

MỘT SỐ BÀI TOÁN HẸNG SỐ TỐT NHẤT

Lê Xuân Đại, GV THPT Chuyên Vĩnh Phúc

Bài 1. Tìm tất cả các số thực r sao cho bất đẳng thức

$$\left(r + \frac{a}{b+c}\right)\left(r + \frac{b}{c+a}\right)\left(r + \frac{c}{a+b}\right) \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3 \quad (6) \text{ đúng với mọi bộ 3 số thực dương } a, b, c$$

(Việt nam TST 2009)

Lời giải

Giả sử bất đẳng thức (6) đúng với mọi bộ 3 số thực dương (a, b, c)

Xét 3 dãy số (a_n) , (b_n) , (c_n) : $a_n = 1$, $b_n = c_n = n$ ($\forall n \in \mathbb{N}^*$)

$$\Rightarrow \left(r + \frac{1}{2n}\right)\left(r + \frac{n}{n+1}\right)\left(r + \frac{n}{n+1}\right) \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\left(r + \frac{1}{2n}\right)\left(r + \frac{n}{n+1}\right)\left(r + \frac{n}{n+1}\right)\right] \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow r(r+1)^2 \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \\ r \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \end{cases}$$

Giả sử $a, b, c > 0$ và $a+b+c = 1$

$$(6) \Leftrightarrow \frac{r(b+c)+a}{b+c} \cdot \frac{r(c+a)+b}{c+a} \cdot \frac{r(a+b)+c}{a+b} \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3$$

$$\Leftrightarrow [r+(1-r)a][r+(1-r)b][r+(1-r)c] \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3 (1-a)(1-b)(1-c)$$

$$\Leftrightarrow r^3 + r^2(1-r) + r(1-r)^2(ab+bc+ca) + (1-r)^3 abc \geq \left(r + \frac{1}{2}\right)^3 (ab+bc+ca-abc)$$

$$\Leftrightarrow \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^3 - r(1-r)^2\right](ab+bc+ca) - \left[\left(r + \frac{1}{2}\right)^3 + (1-r)^3\right] abc \leq r^2$$

$$\Leftrightarrow ab+bc+ca - \frac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1} abc \leq \frac{8r^2}{28r^2-2r+1} \quad (7)$$

$$\text{Đặt } k = \frac{9(4r^2-2r+1)}{28r^2-2r+1} \text{ và } E = ab+bc+ca - kabc$$

$$\text{Với } r \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \text{ hoặc } r \leq \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \text{ thì } 4r^2+2r-1 \geq 0$$

$$\Rightarrow k \leq \frac{9}{4}$$

Theo bài toán 7 ta có $E \leq \frac{9-k}{27} = \frac{8r^2}{28r^2 - 2r + 1}$

Vậy (7) đúng với mọi $a, b, c > 0$ ($a+b+c=1$). Tập hợp các giá trị r cần tìm là

$$\left(-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right] \cup \left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right)$$

Bài 2: Cho k là số thực, $k \geq 8$. Chứng minh rằng với các số nguyên dương a, b, c ta có bất đẳng thức

$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + kca}} + \frac{c}{\sqrt{c^2 + kab}} \geq \frac{3}{\sqrt{k+1}}$$

Lời giải: Ta có, theo Cauchy-Schwarz

$$\left(\sum \frac{a}{\sqrt{a^2 + kbc}}\right) \left(\sum a\sqrt{a^2 + kbc}\right) \geq \left(\sum a\right)^2$$

Bây giờ, áp dụng Cauchy-Schwarz cho tổng thứ hai

$$\left(\sum a\sqrt{a^2 + kbc}\right)^2 = \left(\sum \sqrt{a} \sqrt{a^3 + kabc}\right)^2 \leq \left(\sum a\right) \left(\sum (a^3 + kabc)\right)$$

Như vậy ta chỉ cần chứng minh

$$(k+1) \left(\sum a\right)^3 \geq 9 \left(\sum (a^3 + kabc)\right)$$

Nhưng điều này tương đương với

$$(k-8)(a^3 + b^3 + c^3) + 3(k+1)(a+b)(b+c)(c+a) \geq 27kabc$$

Bất đẳng thức cuối cùng là hiển nhiên theo BĐT trung bình cộng-trung bình nhân.

