

ĐỀ 28

Câu 1. Giải hệ phương trình

$$\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x & (1) \\ (x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2 + x + y + 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu 2.

- Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = |x^3 - mx^2 + 12x + 2m|$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?
- Tìm hàm số bậc ba $y = f(x)$ biết đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5.

Câu 3. Một hộp có chứa 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và n viên bi vàng (các viên bi kích thước như nhau, n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Biết xác suất để trong ba viên bi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182}$. Tính xác suất P để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ.

Câu 4. Cho các số thực $x, y, z \geq -1$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức

$$P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy + 1)} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4x + 5}.$$

Câu 5.

- Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a; AC = BD = b; AB = CD = c$. Đặt $\alpha; \beta; \gamma$ lần lượt là góc giữa BC và AD ; AC và BD ; AB và CD . Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2 \cos \alpha; b^2 \cos \beta; c^2 \cos \gamma$ có một số hạng bằng tổng các số hạng còn lại.
- Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6; BC = 12; AA' = AC = 6\sqrt{3}$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$. Tìm giá trị nhỏ nhất tổng diện tích các mặt của tứ diện $MABC$.
- Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC . Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.

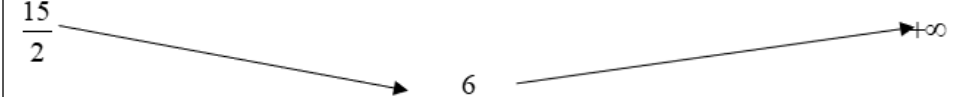
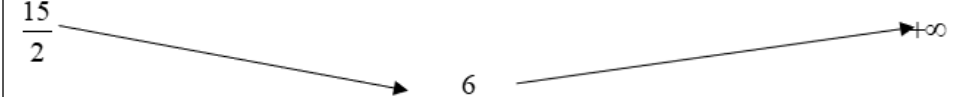
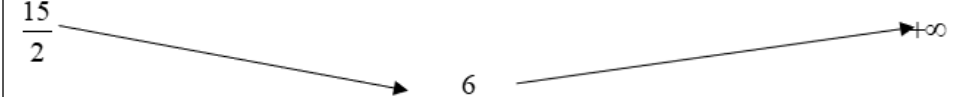
-----/Hết/-----

Lưu ý:

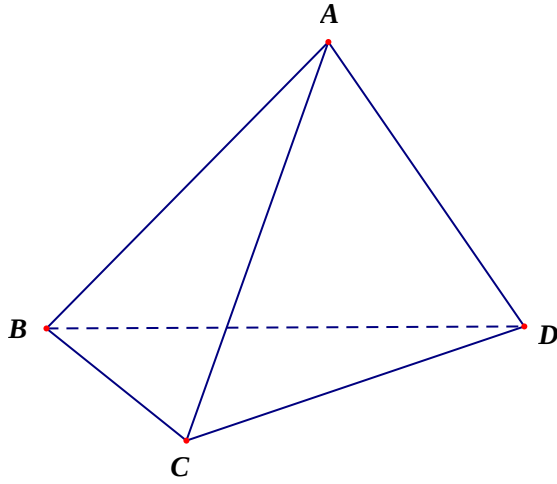
- Giám thị không giải thích gì thêm.
- Học sinh không sử dụng máy tính bỏ túi

