NĂM HỌC 2023 - 2024
Môn: Toán
Thời gian làm bài: 150 phút

ĐỀ CHÍNH THỨC
(Đề thi gồm 01 trang)

Câu I. *(4,0 điểm)*

1. Cho biểu thức: $M=\left(\dfrac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\dfrac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\dfrac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\dfrac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$

Rút gọn M và tìm giá trị của x để M >1

2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$

Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$

Câu II. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0.$

2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26. \end{cases}$

Câu III. *(4,0 điểm)*

1. Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$

2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn n^3+2023 chia hết cho 6.

Câu IV. *(6,0 điểm)* Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB.$ Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA,CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là $D,E.$ Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0<FA\leq FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).

a) Chứng minh $\triangle ABC\backsim\triangle EDC$

b) Chứng minh $CE.CB=CP.CM.$

c) Gọi I,H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng $BD,AB.$ Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại $K.$ Chứng minh $\widehat{AKF}=90^0$ và tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\dfrac{AB}{FH}+\dfrac{BD}{FI}+\dfrac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Câu V. *(2,0 điểm)* Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\dfrac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\dfrac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\dfrac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$

--- HẾT---

Họ và tên thí sinh:…………………………Số báo danh:..
Người coi thi số 1……………………………Người coi thi số 2…………….........................

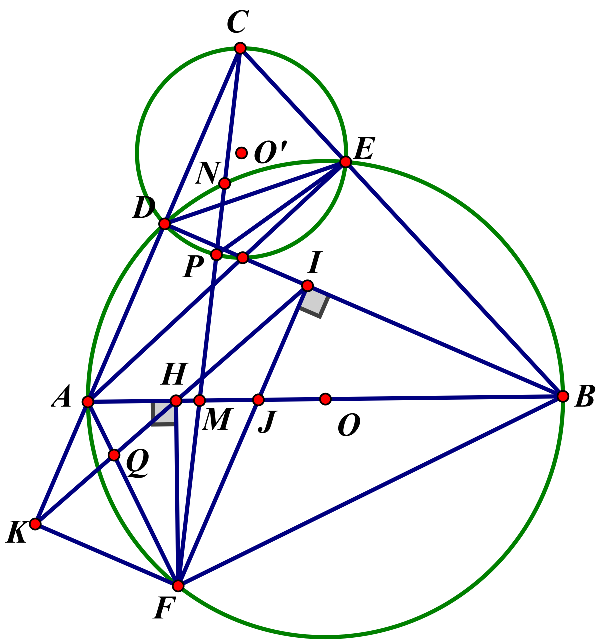
HƯỚNG DẪN CHẤM

(*Hướng dẫn chấm gồm 06 trang*)

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
I. **(3,0 điểm)**	1. Cho biểu thức: $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}-8}+\frac{x+2\sqrt{x}+1}{x-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2\sqrt{x}+10}{x+6\sqrt{x}+5}\right)$ Rút gọn M và tìm giá trị của x để M >1	**2,0**
	Điều kiện với $x\geq 0; x\neq 1,3,4$ $M=\left(\frac{x+2\sqrt{x}+4}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}+\frac{(\sqrt{x}+1)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2(\sqrt{x}+5)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+5)}\right)$ $=\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}+\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}\right):\left(\frac{3\sqrt{x}-5}{\sqrt{x}-2}+\frac{2}{\sqrt{x}+1}\right)$ $=\frac{\sqrt{x}-1+(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{(3\sqrt{x}-5)(\sqrt{x}+1)+2(\sqrt{x}-2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{\sqrt{x}-1+x-2\sqrt{x}+\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{3x+3\sqrt{x}-5\sqrt{x}-5+2\sqrt{x}-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}$ $=\frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}:\frac{3x-9}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}=\frac{x-3}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)}\frac{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+1)}{3(x-3)}=\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$	0,25 0.5 0.5
	Vậy M= $\frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}$ với $x\geq 0; x\neq 1,3,4$ M>1 $\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}>1\Leftrightarrow \frac{\sqrt{x}+1}{3(\sqrt{x}-1)}-1>0\Leftrightarrow \frac{4-2\sqrt{x}}{3(\sqrt{x}-1)}>0\Leftrightarrow \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}>0$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2-\sqrt{x}>0\\ \sqrt{x}-1>0\end{cases}\\ \begin{cases}2-\sqrt{x}<0\\ \sqrt{x}-1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 1<\sqrt{x}<2\Leftrightarrow 1<x<4$. Vậy M>1 khi 1<x<4 và x $\neq 3$	0,25 0,5
	2. Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(y+\sqrt{y^2+1}\right)=2.$ Tính giá trị của biểu thức $Q=x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}.$	**2,0**