Tuy nhiên ta có thể hỏi một cách khác khó hơn như sau:

Cho biểu thức $P = \frac{1}{\sqrt{1+kx}} + \frac{1}{\sqrt{1+ky}} + \frac{1}{\sqrt{1+kz}}$ với x, y, z dương và $xyz=1$, $k>0$ cho trước

Tìm k để P đạt giá trị nhỏ nhất và tìm giá trị nhỏ nhất đó.

Lời giải.

- Với $k \geq 8$ thì tương tự ta chứng minh được $\frac{3}{\sqrt{k+1}}$, khi $x=y=z=1$ (có thể chứng minh bằng biến đổi tương đương, bằng cách quy đồng...)
- Với $0 < k < 8$, ta chứng minh P không có giá trị nhỏ nhất.

Dễ thấy $P > 1$, ta cần chỉ ra một bộ (x_n, y_n, z_n) sao cho $\lim P_n = 1$.

Chọn $y_n = z_n = n; x_n = \frac{1}{n^2}$ thì $\lim P_n = 1$.

Bài 3:

Tìm số C lớn nhất sao cho với mọi $a, b, c, d, e \geq 0$ thỏa mãn $a + b = c + d + e$ ta đều có:

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq C(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2$$

Lời giải: Cho $a=b=3, c=d=e=2$, ta được: $C \leq \frac{\sqrt{30}}{6(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$

Ta sẽ chứng minh BĐT đúng với $C = \frac{\sqrt{30}}{6(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2}$. Thật vậy, đặt $a + b = c + d + e = t$

Theo BĐT Cauchy-Schwarz ta có:

$$a^2 + b^2 \geq \frac{(a+b)^2}{2} = \frac{t^2}{2} \text{ và } c^2 + d^2 + e^2 \geq \frac{(c+d+e)^2}{3} = \frac{t^2}{3}$$

$$\text{Do đó } \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2} \geq \sqrt{\frac{5}{6}} \cdot t \quad (1)$$

$$\text{Lại có } \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)} = \sqrt{2t} \text{ và } \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e} \leq \sqrt{3(c+d+e)} = \sqrt{3t}$$

$$\text{Do đó } (\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2 \leq (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 t \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2}}{(\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} + \sqrt{d} + \sqrt{e})^2} \geq \frac{\sqrt{30}}{6(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2} \quad (\text{đpcm}).$$

Bài 4. Tìm số M nhỏ nhất sao cho với mọi $a, b, c \in \mathbb{R}$ ta đều có:

$$|ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2$$

Lời giải. Trước hết ta chứng minh

$$A = |ab(a^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)|$$

Thật vậy, xét đa thức $P(x) = bx(x^2 - b^2) + bc(b^2 - c^2) + cx(c^2 - x^2)$

$$\text{Ta có } P(b) = P(c) = P(-b-c) = 0 \Rightarrow P(x) = (b-c)(x-b)(x-c)(x+b+c)$$

$$\text{Khi đó } A = |P(a)| = |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \quad (\text{đpcm}).$$

Trở lại bài toán: Tìm M nhỏ nhất để $|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq M(a^2 + b^2 + c^2)^2 \quad (1)$

$$\text{Giả sử } a \leq b \leq c. \text{ Ta có } |(a-b)(b-c)| = (b-a)(c-b) \leq \left(\frac{b-a+c-b}{2}\right)^2 = \frac{(a-c)^2}{4} \quad (2)$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $a + c = 2b$.

Để thấy lại có $3(c-a)^2 \leq 2[(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2]$ (3)

Dấu bằng trong (3) xảy ra khi $a + c = 2b$.