ĐÁP ÁN

Câu	Nội dung	Điểm
1 (3đ)	Giải hệ phương trình : $\begin{cases} 13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{y+2} = 16x & (1) \\ (x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2x^2 + x + y + 1 & (2) \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$	
	Lời giải. Điều kiện $\begin{cases} x \geq 1 \\ y \geq -2 \\ x - y + 3 \geq 0 \end{cases}$ Từ phương trình (2) ta có $(x^2 + x)\sqrt{x-y+3} = 2(x^2 + x) - x + y + 1$ $(x^2 + x)(\sqrt{x-y+3} - 2) + x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow (x^2 + x) \frac{x-y-1}{\sqrt{x-y+3} + 2} + x - y - 1 = 0$ $(x - y - 1) \left(\frac{x^2 + x}{\sqrt{x-y+3} + 2} + 1 \right) = 0$ Với $x \geq 1 \Rightarrow \frac{x^2 + x}{\sqrt{x-y+3} + 2} + 1 > 0$	1.5
	Nên ta có $x - y - 1 = 0 \Leftrightarrow y = x - 1$ thế vào phương trình (1) ta được $13\sqrt{x-1} + 9\sqrt{x+1} = 16x \Leftrightarrow 13 \left(x - 1 - \sqrt{x-1} + \frac{1}{4} \right) + 3 \left(x + 1 - 3\sqrt{x+1} + \frac{9}{4} \right) = 0$ $\Leftrightarrow 13 \left(\sqrt{x-1} - \frac{1}{2} \right)^2 + 3 \left(\sqrt{x+1} - \frac{3}{2} \right)^2 = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-1} = \frac{1}{2} \\ \sqrt{x+1} = \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \quad (TM)$ Vậy nghiệm của hệ đã cho là $(x; y) = \left(\frac{5}{4}; \frac{1}{4} \right)$.	1.5
2a (3đ)	Có tất cả bao nhiêu giá trị nguyên của m để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$ luôn đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$?	
	Lời giải Xét $f(x) = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$. Ta có $f'(x) = 3x^2 - 2mx + 12$ và $f(1) = 13 + m$. Để hàm số $y = x^3 - mx^2 + 12x + 2m$ đồng biến trên khoảng $(1; +\infty)$ thì có hai trường hợp sau Trường hợp 1: Hàm số $f(x)$ nghịch biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \leq 0$. Điều này không xảy ra vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - mx^2 + 12x + 2m) = +\infty$.	1.0
	Trường hợp 2: Hàm số $f(x)$ đồng biến trên $(1; +\infty)$ và $f(1) \geq 0$.	2.0

	$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 2mx + 12 \geq 0, \forall x > 1 \\ 13 + m \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \\ m \geq -13 \end{cases} \quad (*)$ Xét $g(x) = \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}$ trên khoảng $(1; +\infty)$: $g'(x) = \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2}$; $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{3}{2} - \frac{6}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 2$. Bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>1</td><td></td><td>2</td><td></td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$g'(x)$</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td></td></tr><tr><td>$g(x)$</td><td>$\frac{15}{2}$</td><td colspan="4"></td></tr></table> Từ bảng biến thiên suy ra $m \leq \frac{3}{2}x + \frac{6}{x}, \forall x > 1 \Leftrightarrow m \leq 6$. Kết hợp (*) suy ra $-13 \leq m \leq 6$. Vì m nguyên nên $m \in \{-13; -12; -11; \dots; 5; 6\}$. Vậy có 20 giá trị nguyên của m.	x	1		2		$+\infty$	$g'(x)$		-	0	+		$g(x)$	$\frac{15}{2}$					
x	1		2		$+\infty$															
$g'(x)$		-	0	+																
$g(x)$	$\frac{15}{2}$																			
2b (2đ)	Tìm hàm số bậc ba $y = f(x)$ biết đồ thị đi qua điểm $A(1;1), B(2;4), C(3;9)$. Các đường thẳng AB, AC, BC lại cắt đồ thị lần lượt tại các điểm M, N, P (M khác A và B , N khác A và C , P khác B và C). Biết rằng tổng các hoành độ của M, N, P bằng 5.																			
	Lời giải Từ giả thuyết bài toán ta giả sử $f(x) = a(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$ ($a \neq 0$) Ta có: $AB: y = 3x - 2$, $AC: y = 4x - 3$, $BC: y = 5x - 6$.	0.5																		
	Khi đó: Hoành độ của M là nghiệm của phương trình: $a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + x_M^2 = 3x_M - 2$ $\Leftrightarrow a(x_M - 1)(x_M - 2)(x_M - 3) + (x_M - 1)(x_M - 2) = 0 \Leftrightarrow a(x_M - 3) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_M = 3 - \frac{1}{a}$.	0.5																		
	Hoành độ của N là nghiệm của phương trình: $a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + x_N^2 = 4x_N - 3$ $\Leftrightarrow a(x_N - 1)(x_N - 2)(x_N - 3) + (x_N - 1)(x_N - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_N - 2) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_N = 2 - \frac{1}{a}$.	0.5																		
	Hoành độ của P là nghiệm của phương trình: $a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + x_P^2 = 5x_P - 6$ $\Leftrightarrow a(x_P - 1)(x_P - 2)(x_P - 3) + (x_P - 2)(x_P - 3) = 0 \Leftrightarrow a(x_P - 1) + 1 = 0 \Leftrightarrow x_P = 1 - \frac{1}{a}$. Từ giả thuyết ta có; $x_M + x_N + x_P = 5 \Leftrightarrow 6 - \frac{3}{a} = 5 \Leftrightarrow a = 3$. Do đó: $f(x) = 3(x-1)(x-2)(x-3) + x^2$	0.5																		
3 2.5đ	Một hộp có chứa 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và n viên bi vàng (các viên bi kích thước như nhau, n là số nguyên dương). Lấy ngẫu nhiên 3 viên bi từ hộp. Biết xác suất để trong ba viên vi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182}$. Tính xác suất P để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ.																			
	Lời giải Số cách lấy 3 viên bi bất kì từ hộp là: C_{8+n}^3 .	1.0																		

