 1 \end{cases}$$

**Câu 43:** Cho hàm số đa thức bậc ba  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau.



Hàm số  $g(x) = f(1 - 2x) + x^2 - x$  nghịch biến trên khoảng nào dưới đây?

**A.**  $\left(1; \frac{3}{2}\right)$

**B.**  $\left(0; \frac{1}{2}\right)$

**C.**  $(-2; -1)$

**D.**  $(2; 3)$

**Lời giải**

Ta có  $g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1 \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(1 - 2x) = \frac{1 - 2x}{2} \Leftrightarrow f'(t) = -\frac{t}{2}$  với  $t = 1 - 2x$

Để thấy  $f'(t) = -\frac{t}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$ . Do đó  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x = -2 \\ 1 - 2x = 0 \\ 1 - 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right\}$ .

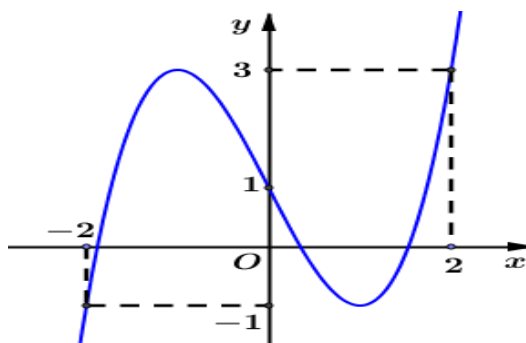
Bảng xét dấu của hàm số  $g'(x) = -2f'(1 - 2x) + 2x - 1$

| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $+\infty$ |     |     |     |
|---------|-----------|----------------|---------------|---------------|-----------|-----|-----|-----|
| $g'(x)$ |           | $-$            | $0$           | $+$           | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{3}{2}\right)$  và  $\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$  và  $\left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$ .

**Câu 44:** Cho hàm số đa thức bậc ba  $y = f(x)$ . Hàm số  $y = f'(x)$  có đồ thị như hình sau.



Hàm số  $g(x) = f(2x+3) - 2x^2 - 8x$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$       **B.**  $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$       **C.**  $\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)$       **D.**  $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{1}{2}\right)$

**Lời giải**

Ta có  $g'(x) = 2(f'(2x+3) - 2x - 4) \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x+3) = 2x+4 \Leftrightarrow f'(t) = t+1$  với  $t = 2x+3$

Để thấy  $f'(t) = t+1 \Leftrightarrow \begin{cases} t = -2 \\ t = 0 \\ t = 2 \end{cases}$  . Do đó  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3 = -2 \\ 2x+3 = 0 \\ 2x+3 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right\}$  .

Bảng xét dấu của hàm số  $g'(x) = 2(f'(2x+3) - 2x - 4)$

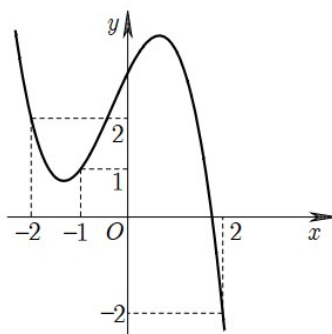
|         |           |                |                |                |           |     |     |     |
|---------|-----------|----------------|----------------|----------------|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-\frac{5}{2}$ | $-\frac{3}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $g'(x)$ |           | $-$            | $0$            | $+$            | $0$       | $-$ | $0$ | $+$ |

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $\left(-\infty; -\frac{5}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{3}{2}; -\frac{1}{2}\right)$  .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-\frac{5}{2}; -\frac{3}{2}\right)$  và  $\left(-\frac{1}{2}; +\infty\right)$  .

**Câu 45:** hàm số  $y = f(x)$  là hàm đa thức bậc bốn. Đồ thị hàm  $y = f'(x)$  được cho trong hình vẽ bên.

Hàm số  $g(x) = f(2x) + 2x^2$  nghịch biến trên khoảng nào sau đây?



