

ĐỀ 87**ĐỀ THI HSG TOÁN 9 TRÀ VINH 2023-2024**

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \text{ và } B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} - \frac{13\sqrt{x}+2}{4-x} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4).$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = (5 + \sqrt{2})(5 - \sqrt{2}) + 2$

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P = A.B nhận giá trị là một số tự nhiên,

Câu 2. (6,0 điểm)

1. Giải phương trình sau: $3x^2 + 26 = 6\sqrt{2x+5} + 10x$

2. Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} x^2 + 2xy - 3y^2 = 0 \\ x|x| + y|y| = -8 \end{cases}$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm M(0;1) và đường thẳng (d): $4x + 3y = 12$.

Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d).

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3$ cm; $AC = 4,5$ cm. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho tam giác BCD vuông tại B. Kẻ các tiếp tuyến CN, DM với đường tròn (M, N là tiếp điểm, khác điểm A).

a) Chứng minh ba điểm M, B, N thẳng hàng.

b) Tính diện tích tứ giác DMNC.

c) Gọi H là giao điểm của AB và CN. Tính độ dài HB và HN.

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền $BC = a$. Gọi AH là đường cao của tam giác ($H \in BC$), D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AC và AB. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.

----- HẾT -----

HƯỚNG DẪN GIẢI

Câu 1. (4,0 điểm) Cho hai biểu thức

$$A = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \text{ và } B = \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} - \frac{13\sqrt{x}+2}{4-x} \text{ (với } x \geq 0; x \neq 1; x \neq 4).$$

a) Tính giá trị biểu thức A khi $x = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})+2$

b) Rút gọn biểu thức B.

c) Tìm các giá trị nguyên của x để P = A.B nhận giá trị là một số tự nhiên,

Lời giải

a) Ta có: $x = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})+2 = 5^2 - (\sqrt{2})^2 + 2 = 25$

Thay $x = 25$ vào biểu thức A ta được:

$$A = \frac{\sqrt{25}-2}{\sqrt{25}-1} = \frac{5-2}{5-1} = \frac{3}{4}. \text{ Vậy với } x = (5+\sqrt{2})(5-\sqrt{2})+2 \text{ thì } A = \frac{3}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } B &= \frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}+2}{2-\sqrt{x}} - \frac{13\sqrt{x}+2}{4-x} \\ &= \frac{3\sqrt{x}(2-\sqrt{x})}{(\sqrt{x}+2).(2-\sqrt{x})} + \frac{(\sqrt{x}-2)^2}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})} - \frac{13\sqrt{x}+2}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})} \\ &= \frac{6\sqrt{x}-3x+x+4}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})} + \frac{\sqrt{x}-4-13\sqrt{x}-2}{(2+\sqrt{x}).(2-\sqrt{x})} = \frac{2x+3\sqrt{x}-2}{(2+\sqrt{x}).(\sqrt{x}-2)} = \frac{(2\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2).(\sqrt{x}-2)} \\ &= \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} \end{aligned}$$

$$\text{Vậy } B = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2}$$

$$\text{c) Ta có } P = A.B = \frac{\sqrt{x}-2}{\sqrt{x}-1} \cdot \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-2} = \frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}-1} = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

Để P nhận giá trị là một số tự nhiên thì $\frac{1}{\sqrt{x}-1}$ phải là số nguyên

$$\text{Suy ra } \sqrt{x}-1 \text{ phải là ước của } 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x}-1=1 \\ \sqrt{x}-1=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \\ x=0 \end{cases}$$

So sánh với điều kiện của bài toán ta thấy $x = 0$ là giá trị cần tìm

Câu 2. (6,0 điểm)

1. Giải phương trình sau: $3x^2+26=6\sqrt{2x+5}+10x$

2. Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0 \\ x|x|+y|y|=-8 \end{cases}$

Lời giải

1. $3x^2+26=6\sqrt{2x+5}+10x$ (ĐK: $x \geq \frac{-5}{2}$)

$$\Leftrightarrow 3x^2-10x+26-6\sqrt{2x+5}=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x^2-4x+4)+[(2x+5)-2.3\sqrt{2x+5}+9]=0$$

$$\Leftrightarrow 3(x-2)^2+(\sqrt{2x+5}-3)^2=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ \sqrt{2x+5}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ \sqrt{2x+5}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ x=2 \end{cases} \Rightarrow x=2$$