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Ta có: $2=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}=xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}+Q$ $\Rightarrow (2-Q)^2=\left[xy+\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}\right]^2$ $\Rightarrow 4-4Q+Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+1+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$ Ta lại có $Q^2=x^2(y^2+1)+y^2(x^2+1)+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}$ $\Rightarrow Q^2=2x^2y^2+x^2+y^2+2xy\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}.$ Do đó $4-4Q=1\Rightarrow Q=\frac{3}{4}.$	0,5 0,5 0.5 0,5
II. **(4,0 điểm)**	**1.** Giải phương trình $x^2-3\sqrt{x^3-3x^2+4x-2}=0$.(1)	**2,0**
	Điều kiện $x^3-3x^2+4x-2\ge 0$	0,25
	Có $x^3-3x^2+4x-2=(x-1)(x^2-2x+2)$ nên $x^3-3x^2+4x-2\ge 0\Leftrightarrow x\ge 1$ vì $x^2-2x+2=(x-1)^2+1>0\ \forall x$	0,25
	$(1)\Leftrightarrow 2(x-1)+(x^2-2x+2)-3\sqrt{(x-1)(x^2-2x+2)}=0$ $\Leftrightarrow 2.\frac{x-1}{x^2-2x+2}-3.\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}+1=0$	0,25
	Đặt $t=\sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}},t\ge 0$ ta được phương trình $2t^2-3t+1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.$	0,5
	$t=1\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}=1\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-2x+2}=1 \Leftrightarrow x^2-3x+3=0$ (vô nghiệm)	0,25
	$t=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \sqrt{\frac{x-1}{x^2-2x+2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow \frac{x-1}{x^2-2x+2}=\frac{1}{4}$ $\Leftrightarrow x^2-6x+6=0\Leftrightarrow x=3\pm\sqrt{3}$ (thỏa mãn điều kiện) Vậy pt có 2 nghiệm $x=3\pm\sqrt{3}$	0,5
	2. Giải hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2+4x-6y-5=0 & (1) \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2y}+2x^2+x=26 & (2)\end{cases}$	**2,0**
	Điều kiện $\begin{cases} x\ge -\frac{3}{2} \\ y\ge 0\end{cases}$	0,25
	$(1)\Leftrightarrow (x+2)^2=(y+3)^2\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2=y+3 \\ x+2=-y-3\end{array}\right.$	0,5
	$+) x+2=-y-3\Leftrightarrow (x+5)+y=0$ vô nghiệm	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	vì $(x+5)+y>0\ \forall x\ge -\frac{3}{2}, y\ge 0.$	
	$+)x+2=y+3 \Leftrightarrow y=x-1$ thay vào (2) ta được $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2(x-1)}+2x^2+x=26$ $\Leftrightarrow \left(\sqrt{2x+3}-3\right)+\left(\sqrt{2x-2}-2\right)+2x^2+x-21=0$ $\Leftrightarrow \frac{2x+3-9}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2x-2-2}{\sqrt{2x-2}+2}+(x-3)(2x+7)=0$ $\Leftrightarrow (x-3)\left(\frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7\right)=0$ $\Leftrightarrow x=3, do\ \frac{2}{\sqrt{2x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{2x-2}+2}+2x+7>0\ \forall x\ge 1$	0,5
	$+)x=3 \Rightarrow y=2$ Vậy hệ phương trình có nghiệm duy nhất $(x;y)=(3;2)$	0,25
III. **(4,0 điểm)**	1.Giải phương trình nghiệm nguyên: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$	**2đ**
	Ta có: $y^4+2y^3-y^2-2y-x^2-x=0$ $\Leftrightarrow (y^2+y-1)^2=x^2+x+1$ (*) Nếu x > 0 thì $x^2<x^2+x+1<(x+1)^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*). Nếu x <-1 thì $(x+1)^2<x^2+x+1<x^2$ suy ra x^2+x+1 không là số chính phương nên không tồn tại số nguyên x,y thỏa mãn (*). Nếu x =-1 hoặc x = 0 thì từ (*) suy ra $y^2+y-1=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=-2 \\ y=-1 \\ y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$ Vậy phương trình có nghiệm nguyên: $(x;y)=\{(-1;-2),(-1;-1),(-1;0),(-1;1),(0;-2),(0;-1),(0;0),(0;1)\}$	0,5 0,5 0,75 0,25
	2. Có bao nhiêu số tự nhiên n không vượt quá 2023 thỏa mãn n^3+2023 chia hết cho 6.	**2,0**
	Đặt $n=6q+r, r\in\{0,1,2,3,4,5\}$. Khi đó n^3+2023 chia hết cho 6 khi r^3+1 chia hết cho 6.	0,25
	Nếu r chẵn thì r^3+1 lẻ, do đó r^3+1 không chia hết cho 6. Suy ra $r\in\{1,3,5\}$.	0,5
	Với $r=1\Rightarrow r^3+1=2$ không chia hết cho 6. Với $r=3\Rightarrow r^3+1=28$. không chia hết cho 6. Với $r=5\Rightarrow r^3+1=126$ chia hết cho 6.	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Suy ra $n=6q+5$. Mà $0\le n\le 2023\Rightarrow 0\le q\le 336.$ Vậy có tất cả 337 số tự nhiên n thỏa mãn đề bài.	0,5 0,25
V. (7,0 điểm)	Cho đường tròn $(O;R)$ đường kính $AB.$ Gọi C là điểm thỏa mãn tam giác ABC nhọn. Các đường thẳng CA,CB cắt đường tròn (O) tại điểm thứ hai tương ứng là $D,E.$ Trên cung AB của (O) không chứa D lấy điểm F ($0<FA\le FB$). Đường thẳng CF cắt AB tại M, và cắt đường tròn (O') ngoại tiếp tam giác CDE tại P (P không trùng với C).	
	a) Chứng minh $\Delta ABC\backsim\Delta EDC$	**2,0**
		