- A.**  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$       **B.**  $(1; +\infty)$       **C.**  $(-1; 1)$       **D.**  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$

**Lời giải**

Ta có  $g'(x) = 2f'(2x) + 4x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow f'(2x) = -2x \Leftrightarrow f'(t) = -t$  với  $t = 2x$

Để thấy  $f'(t) = -t \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t = -2 \\ t = 2 \end{cases}$  . Do đó  $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = -2 \\ 2x = 2 \\ 2x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \left\{-1; \frac{1}{2}; 1\right\}$  .

Bảng xét dấu của hàm số  $g'(x) = 2f'(2x) + 4x$

|         |           |      |               |     |           |     |     |     |
|---------|-----------|------|---------------|-----|-----------|-----|-----|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $+\infty$ |     |     |     |
| $g'(x)$ |           | $+$  | $0$           | $-$ | $0$       | $+$ | $0$ | $-$ |

Hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -1)$  và  $\left(\frac{1}{2}; 1\right)$ .

Hàm số đồng biến trên khoảng  $\left(-1; \frac{1}{2}\right)$  và  $(1; +\infty)$ .

**Câu 46:** Có bao nhiêu số nguyên  $m$  để hàm số  $f(x) = 3x + m\sqrt{x^2 + 1}$  đồng biến trên  $\mathbb{R}$ ?

A. 5.

B. 1.

C. 7.

D. 2.

Lời giải

$$D = \mathbb{R}$$

Tập xác định

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 3 + \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \frac{mx}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq -3, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$m = 0 \Rightarrow (*)$$

TH1:

$$m \neq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \geq -\frac{3}{m}, \forall x \in \mathbb{R} & (1) \\ m > 0 \end{cases} \quad \text{hoặc} \quad \begin{cases} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \leq -\frac{3}{m}, \forall x \in \mathbb{R} & (2) \\ m < 0 \end{cases}$$

TH2.:

$$g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số

Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $+$       |
| $g(x)$  | $-1$      | $1$       |

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{m} \leq -1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 3 \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{3}{m} \geq 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -3 \leq m < 0$$

Từ bảng biến thiên ta có:

Từ hai trường hợp ta có  $-3 \leq m \leq 3 \Rightarrow m \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

**Câu 47:** Có bao nhiêu giá trị nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = x + m\sqrt{x^2 - 2x + 3}$  đồng biến trên khoảng  $(-\infty; +\infty)$ ?

A. 2.

B. 4.

**C. 3.**

D. 1.

**Lời giải**

$$D = \mathbb{R}$$

Tập xác định

$$y' \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow 1 + \frac{m(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Hàm số đồng biến trên  $\mathbb{R}$  khi và chỉ khi

$$\Leftrightarrow \frac{m(x-1)}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq -1, \forall x \in \mathbb{R} (*)$$

$$m = 0 \Rightarrow (*)$$

**TH1:**

$$m \neq 0 \Rightarrow (*) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \geq -\frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \\ m > 0 \end{cases} (1) \quad \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \leq -\frac{1}{m}, \forall x \in \mathbb{R} \\ m < 0 \end{cases} (2)$$

**TH2:**

hoặc

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}} \Rightarrow g'(x) = \frac{-2}{(x^2 - 2x + 3)\sqrt{x^2 - 2x + 3}} < 0, \forall x \in \mathbb{R}$$

Xét hàm số

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 3}}$$

Bảng biến thiên của hàm số

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         |           |
| $g(x)$  | 1         | -1        |

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} \leq -1 \\ m > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < m \leq 1 \quad (2) \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{m} \geq 1 \\ m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \leq m < 0$$

Từ bảng biến thiên ta có:

Từ hai trường hợp ta có  $-1 \leq m \leq 1 \Rightarrow m \in \{-1; 0; 1\}$

- Câu 48:** Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của  $m$  để hàm số  $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$  luôn đồng biến trên  $(1; +\infty)$ ?
- A. 18.                      B. 19.                      C. 21.                      **D. 20.**

**Lời giải**

Đặt  $g(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$  suy ra  $g'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ .