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$

2. $\begin{cases} x^2+2xy-3y^2=0(1) \\ x|x|+y|y|=-8(2) \end{cases}$

Từ phương trình (1) ta có:

$$x^2+2xy-3y^2=0$$

$$\Leftrightarrow x(x-y)+3y(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow (x+3y)(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x=-3y \end{cases}$$

+) Với $x=y$ thay vào (2) ta được:

$$2x|x|=-8 \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=-2 \Rightarrow y=-2$$

+) Với $x=-3y$ thay vào (2) ta được:

$$-3y|-3y|+y|y|=-8 \Leftrightarrow -8y|y|=-8 \Leftrightarrow y|y|=1 \Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=-3$$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(x;y)=(-2;-2)$ hoặc

$$(x;y)=(-3;1)$$

Câu 3. (2,0 điểm)

Trên mặt phẳng tọa độ Oxy cho điểm $M(0;1)$ và đường thẳng (d): $4x+3y=12$.

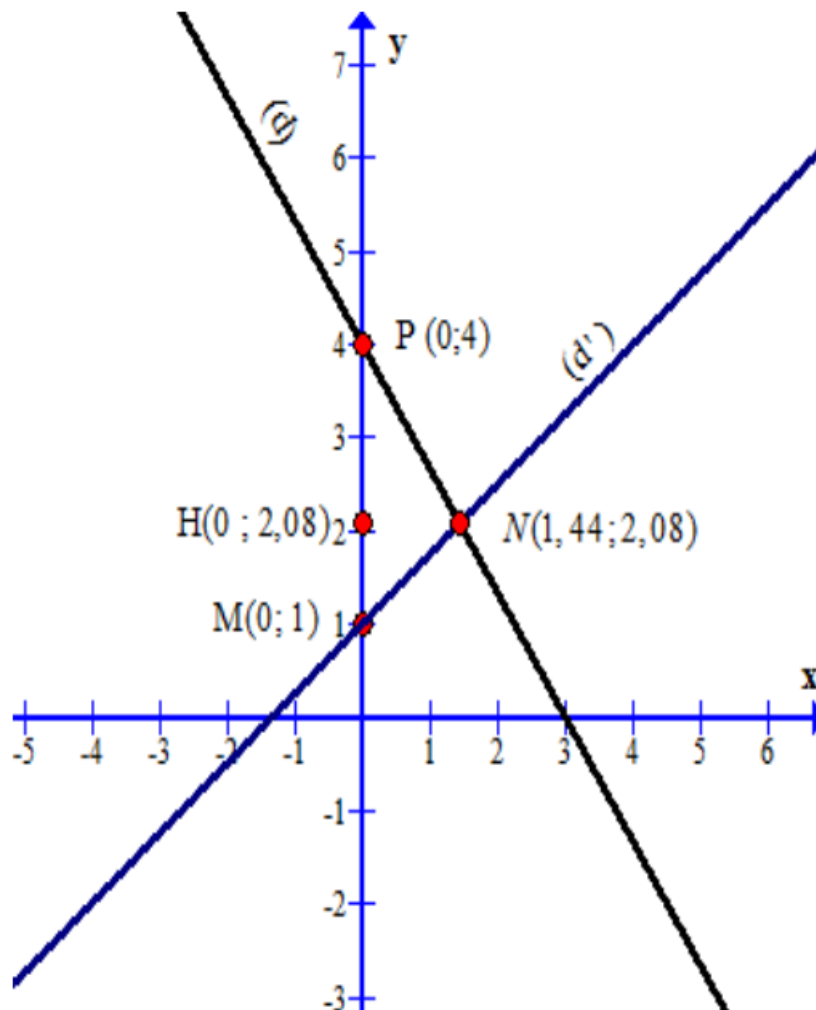
Tính khoảng cách từ điểm M đến đường thẳng (d).

Lời giải

Ta có: (d): $4x+3y=12 \Rightarrow y=-\frac{4}{3}x+4$

Bảng giá trị (d)

x	0	3
$y = -\frac{4}{3}x + 4$	4	0



Đồ thị của đường thẳng (d) được vẽ như hình bên.