	Số cách lấy 3 viên đủ 3 màu là: $C_5^1 \cdot C_3^1 \cdot C_n^1 = 15n$. Vì xác suất để trong ba viên vi lấy được có đủ 3 màu là $\frac{45}{182} \Rightarrow \frac{15n}{C_{8+n}^3} = \frac{45}{182} \Rightarrow n = 6$. $\Rightarrow$ có 5 viên bi đỏ, 3 viên bi xanh và 6 viên bi vàng. Số cách lấy 3 bi bất kì là C_{14}^3.	
	Trường hợp 1: 3 bi lấy ra không có bi đỏ, khi đó số cách lấy là C_9^3. Trường hợp 2: 3 bi lấy ra có 1 bi đỏ, khi đó số cách lấy là $C_5^1 \cdot C_9^2$ Trường hợp 2: 3 bi lấy ra có 2 bi đỏ, khi đó số cách lấy là $C_5^2 \cdot C_9^1$. Vậy xác suất để trong 3 viên bi lấy được có nhiều nhất hai viên bi đỏ là $P = \frac{177}{182}$	1.5
4 1.5đ	Cho các số thực $x, y, z \geq -1$ thỏa mãn $x + y + z = 3$. Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $P = \frac{x^2}{x^2 + y^2 + 4(xy + 1)} + \frac{y^2 - 1}{z^2 - 4x + 5}.$	
	Lời giải. Ta có $x + y = z - 3$. Đồng thời, do $x, y \geq -1 \Rightarrow (x + 1)(y + 1) \geq 0 \Leftrightarrow xy \geq -(x + y) - 1$ Do đó $x^2 + y^2 + 4(xy + 1) = (x + y)^2 + 2xy + 4 \geq (x + y)^2 - 2(x + y) + 2 =$ $= (3 - z)^2 - 2(3 - z) + 2 = z^2 - 4z + 5$ Lại có $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy \leq (x + y)^2 + 2(x + y) + 2 = z^2 - 18z + 17$ Từ các kết quả trên suy ra $P \leq \frac{z^2 - 8z + 16}{z^2 - 4z + 5}$.	1.0
	Khảo sát hàm số $f(z) = \frac{z^2 - 8z + 16}{z^2 - 4z + 5}, z \in [-1; +\infty)$ Ta tìm được $\max_{[-1; +\infty)} f(z) = f\left(\frac{3}{2}\right) = 5$. Hay $\max P = 5 \Leftrightarrow (x; y; z) = \left\{ \left(-1; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}\right), \left(\frac{5}{2}; -1; \frac{3}{2}\right) \right\}$	0.5
5a 2đ	Cho tứ diện $ABCD$ có $BC = AD = a; AC = BD = b; AB = CD = c$. Đặt $\alpha; \beta; \gamma$ lần lượt là góc giữa BC và AD; AC và BD; AB và CD. Chứng minh rằng trong ba số hạng $a^2 \cos \alpha; b^2 \cos \beta; c^2 \cos \gamma$ có một số hạng bằng tổng các số hạng còn lại.	
	Giải	1.5