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  nên hàm số  $y = |g(x)|$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ g'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(1) = m + 13 \geq 0 \\ 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \quad \forall x \in (1; +\infty) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -13 \\ 2m \leq \frac{3x^2 + 12}{x}, \quad \forall x \in (1; +\infty) \end{cases} (*)$$

Xét hàm số  $h(x) = \frac{3x^2 + 12}{x}$  trên  $(1; +\infty)$

$$h'(x) = \frac{3x^2 - 12}{x^2}, \quad h'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ x = -2 \notin (1; +\infty) \end{cases}$$

Bảng biến thiên của hàm số  $h(x) = \frac{3x^2 + 12}{x}$

| $x$     | 1  | 2               | $+\infty$ |
|---------|----|-----------------|-----------|
| $h'(x)$ |    | -      0      + |           |
| $h(x)$  | 15 | 12              | $+\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -13 \\ 2m \leq 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -13 \\ m \leq 6 \end{cases}$ .

Do  $m \in \mathbb{Z}$  nên có 20 số nguyên  $m$  thỏa mãn đề bài.

- Câu 49:** Có tất cả bao nhiêu số nguyên của tham số  $m$  để hàm số  $y = |x^4 + 2x^3 + mx + 2|$  đồng biến trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .
- A. 1.                      B. 0.                      **C. 2.**                      D. 3.

**Lời giải**

Đặt  $f(x) = x^4 + 2x^3 + mx + 2 \Rightarrow f'(x) = 4x^3 + 6x^2 + m$

Vì  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  nên hàm số  $y = |f(x)|$  đồng biến trên  $(-1; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}, \quad \forall x \in (-1; +\infty)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f'(x) \geq 0 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}, \forall x \in (-1; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^3 + 6x^2 + m \geq 0, \forall x \in (-1; +\infty) \\ 1 - m \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m \geq -4x^3 - 6x^2, \forall x \in (-1; \infty) & (1) \\ m \leq 1 & (2) \end{cases}$$

Xét hàm  $g(x) = -4x^3 - 6x^2$  trên khoảng  $(-1; +\infty)$ .

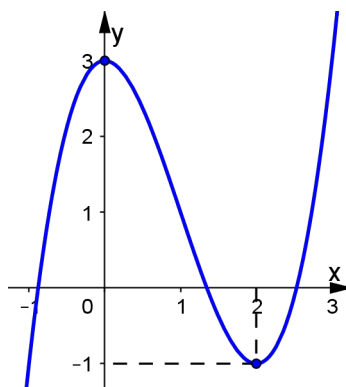
Ta có  $g'(x) = -12x^2 - 12x \Rightarrow g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -1 \end{cases}$

Bảng biến thiên của hàm số  $g(x) = -4x^3 - 6x^2$

|         |    |   |           |
|---------|----|---|-----------|
| $x$     | -1 | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |    | + | 0         |
|         |    |   | -         |
| $g(x)$  |    | 0 |           |
|         | -2 |   | $-\infty$ |

Từ bảng biến thiên ta có  $(*) \Leftrightarrow m \geq 0$ . Kết hợp với  $(2)$  ta có  $0 \leq m \leq 1$ . Vậy  $m \in [0; 1]$

**Câu 50:** Do đó, hàm số Cho hàm số  $f(x)$  liên tục trên  $\mathbb{R}$  và hàm số  $g(x) = f(2x - 1)$  có đồ thị như hình vẽ bên.



Khi đó hàm số  $f(x^2 - 1)$  nghịch biến trên khoảng nào?