Lập phương trình đường thẳng (d'): $y = ax + b$ đi qua M(0; 1) và $\perp$ (d):

+ Để (d') $\perp$ (d) thì: $a \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) = -1 \Rightarrow a = \frac{3}{4}$

+ Và (d') đi qua M(0;1) thì thay $x = 0$; $y = 1$ vào (d') ta được

$$1 = \frac{3}{4} \cdot 0 + b \Rightarrow b = 1. \text{ Vậy (d'): } y = \frac{3}{4}x + 1$$

Hoành độ giao điểm N của đường thẳng (d) và (d') là nghiệm của phương trình:

$$-\frac{4}{3}x + 4 = \frac{3}{4}x + 1 \Leftrightarrow \frac{25}{12}x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{36}{25} = 1,44$$

$$\Rightarrow \text{Tung độ } y = \frac{3}{4} \cdot 1,44 + 1 = \frac{52}{25} = 2,08$$

Gọi H là hình chiếu của N trên trục tung Oy, ta có: NH = 1,44;

$$MH = 2,08 - 1 = 1,08$$

Do $\triangle MNH$ vuông tại H nên: $d(M; (d)) = MH = \sqrt{NH^2 + MH^2}$

$$\sqrt{1,44^2 + 1,08^2} = 1,8 \text{ (đvdd)}$$

$$\text{Vậy } d(M; (d)) = 1,8 \text{ (đvdd)}$$

Câu 4. (2,0 điểm)

Cho a, b, c là độ dài ba cạnh của một tam giác. Chứng minh rằng:

$$ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Lời giải

$$+) \text{ Ta có: } (a-b)^2 \geq 0 \quad \forall a, b \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 \geq 2ab \quad (1)$$

$$\text{Tương tự ta cũng có: } b^2 + c^2 \geq 2bc \quad (2)$$

$$c^2 + a^2 \geq 2ca \quad (3)$$

Cộng các vế của (1), (2) và (3) ta được:

$$2(a^2 + b^2 + c^2) \geq 2(ab + bc + ca) \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca \quad (*)$$

+) Mặt khác do a, b, c là độ dài ba cạnh của tam giác nên theo bất đẳng thức tam giác ta có:

$$0 < a < b + c \Leftrightarrow a^2 < a(b + c) \Leftrightarrow a^2 < ab + ac$$

$$0 < b < a + c \Leftrightarrow b^2 < b(a + c) \Leftrightarrow b^2 < ab + bc$$

$$0 < c < a + b \Leftrightarrow c^2 < c(a + b) \Leftrightarrow c^2 < ca + cb$$

$$\text{Suy ra: } a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca) \quad (**)$$

$$\text{Từ } (*) \text{ và } (**) \Rightarrow ab + bc + ca \leq a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ca)$$

Câu 5. (4,0 điểm)

Cho tam giác ABC vuông tại A, biết $AB = 3 \text{ cm}$; $AC = 4,5 \text{ cm}$. Vẽ đường tròn tâm B, bán kính BA. Trên tia đối của tia AC lấy điểm D sao cho tam giác BCD vuông tại B. Kẻ các tiếp tuyến CN, DM với đường tròn (M, N là tiếp điểm, khác điểm A).