	Ta chứng minh được $\Delta CEA;\ \Delta CDB$ là 2 tam giác vuông đồng dạng(g.g)	1
	$\frac{CE}{CD}=\frac{CA}{CB}\Rightarrow\frac{CE}{CA}=\frac{CD}{CB}\Rightarrow\Delta ABC\backsim\Delta EDC$ (c.g.c)	1
	b) Chứng minh $CE.CB=CP.CM.$	**2**
	Theo câu a) $\Delta ABC\backsim\Delta EDC\Rightarrow\widehat{CBA}=\widehat{CDE}$ (1) Mà dễ thấy $\widehat{CDE}=\frac{1}{2}\widehat{CO'E}$ (kéo dài DO' và dùng tính chất góc ngoài tam giác) Tương tự $\widehat{CPE}=\frac{1}{2}\widehat{CO'E}$ nên $\widehat{CDE}=\widehat{CPE}$ (2) Từ (1) và (2) suy ra: $\widehat{CBA}=\widehat{CPE}$ Hay $\widehat{CBM}=\widehat{CPE}$	0,5 0,5 0,5
	Xét ΔCPE và ΔCBM có: $\widehat{CBM}=\widehat{CPE}$ và $\widehat{BCM}$ chung Suy ra $\Delta CPE\backsim\Delta CBM$ (g.g) $\Rightarrow\frac{CE}{CP}=\frac{CM}{CB}\Rightarrow CE.CB=CM.CP$ (Đpcm)	0,5