**A.**  $(-\infty; -2)$ .

**B.**  $(-2; 0)$ .

**C.**  $(2; +\infty)$ .

**D.**  $(-2; 2)$ .

**Lời giải**

Đặt  $t = 2x - 1 \Rightarrow x = \frac{t+1}{2}$ . Ta xét hàm  $f(t) = g\left(\frac{t+1}{2}\right)$ , có  $f'(t) = \frac{1}{2} \cdot g'\left(\frac{t+1}{2}\right)$ .

$$f'(t)=0 \Leftrightarrow g'\left(\frac{t+1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{t+1}{2}=0 \\ \frac{t+1}{2}=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=-1 \\ t=3 \end{cases}$$

|         |           |      |     |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----|-----------|
| $t$     | $-\infty$ | $-1$ |     | $3$ |     | $+\infty$ |
| $f'(t)$ | $+$       | $0$  | $-$ | $0$ | $+$ |           |
| $f(t)$  | $-\infty$ |      |     | $3$ |     | $+\infty$ |

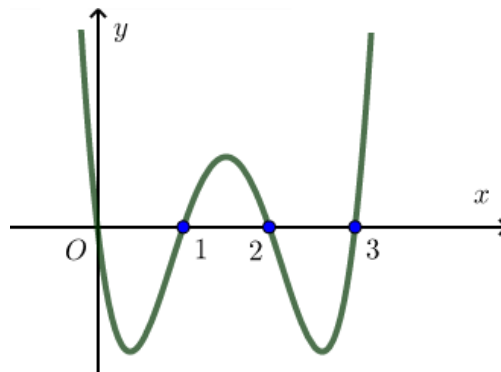
Xét hàm số  $y = f(x^2 - 1)$ . Ta có  $y' = 2x \cdot f'(x^2 - 1)$

$$y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ f'(x^2 - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 - 1 = -1 \\ x^2 - 1 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm 2 \end{cases}$$

|      |           |      |     |     |     |      |     |           |
|------|-----------|------|-----|-----|-----|------|-----|-----------|
| $x$  | $-\infty$ | $-2$ |     | $0$ |     | $2$  |     | $+\infty$ |
| $y'$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $-$ | $0$  | $+$ |           |
| $y$  | $+\infty$ |      |     | $3$ |     | $-1$ |     | $+\infty$ |

Hàm số  $f(x^2 - 1)$  nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; -2)$  và  $(0; 2)$

**Câu 51:** Cho  $f(x)$  là hàm bậc ba và có đồ thị hàm số  $f'(x^2 - 3x + 1)$  như hình vẽ:



Khi đó hàm số  $y = f(\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

- A.**  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ . **B.**  $(1; 2)$ . **C.**  $(0; 1)$ . **D.**  $(1; +\infty)$ .

**Lời giải**

Ta có:  $f'(x^2 - 3x + 1) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3) = (x^2 - 3x)(x^2 - 3x + 2)$ .

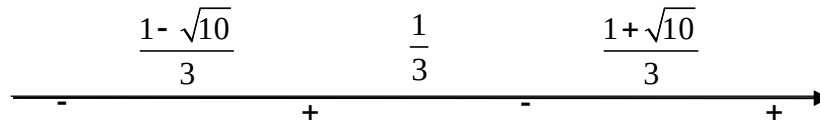
Đặt  $t = x^2 - 3x + 1 \Rightarrow x^2 - 3x = t - 1 \Rightarrow f'(t) = (t - 1)(t + 1)$

$\Rightarrow f(x)$  đồng biến trên  $(-\infty; -1)$  và  $(1; +\infty)$ , nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .

Lại có:  $y = f(\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1) \Rightarrow y' = \frac{6x - 2}{2\sqrt{3x^2 - 2x + 1}} \cdot f'(\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1)$

$$y' = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1 = 1 \\ \sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1 = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{10}}{3} \end{cases}$$

Xét dấu:



Kết luận: Hàm số  $y = f(\sqrt{3x^2 - 2x + 1} - 1)$  đồng biến trên  $\left(-\frac{1}{2}; 0\right)$ .  
có 2 khoảng đồng biến.