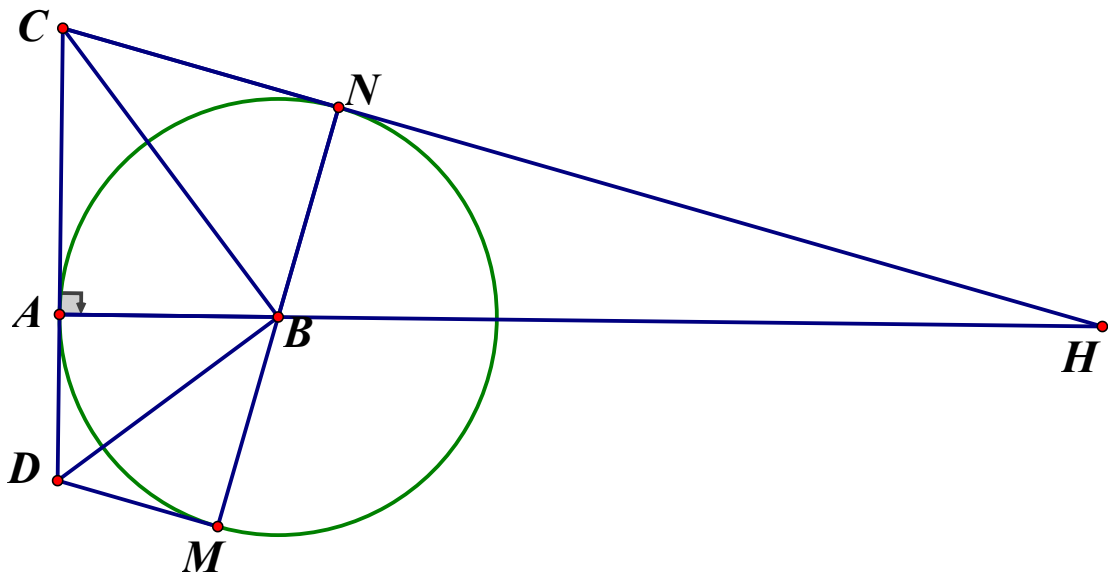
a) Chứng minh ba điểm M, B, N thẳng hàng.

b) Tính diện tích tứ giác DMNC.

c) Gọi H là giao điểm của AB và CN. Tính độ dài HB và HN.

Lời giải

a)



Do CD vuông góc với bán kính BA tại A nên CA và DA là hai tiếp tuyến của (B; BA)

Theo tính chất của hai tiếp tuyến cắt nhau, ta có:

+) BC là phân giác của $\widehat{NBA}$, nên: $\widehat{NBC} = \widehat{ABC}$

+) Tương tự, BD là phân giác của góc $\widehat{MBA}$, nên: $\widehat{MBD} = \widehat{ABD}$

Suy ra: $\widehat{NBA} + \widehat{MBA} = 2(\widehat{ABC} + \widehat{ABD}) = 2(\widehat{NBC} + \widehat{MBD}) = 2.90^\circ = 180^\circ$ (do tam giác BCD vuông tại B)

Vậy ba điểm M, B, N thẳng hàng.

b) Tính diện tích tứ giác DMNC

+) Ta có CN; DM là hai tiếp tuyến của (B; BA), nên: $CN \perp BN$; $DM \perp BM$

Mà ba điểm M, B, N thẳng hàng (theo câu a)

Suy ra: $CN \parallel DM$ (Cùng $\perp MN$) hay tứ giác DMNC là hình thang vuông

+) Xét tam giác NBC vuông tại N và tam giác ABC vuông tại A ta có:

Cạnh huyền BC chung

$BA = BN$ (cùng là bán kính của đường tròn (B; BA))

$\Rightarrow \triangle NBC = \triangle ABC$ (CH-CGV) $\Rightarrow CN = CA = 4,5$ (cm)

+) Tương tự ta cũng có $DM = DA$

Xét $\triangle CBD$ vuông tại B, theo hệ thức lượng ta có:

$$AB^2 = AC \cdot DA \Rightarrow DA = \frac{AB^2}{AC} = \frac{3^2}{4,5} = 2(\text{cm}) \Rightarrow DM = DA = 2(\text{cm})$$

+) Đường cao $MN = 2 NB = 2 AB = 6 \text{ (cm)}$

$$\text{Vậy } S_{DMNC} = \frac{1}{2} (DM + CN) \cdot MN = \frac{1}{2} (2 + 4,5) \cdot 6 = 19,5 \text{ (cm}^2\text{)}$$

c) H là giao điểm của AB và CN

Xét $\triangle HAC$ và $\triangle HNB$ ta có:

$$\widehat{HAC} = \widehat{HNB} = 90^\circ$$

$\hat{H}$ chung

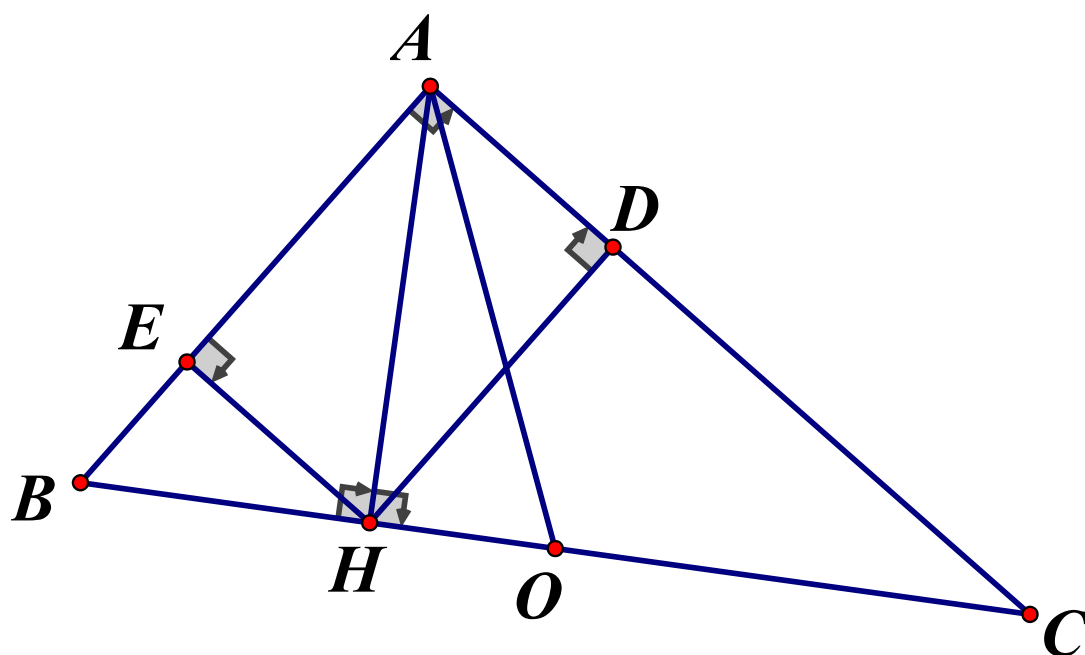
$$\Rightarrow \triangle HAC \sim \triangle HNB \text{ (g-g)} \Rightarrow \frac{HA}{HN} = \frac{HC}{HB} = \frac{AC}{NB} = \frac{4,5}{3} = 1,5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} HA = 1,5 HN \\ HC = 1,5 HB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} HB + 3 = 1,5 HN \\ HN + 4,5 = 1,5 HB \end{cases}$$

Giải hệ trên ta được: $HN = 7,2 \text{ (đvdd)}$ và $HB = 7,8 \text{ (đvdd)}$

Câu 6. (2,0 điểm)

Cho tam giác vuông ABC có độ dài cạnh huyền $BC = a$. Gọi AH là đường cao của tam giác ($H \in BC$), D và E lần lượt là hình chiếu của H trên AC và AB. Tìm giá trị lớn nhất của diện tích tứ giác ADHE.



Lời giải

Gọi O là trung điểm của cạnh huyền $BC \Rightarrow AO$ là trung tuyến ứng với BC

Vì AH là đường cao của tam giác ABC ($H \in BC$) nên: $AH \leq AO$ (1)

Xét tứ giác ADHE có $\widehat{AEH} = \widehat{EAD} = \widehat{ADH} = 90^\circ \Rightarrow ADHE$ là hình chữ nhật

$$\Rightarrow S_{ADHE} = AE.AD$$

Do $\triangle ABH$ vuông tại H, đường cao EH, nên ta có: $AH^2 = AE.AB \Rightarrow AE = \frac{AH^2}{AB}$

Tương tự với $\triangle AHC$, ta cũng có: $AD = \frac{AH^2}{AC}$

Suy ra: $S_{ADHE} = \frac{AH^4}{AB.AC}$, mà $AB.AC = AH.BC$ (hệ thức lượng trong $\triangle ABC$ vuông tại A)

$$\Rightarrow S_{ADHE} = \frac{AH^4}{BC} \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) suy ra: } \Rightarrow S_{ADHE} = \frac{AH^4}{BC} \leq \frac{AO^3}{BC} = \frac{\left(\frac{BC}{2}\right)^3}{BC} = \frac{BC^2}{8} = \frac{a^2}{8}$$

Vậy $\text{Max } S_{ADHE} = \frac{a^2}{8}$ khi $AH = AO$ hay $H \equiv O$ ($\triangle ABC$ vuông tại A).

----- **HẾT** -----