Từ (2) và (3) suy ra:

$$\begin{aligned} |(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| &\leq \frac{1}{4} |(c-a)^3(a+b+c)| \\ &= \frac{1}{4} \sqrt{(c-a)^6 \cdot (a+b+c)^2} \leq \frac{1}{4} \sqrt{\left(\frac{2[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2]}{3} \right)^3 \cdot (a+b+c)^2} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sqrt[4]{\left[\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{3} \right]^3 \cdot (a+b+c)^2} \right)^2 \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 + (a+b+c)^2}{4} \right)^2 \quad (AM - GM) \\ &= \frac{9\sqrt{2}}{32} (a^2 + b^2 + c^2)^2 \end{aligned}$$

Như vậy BĐT (1) đúng với $M = \frac{9\sqrt{2}}{32}$, đẳng thức xảy ra khi

$$a + c = 2b \text{ và } \frac{(b-a)^2 + (c-b)^2 + (c-a)^2}{3} = (a+b+c)^2, \text{ từ đó giải ra } \begin{cases} a + c = 2b \\ (c-a)^2 = 18b^2 \end{cases}$$

Có thể chọn $b=1$ thì $a = 1 - \frac{3}{2}\sqrt{2}; c = 1 + \frac{3}{2}\sqrt{2}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của M bằng $\frac{9\sqrt{2}}{32}$.

Chú ý: Có thể chứng minh $|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq \frac{9\sqrt{2}}{32} (a^2 + b^2 + c^2)^2$ bằng cách đơn giản

hơn như sau: Giả sử $a = \max(a, b, c)$, ta có

$$\begin{aligned} 9(a^2 + b^2 + c^2)^2 &= [(a+b+c)^2 + 2(b-c)^2 + 2(a-b)(a-c)]^2 \\ &\geq [2\sqrt{2}|(a+b+c)(b-c)| + 2|(a-b)(a-c)|]^2 \\ &\geq 16\sqrt{2}|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \end{aligned}$$

Vậy $|(b-c)(a-b)(a-c)(a+b+c)| \leq \frac{9\sqrt{2}}{32} (a^2 + b^2 + c^2)^2$ (đpcm).

Bài 5.

Cho n số không âm $x_1, x_2, \dots, x_n$, $n \geq 2$. Tìm hằng số C nhỏ nhất sao cho

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) \leq C \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^4 \quad (1)$$

Lời giải.

1) Nếu $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ thì (1) đúng với mọi $C \geq 0$

2) Nếu tồn tại $x_i > 0$ thì $x_1 + x_2 + \dots + x_n > 0$. Do tính thuần nhất, ta chuẩn hoá

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Khi đó } F(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j (x_i^2 + x_j^2) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i^3 x_j + \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j^3 \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left(x_i^3 \cdot \sum_{j \neq i} x_j \right) = \sum_{1 \leq i \leq n} x_i^3 (1 - x_i) = \sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i) \end{aligned}$$

Do vậy ta cần tìm C nhỏ nhất sao cho $\sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i) \leq C$ với $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$.

Ta có $f'(x) = 6x(1-2x)$ nên hàm $f(x)$ lồi trên $\left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Giả sử $x_1 \geq x_2 \geq \dots \geq x_n$. Ta sẽ áp dụng BĐT Karamatta. Xét các trường hợp sau:

a) $x_1 \leq \frac{1}{2}$. Khi đó $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, \dots, 0\right) > (x_1, x_2, \dots, x_n)$, suy ra

$$\sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i) \leq f\left(\frac{1}{2}\right) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(0) + \dots + f(0) = \frac{1}{8}$$

b) $x_1 \geq \frac{1}{2}$. Khi đó $\left(1 - x_1, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_{(n-2)}\right) > (x_2, x_3, \dots, x_n)$, suy ra

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i) &= f(x_1) + \sum_{2 \leq i \leq n} f(x_i) \leq f(x_1) + f(1 - x_1) + f(0) + \dots + f(0) = f(x_1) + f(1 - x_1) \\ &= x_1(1 - x_1) \left[x_1^2 + (1 - x_1)^2 \right] \\ &= x_1(1 - x_1) \left[2x_1^2 + (1 - 2x_1) \right] \leq \frac{1}{8} \end{aligned}$$

Vậy $\sum_{1 \leq i \leq n} f(x_i) \leq \frac{1}{8}$ với mọi $x_i \geq 0$ và $x_1 + x_2 + \dots + x_n = 1$. Do đó $C \geq \frac{1}{8}$.