- Câu 52:** Cho hàm số  $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$  ( $a, b, c \in \mathbb{Z}$ ) thỏa mãn  $f(0) = f(\sqrt{3}) = f(-\sqrt{3})$ . Có tất cả bao nhiêu giá trị  $c \in (-1887; 1887)$  để hàm số  $g(x) = f(f(2x+1))$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$
- A. 1984.      B. 1985.      **C. 1986.**      D. 1987.

**Lời giải**

$$f(0) = f(1) = f(2) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = -3 \end{cases}$$

Theo giả thiết ta có

Vậy  $f(x) = x^3 - 3x + c \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow f'(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases}$

Xét hàm số  $g(x) = f(f(2x+1))$  ta có  $g'(x) = 2 \cdot f'(2x+1) \cdot f'(f(2x+1))$

Theo đề bài hàm số  $g(x) = f(f(2x+1))$  đồng biến trên khoảng  $(2; +\infty)$  nên  $g'(x) = 2 \cdot f'(2x+1) \cdot f'(f(2x+1)) \geq 0, \forall x \in (2; +\infty)$

$$f'(f(2x+1)) \geq 0, \forall x \in (2; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} f(2x+1) \geq 1 \\ f(2x+1) \leq -1 \end{cases}, \forall x \in (2; +\infty)$$

Đặt  $2x+1 = t$ , Do  $x \in (2; +\infty)$  nên  $t \in (5; +\infty)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 3t + c > 1 \\ t^3 - 3t + c < -1 \end{cases}, \forall t \in (5; +\infty) \Leftrightarrow \begin{cases} t^3 - 3t > 1 - c \\ t^3 - 3t < -1 - c \end{cases}, \forall t \in (5; +\infty) (*)$$

Khi đó ta có

$$f(t) = t^3 - 3t \quad (5; +\infty) \quad (*) \Leftrightarrow 1 - c \leq 10 \Leftrightarrow c \geq -109$$

Do hàm số đồng biến trên khoảng nên

Do  $c \in (-1887; 1887)$  và  $c \geq -109$  nên có  $100 + 1886 = 1986$  số nguyên

### TÍNH ĐƠN ĐIỀU CỦA HÀM SỐ (BT BỔ SUNG)

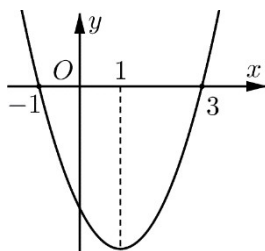
**Câu 53:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = x^2 + 2, x \in \mathbb{R}$ . Mệnh đề nào sau đây đúng?

- A.  $f(-1) > f(1)$ . B.  $f(-1) = f(1)$ . C.  $f(-1)^3 = f(1)$ . **D.  $f(-1) < f(1)$ .**

**Lời giải.**

Ta có  $f'(x) = x^2 + 2 > 0 \forall x$  hàm số đồng biến. Do đó  $f(-1) < f(1)$ .

**Câu 54:** Cho hàm số  $f(x)$  có đạo hàm  $f'(x)$  xác định, liên tục trên  $\mathbb{R}$  và  $f'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên. Khẳng định nào sau đây là đúng?



- A. Hàm số đồng biến trên  $(1; +\infty)$ . B. Hàm số đồng biến trên  $(-\infty; -1)$  và  $(3; +\infty)$ .  
C. Hàm số nghịch biến trên  $(-\infty; 1)$ . D. Hàm số đồng biến trên  $(-1; 3)$ .

**Lời giải.**

Dựa vào đồ thị của hàm số  $f'(x)$ , ta có nhận xét:

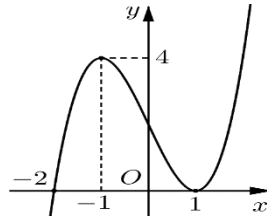
- $f'(x)$  đổi dấu từ "+" sang "-" khi qua điểm  $x = -1$ .
- $f'(x)$  đổi dấu từ "-" sang "+" khi qua điểm  $x = 3$ .