Trước hết ta chứng minh $\cos \alpha = \frac{|c^2 - b^2|}{a^2} \Leftrightarrow a^2 \cos \alpha = |c^2 - b^2|$

Thật vậy,

$$\begin{aligned} \cos \alpha &= \frac{|\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD}|}{a^2} = \frac{|(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) \cdot \overrightarrow{AD}|}{a^2} = \frac{|\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}|}{a^2} \\ &= \frac{|2 \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD} - 2 \cdot \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}|}{2 \cdot a^2} \\ &= \frac{\left[AC^2 + AD^2 - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})^2 \right] - \left[AC^2 + AD^2 - (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD})^2 \right]}{2a^2} = \frac{|b^2 - c^2|}{a^2} \end{aligned}$$

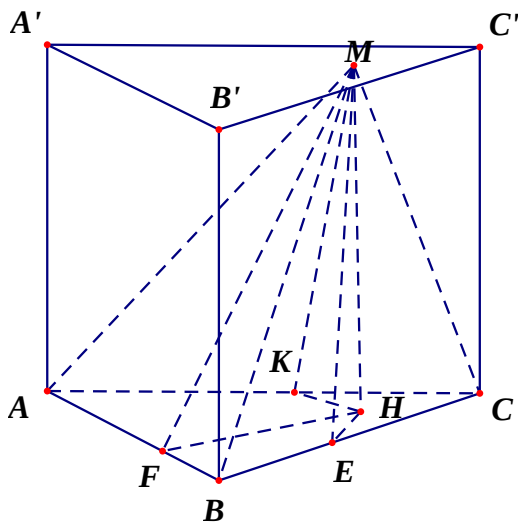
Chứng minh tương tự $b^2 \cos \beta = |a^2 - c^2|$; $c^2 \cos \gamma = |a^2 - b^2|$

Giả sử $a \leq b \leq c$ thì $b^2 \cos \beta = c^2 - a^2 = (c^2 - b^2) + (b^2 - a^2) = a^2 \cos \alpha + c^2 \cos \gamma$

0.5

5b
2đ

Cho lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = 6$; $BC = 12$; $AA' = AC = 6\sqrt{3}$. Gọi M là điểm nằm trong tam giác $A'B'C'$. Tìm giá trị nhỏ nhất tổng diện tích các mặt của tứ diện $MABC$.



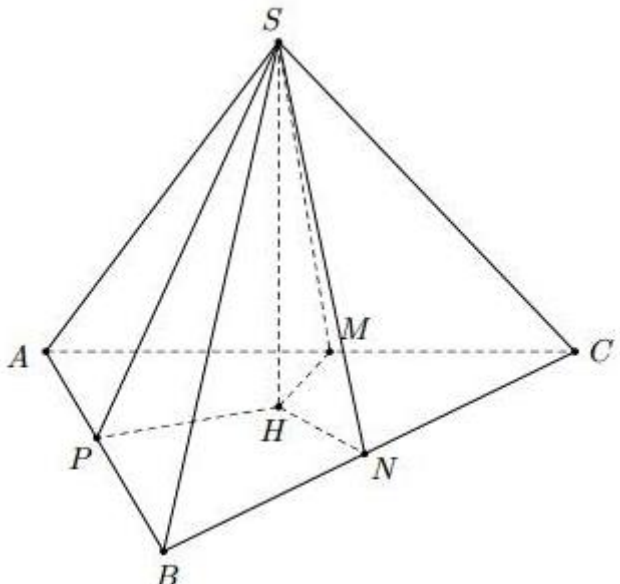
Giải

Gọi H là hình chiếu của M lên mp(ABC)

Gọi E, F, K lần lượt là hình chiếu của H lên BC; BA; AC.

