Trong bài viết này tôi muốn giới thiệu với các bạn một định lý mới khá mạnh và có nhiều ứng dụng.:) Tạm thời tôi lấy tên nó là

***Định lý T.I.C**: (**T**hree degree **I**nequality **C**ondition)*

Cho x, y, z là các số thực không âm, p, q, r là các số thực bất kỳ
Đặt $f(x,y,z)=x^3+y^3+z^3+p(x^2y+y^2z+z^2x)+q(xy^2+yz^2+zx^2)+3rxyz$
Khi đó điều kiện cần và đủ để $f(x,y,z)\ge 0\forall x,y,z\ge 0$ là $f(t,1,0)\ge 0\forall t\ge 0$ và $f(1,1,1)\ge 0$.

Chứng minh:

Dễ thấy rằng điều kiện cần là hiển nhiên. Vậy ta chỉ cần chứng minh điều kiện đủ. Khi đó, từ gt ta suy ra $f(1,1,1)=3(1+p+q+r)\ge 0$ và $f(1,1,0)=2+p+q\ge 0$
Với mỗi x,y,z không âm đặt

$$g(t)=f(x+t,y+t,z+t)=f(x,y,z)=\sum(x+t)^3+p\sum(x+t)^2(y+t)+q\sum(x+t)(y+t)^2+3r(x+t)(y+t)(z+t)$$

Xét g(t) trên $D=\left[-\min(x,y,z);+\infty\right]$
Ta có:

$$\begin{aligned}g'(t)&=3\sum(x+t)^2+p\left[\sum(x+t)^2+2\sum(x+t)(y+t)\right]+q\left[\sum(x+t)^2+2\sum(x+t)(y+t)\right]+3r\sum(x+t)(y+t)\\&=(3+p+q)\sum(x+t)^2+(3r+2p+2q)\sum(x+t)(y+t)\\&=\underbrace{(3+p+q)}_{>0}\left[\underbrace{\sum(x+t)^2-\sum(x+t)(y+t)}_{\ge 0}\right]+3\underbrace{(1+p+q+r)}_{>0}\underbrace{\sum(x+t)(y+t)}_{\ge 0}\ge 0\end{aligned}$$

Suy ra g(t) đồng biến trên D.
Không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $z=\min(x,y,z)$, khi đó từ trên ta suy ra

$$f(x,y,z)=g(0)\ge g(-z)=f(x-z,y-z,0)=(y-z)f\left(\frac{x-z}{y-z},1,0\right)\ge 0 \text{ (do } y\ge z \text{ và } f(t,1,0)\ge 0\forall t\ge 0)$$

Vậy định lý được chứng minh□

Nhận Xét:

1) Đk của BĐT trên cũng đúng với mọi hàm số dạng
$f(x,y,z)=p(x^3+y^3+z^3)+q(x^2y+y^2z+z^2x)+t(xy^2+yz^2+zx^2)+rxyz$
Trong đó p,q,r,t là các số thực bất kì.(cách chứng minh hoàn toàn tương tự)

2) Định lý trên cho phép chúng ta chuyển từ việc chứng minh một BĐT ba biến bậc ba thuần nhất về việc chứng minh nó trong TH cả 3 biến bằng nhau hoặc có một biến bằng 1 và một biến bằng 0, điều này cực kì có lợi vì việc chứng minh BĐT 1 biến hiển nhiên là đơn giản hơn nhiều (còn trong trường hợp 3 biến bằng nhau thông thường luôn đúng vì thường thì tại đó có dấu "=" xảy ra). Có thể nói rằng nó đã giải quyết triệt để tất cả các BĐT 3 biến bậc ba đối xứng hay hoán vị.
Để chứng minh cho sức mạnh của nó, tôi xin nêu mấy vd ☺

VD1 (BĐT Schur): CMR với mọi số thực không âm x, y, z thì

$$x^3+y^3+z^3+3xyz\ge xy(x+y)+yz(y+z)+zx(z+x)$$

Lời giải:

Đặt

$f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - xy(x+y) - yz(y+z) - zx(z+x)$

$= x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz - (x^2y + y^2z + z^2x) - (xy^2 + yz^2 + zx^2)$

Áp dụng định lý trên ta thấy chỉ cần chứng minh

$f(t,1,0) = t^3 - t^2 - t + 1 \geq 0$ (trường hợp ba biến bằng 1 là hiển nhiên)

$\Leftrightarrow (t-1)^2(t+1) \geq 0$, đúng với mọi t không âm.