Do đó ta có bảng biến thiên

|         |           |         |     |        |           |
|---------|-----------|---------|-----|--------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$    |     | $3$    | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$     | $-$ | $0$    | $+$       |
| $f(x)$  |           | $f(-1)$ |     | $f(3)$ |           |

Dựa vào bảng biến thiên ta thấy đáp án B đúng.

**Câu 55:** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$ , có đạo hàm là  $f'(x)$ . Đồ thị hàm số  $f'(x)$  như hình bên. Khẳng định nào sau đây là sai?



A. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(-2; 1)$ .

B. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $(-1; 1)$ .

C. Hàm số  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ .

D. Hàm số  $f(x)$  nghịch biến trên  $(-\infty; -2)$ .

**Lời giải.**

Từ đồ thị của hàm số  $f(x)$ , ta có bảng biến thiên

|         |           |      |     |     |           |
|---------|-----------|------|-----|-----|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$ |     | $1$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$  | $+$ | $0$ | $+$       |
| $f(x)$  |           |      |     |     |           |

$\swarrow$   $f(-2)$   $\searrow$   $f(1)$

Từ BBT suy ra  $f(x)$  đồng biến trên  $(-2; 1)$  và  $f(x)$  đồng biến trên  $(1; +\infty)$ . Do đó đáp án B sai.

**Câu 56:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm và liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(x+1) = x^2 + 3x$ . Khi đó hàm số  $y = f(\sqrt{x^2 + 1})$  nghịch biến trên khoảng nào?

A.  $(-\infty; 1)$

B.  $(-1; 1)$ .

C.  $(-1; +\infty)$ .

D.  $(-\infty; 0)$ .

**Lời giải**

Đặt  $x+1=t \Rightarrow x^2+3x=t^2+t-2 \Rightarrow f'(t)=t^2+t-2 \Rightarrow f'(t)=0 \Leftrightarrow \begin{cases} t=1 \\ t=-2 \end{cases}$ .

$$y = f(\sqrt{x^2 + 1}) \Rightarrow y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \cdot f'(\sqrt{x^2 + 1}) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \sqrt{x^2 + 1}=1 \Rightarrow x=0 \\ \sqrt{x^2 + 1}=-2 \end{cases}$$

Lại có:

Lập bảng xét dấu suy ra hàm số nghịch biến trên khoảng  $(-\infty; 0)$ .

**Câu 57:** Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm liên tục trên  $\mathbb{R}$  thỏa mãn  $f'(1-x) = x^2 + 2x$ . Hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$  đồng biến trên khoảng nào?

A.  $(-\infty; 1)$

B.  $(-\infty; +\infty)$ .

C.  $(1; +\infty)$ .

D.  $(1-2\sqrt{2}; 1)$ .

**Lời giải**

Đặt  $t=1-x \Leftrightarrow x=1-t$ . Ta có:  $f'(t) = (1-t)^2 + 2(1-t) = t^2 - 4t + 3$ .

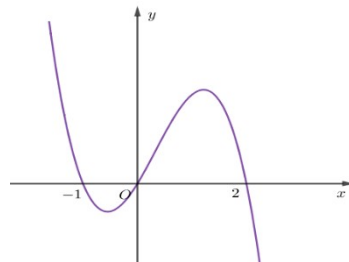
Đặt  $g(x) = f(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$ . Ta có  $g'(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}} f'(\sqrt{x^2 - 2x + 2})$ .

$$g'(x) > 0 \Leftrightarrow (x-1)f'(\sqrt{x^2-2x+2}) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ f'(\sqrt{x^2-2x+2}) > 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 1 \\ f'(\sqrt{x^2-2x+2}) < 0 \end{cases}$$

Xét

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 < \sqrt{x^2-2x+2} < 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ 1 < x^2-2x+2 < 9 \end{cases} \Leftrightarrow 1-2\sqrt{2} < x < 1.$$

**Câu 58:** Cho hàm số bậc bốn  $f(x)$ . Đồ thị hàm số  $y = f'(3-2x)$  được cho như hình bên. Hàm số  $y = f(x^2+1)$  nghịch biến trên khoảng nào?