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	c) Gọi I, H theo thứ tự là hình chiếu vuông góc của F trên các đường thẳng BD, AB. Các đường thẳng IH và CD cắt nhau tại K. Chứng minh $\widehat{AKF}=90^0$ và tìm vị trí của điểm F để biểu thức $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ đạt giá trị nhỏ nhất.	**2**
	Gọi J là giao điểm của FI và BH; Q là giao điểm của HK và AF. Ta chứng minh được $\Delta FHJ \backsim \Delta BIJ (g.g) \Rightarrow \Delta HIJ \backsim \Delta FBJ (c.g.c) \Rightarrow \widehat{HIJ}=\widehat{FBJ}$ Dễ thấy $\widehat{HFA}=\widehat{FBJ}$ (góc có cạnh tương ứng vuông góc) Và $\widehat{HIJ}=\widehat{HKA}$ (So le trong, do FI//KD) $\Rightarrow \widehat{HFA}=\widehat{HKA} \Rightarrow \Delta AQK \backsim \Delta HQF$ (g.g) $\Rightarrow \Delta AQH \backsim \Delta KQF$ $\Rightarrow \widehat{AHQ}=\widehat{KFQ}$. Mà $\Rightarrow \widehat{AHQ}=\widehat{IHJ}$ (đối đỉnh) và $\widehat{IHJ}=\widehat{BFJ}$ (Do $\Delta HIJ \backsim \Delta FBJ$) $\Rightarrow \widehat{BFJ}=\widehat{KFQ}$. Hay $\Rightarrow \widehat{BFI}=\widehat{KFA}$ (*) Xét tứ giác BDAF có tổng 4 góc bằng 360^0. Mà dễ thấy $\widehat{ADB}=\widehat{AFB}=90^0$ Suy ra: $\widehat{DBF}+\widehat{DAF}=180^0$ Mà $\widehat{KAF}+\widehat{DAF}=180^0$ (kề bù) $\Rightarrow \widehat{DBF}=\widehat{KAF}$ Hay $\widehat{IBF}=\widehat{KAF}$ (**) Từ (*) và (**) suy ra $\Delta FAK \backsim \Delta FBI$ (g.g) $\Rightarrow \widehat{BIF}=\widehat{AKF}=90^0$	0,25 0,25 0,25 0,25
	Xét ΔDFK và ΔBFH có $\widehat{FKD}=\widehat{FHB}=90^0$ Và ta chứng minh được $\widehat{FBH}=\widehat{FDA}$ ($=\frac{1}{2}\widehat{AOF}$) $\Rightarrow \Delta DFK \sim \Delta BFH \Rightarrow \frac{DK}{FK}=\frac{BH}{FH}$ (1)	0,25
	Tương tự tam giác IDF đồng dạng với tam giác HAF $\Rightarrow \frac{ID}{IF}=\frac{HA}{HF}$	0,25
	Mà $\Delta FAK \backsim \Delta FBI$ nên: $\frac{AK}{FK}=\frac{BI}{FI}$ (2) Từ (1) , (2) $\Rightarrow \frac{DK}{FK}-\frac{AK}{FK}=\frac{BH}{FH}-\frac{BI}{FI}$ hay: $\frac{DA}{FK}=\frac{BH}{FH}-\frac{BI}{FI}$ $\Rightarrow \frac{DA}{FK}+\frac{BD}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{BD}{FI}-\frac{BI}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{ID}{FI}$ Mà $\frac{ID}{FI}=\frac{HA}{FH}$ suy ra: $\frac{DA}{FK}+\frac{BD}{FI}=\frac{BH}{FH}+\frac{HA}{FH}=\frac{AB}{FH}$	0,25

Câu	Sơ lược lời giải	Điểm
	Vậy $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}=\frac{2AB}{FH}$ nên $\frac{AB}{FH}+\frac{BD}{FI}+\frac{AD}{FK}$ nhỏ nhất khi FH lớn nhất khi F là trung điểm cung AB	0,25
VI. **(2,0 điểm)**	Cho các số dương x, y, z thỏa mãn điều kiện: $x+y+z=1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $F=\frac{x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+\frac{y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}+\frac{z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}$.	
	Ta có $\frac{2x^4}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{x^4+y^4+(x^4-y^4)}{(x^2+y^2)(x+y)}=\frac{x^4+y^4}{(x^2+y^2)(x+y)}+x-y$ $¿\frac{\frac{1}{2}(x^2+y^2)}{x+y}+x-y\geq\frac{1}{4}(x+y)+x-y=\frac{5}{4}x-\frac{3}{4}y$.	0,5
	Tương tự $\frac{2y^4}{(y^2+z^2)(y+z)}\geq\frac{5}{4}y-\frac{3}{4}z$, $\frac{2z^4}{(z^2+x^2)(z+x)}\geq\frac{5}{4}z-\frac{3}{4}x$.	0,5
	Vậy 2F $¿\frac{5}{4}(x+y+z)-\frac{3}{4}(x+y+z)=\frac{x+y+z}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow F\geq\frac{1}{4}$.	0,5
	Dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=\frac{1}{3}$. Vậy giá trị nhỏ nhất của F là $\frac{1}{4}$.	0,5