Vậy BĐT được chứng minh.

Đẳng thức xảy ra khi ba biến bằng nhau hoặc hai biến bằng nhau, một biến bằng 0.

VD2 (Phạm Kim Hùng): CMR với mọi x, y, z không âm thì

$$\frac{x+2y}{z+2y} + \frac{y+2z}{x+2z} + \frac{z+2x}{y+2x} \geq 3$$

Lời giải:

Quy đồng mẫu số và khai triển, BĐT cần chứng minh trở thành

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq \frac{3}{2}\left(x^2y + y^2z + z^2x\right)$$

Áp dụng định lý ta thấy chỉ cần chứng minh

$$f(t,1,0) = t^3 + 1 - \frac{3}{2}t^2 \geq 0$$

Mặt khác, theo BĐT AM_GM thì $t^3 + 1 = \frac{t^3}{2} + \frac{t^3}{2} + 1 \geq \frac{3}{\sqrt[3]{4}}t^2 > \frac{3}{2}t^2$, vậy ta có đpcm.

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi x = y = z.

Sau đây là bài toán mở mà anh Hùng đã từng nhắc tới:

VD3: Cho x,y,z là các số không thực không âm, k>1. CMR

$$\frac{x+ky}{z+ky} + \frac{y+kz}{x+kz} + \frac{z+kx}{y+kx} > 2$$

Lời giải: Nhận xét rằng sau khi quy đồng và khai triển thì BĐT có dạng ba biến thuần nhất và có chứa sô hạng $x^3 + y^3 + z^3$, vậy áp dụng định lý trên ta thấy chỉ cần chứng minh BĐT trong trường hợp có 1 biến bằng 1 và 1 biến bằng 0 (trường hợp ba biến bằng nhau là hiển nhiên).Giả sử y=1,z=0, ta cần chứng minh

$$\frac{x+k}{k} + \frac{1}{x} + \frac{kx}{1+kx} > 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{k} + \frac{1}{x} + \frac{kx}{1+kx} > 1$$

Mà $\frac{x}{k} + \frac{1}{x} + \frac{kx}{1+kx} = \frac{x^2+k}{kx} + \frac{kx}{1+kx} > \frac{x^2+kx+k}{1+kx} \geq \frac{kx+1}{1+kx} = 1$

Vậy ta có đpcm.

NX: Dùng máy tính ta thấy khi k lớn vô cùng thì GTNN của biểu thức dần tới 2, có nghĩa 2 là cận dưới nhỏ nhất của nó.

VD4: CMR với mọi số thực không âm x, y, z thì
$$\left(1+\frac{4a}{b+c}\right)\left(1+\frac{4b}{c+a}\right)\left(1+\frac{4c}{a+b}\right)\geq 25$$

Lời giải:
Với nhận xét như trên ta thấy chỉ cần chứng minh BĐT trong trường hợp:
a=b=c=1: $3^3 \geq 27$, hiển nhiên.
b=1,c=0: $(1+4a)\left(1+\frac{4}{a}\right)\geq 25 \Leftrightarrow \frac{(a-1)^2}{a}\geq 0$, đúng
Vậy ta có đpcm.
Đẳng thức xảy ra khi va chỉ khi có hai biến bằng nhau, 1 biến bằng 0.

BĐT sau cho ta thấy ý nghĩa của T.I.C:
VD5: CMR với mọi x,y,z không âm
$$4\left(x^3+y^3+z^3\right)-15(x^2y+y^2z+z^2x)+12(xy^2+yz^2+zx^2)-3xyz\geq 0$$
Lời giải:
Đây chỉ là một hệ quả cơ bản của T.I.C.Thoạt nhìn ta nghĩ có thể đánh giá bằng AM_GM, nhưng thực chất BĐT này rất khó, vì ngoài dấu bằng khi 3 biến bằng nhau, nó còn đạt dấu bằng khi chẳng hạn x=2,y=1,z=0.