A.  $(-\infty; 0)$ .

B.  $(0; 1)$ .

C.  $(2; +\infty)$ .

**D.  $(-1; 0)$ .**

**Lời giải**

Đặt  $t = 3 - 2x \Rightarrow f'(t) = f'(3 - 2x)$ .

$$f'(t) = 0 \Leftrightarrow f'(3 - 2x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \Rightarrow t = 5 \\ x = 0 \Rightarrow t = 3 \\ x = 2 \Rightarrow t = -1 \end{cases}.$$

Từ đó ta có bảng biến thiên của  $f(x)$ :

|         |           |      |         |        |           |     |           |     |
|---------|-----------|------|---------|--------|-----------|-----|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $3$     | $5$    | $+\infty$ |     |           |     |
| $f'(x)$ |           | $-$  | $0$     | $+$    | $0$       | $-$ | $0$       | $+$ |
| $f(x)$  | $-\infty$ |      | $f(-1)$ | $f(3)$ | $f(5)$    |     | $+\infty$ |     |

Xét  $g(x) = f(x^2+1)$ , ta có  $g'(x) = 2xf'(x^2+1)$ .

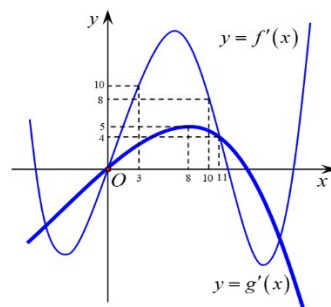
$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 2xf'(x^2+1) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(x^2+1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2+1 = -1 \\ x^2+1 = 3 \\ x^2+1 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ x = \pm 2 \end{cases}.$$

Ta có bảng biến thiên sau:

|         |           |         |                |        |               |        |           |
|---------|-----------|---------|----------------|--------|---------------|--------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $-2$    | $-\sqrt{2}$    | $0$    | $\sqrt{2}$    | $2$    | $+\infty$ |
| $g'(x)$ |           | $-$     | $0$            | $+$    | $0$           | $-$    | $+$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ | $g(-2)$ | $g(-\sqrt{2})$ | $g(0)$ | $g(\sqrt{2})$ | $g(2)$ | $+\infty$ |

Do đó hàm số  $f(x^2+1)$  nghịch biến trên  $(-1; 0)$ .

**Câu 59:** Cho hai hàm số  $y = f(x), y = g(x)$ . Hai hàm số  $y = f'(x)$  và  $y = g'(x)$  có đồ thị như hình vẽ bên, trong đó **đường cong đậm hơn** là đồ thị của hàm số  $y = g'(x)$ .



Hàm số  $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$  đồng biến trên khoảng nào dưới đây?

A.  $\left(5; \frac{31}{5}\right)$

**B.**  $\left(\frac{9}{4}; 3\right)$

C.  $\left(\frac{31}{5}; +\infty\right)$

D.  $\left(6; \frac{25}{4}\right)$

**Lời giải**

Ta có  $h'(x) = f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$ .

Hàm số  $h(x) = f(x+4) - g\left(2x - \frac{3}{2}\right)$  đồng biến  $\Leftrightarrow h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f'(x+4) - 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right) \geq 0$

$$\Leftrightarrow f'(x+4) \geq 2g'\left(2x - \frac{3}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \leq x+4 \leq 8 \\ 3 \leq 2x - \frac{3}{2} \leq 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ 3 + \frac{3}{2} \leq 2x \leq 8 + \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{2} \leq 2x \leq \frac{19}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{9}{4} \leq x \leq \frac{19}{4}.$$