Kết luận: Giá trị nhỏ nhất của C bằng $\frac{1}{8}$.

Bài 6. Tìm tất cả các số thực không âm k sao cho với mọi a, b, c không âm thoả mãn

$$a^2 + b^2 + c^2 + kabc = 3 + k \quad (*) \text{ ta đều có bất đẳng thức } a + b + c \leq 3.$$

Lời giải. 1) Giả sử k thoả mãn đề bài. Cho $a=0, b=c=\sqrt{\frac{3+k}{2}}$ thì a,b,c thoả mãn (*)

$$\text{Lúc đó } a+b+c=2\sqrt{\frac{3+k}{2}} \leq 3 \Rightarrow k \leq \frac{3}{2}.$$

Ta chứng minh với mọi $0 \leq k \leq \frac{3}{2}$ đều thoả mãn đề bài.

2) **Bổ đề:** Nếu x,y,z không âm thoả mãn $x+y+z=3$ thì $x^2+y^2+z^2+kxyz \geq 3+k$ với mọi $k \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Chứng minh bổ đề: Áp dụng BĐT $(x+y-z)(y+z-x)(x+z-y) \leq xyz$ ta được

$$(3-2x)(3-2y)(3-2z) \leq xyz$$

$$\text{Suy ra } 9xyz \geq 12(xy+yz+xz)-27 \Rightarrow kxyz \geq -3k + \frac{4k}{3}(xy+yz+xz)$$

$$\text{Do đó } P = x^2+y^2+z^2+kxyz \geq x^2+y^2+z^2 + \frac{4k}{3}(xy+yz+xz) - 3k$$

$$\Rightarrow P \geq \left[\frac{2k}{3}(x^2+y^2+z^2) + \frac{4k}{3}(xy+yz+xz) \right] + \frac{3-2k}{3}(x^2+y^2+z^2) - 3k$$

$$\Rightarrow P \geq \frac{2k}{3}(x+y+z)^2 + \frac{3-2k}{3}(x^2+y^2+z^2) - 3k \geq \dots \geq k+3 \quad (\text{đpcm}).$$

* Trở lại bài toán: Với $k \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$. Xét a,b,c không âm thoả mãn (*). Ta cần chứng minh

$$a+b+c \leq 3.$$

Thật vậy, phản chứng rằng $a+b+c > 3$, khi đó tồn tại $t > 1$ sao cho $\frac{a+b+c}{t} = 3$

$$\text{Đặt } x = \frac{a}{t}; y = \frac{b}{t}; z = \frac{c}{t} \text{ thì } x+y+z=3.$$

$$\text{Áp dụng bổ đề ta được : } x^2+y^2+z^2+kxyz \geq 3+k \Rightarrow a^2+b^2+c^2 + \frac{kabc}{t} \geq (3+k)t^2 > 3+k$$

Mà $t > 1$ nên $a^2+b^2+c^2+kabc \geq a^2+b^2+c^2 + \frac{kabc}{t}$. Do đó $a^2+b^2+c^2+kabc > k+3$, mâu thuẫn với giả thiết.

Kết luận: Các giá trị cần tìm của k là $k \in \left[0; \frac{3}{2}\right]$.

Bài 7. Tìm số thực k lớn nhất sao cho với mọi a, b, c không âm thoả mãn $a + b + c = 1$ ta đều có bất đẳng thức $a^3 + b^3 + c^3 + kabc \geq \frac{1}{9} + \frac{k}{27}$.

Lời giải. Cho $a = b = \frac{1}{2}; c = 0$ ta suy ra $k \leq \frac{15}{4}$.

Ta chứng minh BĐT đúng với $k = \frac{15}{4}$, tức là cần chứng minh:

$$a^3 + b^3 + c^3 + \frac{15}{4}abc \geq \frac{1}{4} \quad (1)$$

BĐT (1) có thể được chứng minh bằng BĐT Schur.