Đặt $x = HE$; $y = HF$; $z = HK$ ta có:

0.5

	$S_{HAB} + S_{HBC} + S_{HCA} = S_{ABC} \Leftrightarrow 3x + 6y + 3\sqrt{3}z = 18\sqrt{3} \Leftrightarrow x + 2y + \sqrt{3}z = 6\sqrt{3}.$ Tổng diện tích các mặt của tứ diện:	
	$S = \frac{1}{2}(MF \cdot AB + ME \cdot BC + MK \cdot CA + AB \cdot AC)$ $= \frac{1}{2}\left[6\sqrt{108+x^2} + 12\sqrt{108+y^2} + 6\sqrt{3}\sqrt{108+z^2} + 36\sqrt{3}\right]$ $= 3\sqrt{108+x^2} + 6\sqrt{108+y^2} + 3\sqrt{3}\sqrt{108+z^2} + 18\sqrt{3}$	0.5
	$P = \sqrt{108+x^2} + 2\sqrt{108+y^2} + \sqrt{3}\sqrt{108+z^2}$ $= \sqrt{(\sqrt{108})^2 + x^2} + \sqrt{(2\sqrt{108})^2 + (2y)^2} + \sqrt{(\sqrt{3}\sqrt{108})^2 + (\sqrt{3}z)^2}$ $\geq \sqrt{\left[(3+\sqrt{3})\sqrt{108}\right]^2 + (x+2y+\sqrt{3}z)^2} = \sqrt{108 \cdot (13+6\sqrt{3})}$	0.5
	Do đó, $S \geq 3\sqrt{108 \cdot (13+6\sqrt{3})} + 18\sqrt{3}$ Dấu bằng xảy ra khi: $x = y = z$. Vậy giá trị nhỏ nhất của Tổng diện tích các mặt của tứ diện là $3\sqrt{108 \cdot (13+6\sqrt{3})} + 18\sqrt{3}$ khi M là tâm đường tròn nội tiếp tam giác A'B'C'.	0.5
5c 2đ	Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh 1, biết khoảng cách từ A đến (SBC) là $\frac{\sqrt{6}}{4}$, từ B đến (SCA) là $\frac{\sqrt{15}}{10}$, từ C đến (SAB) là $\frac{\sqrt{30}}{20}$ và hình chiếu vuông góc của S xuống đáy nằm trong tam giác ABC. Tính thể tích khối chóp $V_{S.ABC}$.	
	Lời giải  Gọi M, N, P lần lượt là hình chiếu của H lên các cạnh AC, BC, AB. Đặt $SH = h \Rightarrow V_{S.ABC} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{h\sqrt{3}}{12}$. Ta có $SP = \frac{2S_{SAB}}{AB} = 2S_{SAB} = \frac{6V_{S.ABC}}{d(C; (SAB))} = \frac{h\sqrt{3}}{2} : \frac{\sqrt{30}}{20} = h\sqrt{10}$	1.0
	Tương tự, tính được $HM = 2h, HN = h$ $\Rightarrow PH = \sqrt{SP^2 - SH^2} = 3h$	1.0

	Ta có $S_{ABC} = S_{HAB} + S_{HAC} + S_{HBC} = \frac{1}{2}(HP + HM + HN) \Leftrightarrow 3h = \frac{\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{12}$ Vậy $V_{S.ABC} = \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{\sqrt{3}}{12} = \frac{1}{48}$.	
--	---	--