

MỤC LỤC

▶ BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG GÓC NHỊ DIỆN.....2

2	(A). Tóm tắt kiến thức
3	(B). Phân dạng toán cơ bản
	•Dạng ❶: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng.....3
	•Dạng ❷: Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện.....4
6	(C). Dạng toán rèn luyện
	•Dạng ❶: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn.....6
	•Dạng ❷: Câu trắc nghiệm đúng, sai.....46
	•Dạng ❸: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn.....76

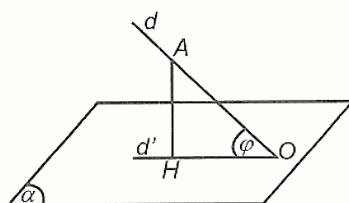


► BÀI 5. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG GÓC NHỊ DIỆN

A. Tóm tắt kiến thức

1. GÓC GIỮA ĐƯỜNG THẲNG VÀ MẶT PHẪNG

- ✓ Cho đường thẳng a và mặt phẳng (P) .
- ✓ Nếu a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) bằng 90° .
- ✓ Nếu a không vuông góc với mặt phẳng (P) thì góc giữa a với hình chiếu a' của nó trên (P) được gọi là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) .



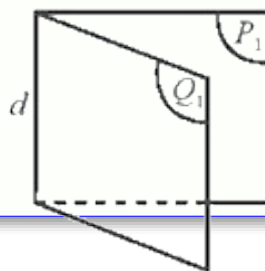
- ✓ Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu $(a, (P))$.
- ✓ Nếu α là góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) thì $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.
- ✓ Nếu đường thẳng a nằm trong mặt phẳng (P) hoặc song song với mặt phẳng (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

2. GÓC NHỊ DIỆN VÀ GÓC PHẪNG NHỊ DIỆN

✍ **Góc nhị diện**

✍ **Định nghĩa:**

- ✓ Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi (P_1) , (Q_1) và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.



✍ **Chú ý:**

✓ Hình 5

✓ a) Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.

✓ b) Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

✍ **Góc phẳng nhị diện**

✍ **Định nghĩa**

✓ Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

✍ **Chú ý:**

✓ a) Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.

✓ b) Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\widehat{uOv}$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.

✓ c) Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.

✍ d) Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện

Ⓑ. Phân dạng toán cơ bản

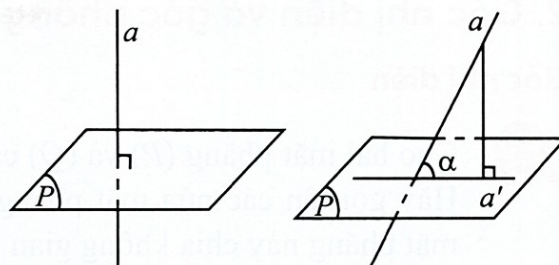
• Dạng 1: Góc giữa đường thẳng và mặt phẳng

✍ **Phương pháp**

✍ **Định nghĩa**

✓ Nếu đường thẳng a vuông góc với mặt phẳng (P) thì ta nói góc giữa đường thẳng a với (P) bằng 90° .

✓ Nếu đường thẳng a không vuông góc với (P) thì góc giữa a và hình chiếu a' của a trên (P) gọi là góc giữa đường thẳng a và (P) .



Hình 1

✓ Góc giữa đường thẳng a và mặt phẳng (P) được kí hiệu là $(a, (P))$.

✍ **Chú ý:**

✓ Góc α giữa đường thẳng và mặt phẳng luôn thỏa mãn $0^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$.

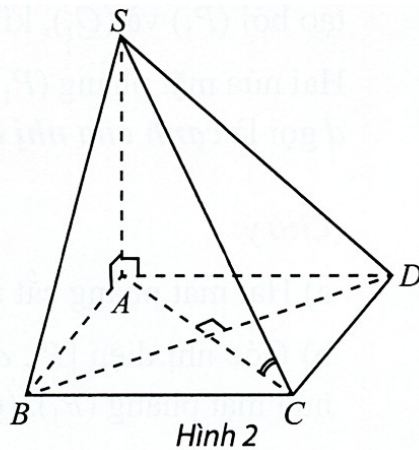
✓ Nếu đường thẳng a nằm trong (P) hoặc a song song với (P) thì $(a, (P)) = 0^\circ$.

Các ví dụ minh họa

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Tính:

- Góc giữa đường thẳng BC và (SAB) ;
- Góc giữa đường thẳng BD và (SAD) ;
- Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$.

Lời giải



Hình 2

- Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BC \perp SA$. Ta lại có $BC \perp AB$, suy ra $BC \perp (SAB)$, suy ra góc giữa đường thẳng BC và (SAB) bằng 90° .
- Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra $BA \perp SA$. Ta lại có $BA \perp AD$, suy ra $BA \perp (SAD)$. Vậy AD là hình chiếu của BD trên (SAD) . Nếu gọi φ là góc giữa đường thẳng BD và (SAD) thì $\varphi = (BD, AD) = \angle BDA = 45^\circ$ (vì tam giác ABD vuông cân tại A).
- Ta có $SA \perp (ABCD)$, suy ra AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$. Nếu gọi φ' là góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ thì $\varphi' = (SC, CA) = \angle SCA$.

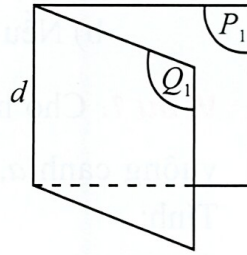
Trong tam giác SCA vuông tại A , ta có $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$, suy ra góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$ bằng 60° .

•Dạng 2: Góc nhị diện và góc phẳng nhị diện

- ✍ **Phương pháp**
- ✍ **Góc nhị diện**
- ✍ **Định nghĩa**

- ☑ Cho hai nửa mặt phẳng (P_1) và (Q_1) có chung bờ là đường thẳng d . Hình tạo bởi $(P_1), (Q_1)$ và d được gọi là góc nhị diện tạo bởi (P_1) và (Q_1) , kí hiệu $[P_1, d, Q_1]$.

- ✓ Hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$ gọi là hai mặt của nhị diện và d gọi là cạnh của nhị diện.



Hình 5

✍ **Chú ý:**

- ✓ Hai mặt phẳng cắt nhau theo giao tuyến d tạo thành bốn góc nhị diện.
- ✓ Góc nhị diện $[P_1, d, Q_1]$ còn được kí hiệu là $[M, d, N]$ với M, N tương ứng thuộc hai nửa mặt phẳng $(P_1), (Q_1)$.

✍ **Góc phẳng nhị diện**

✍ **Định nghĩa**

- ✓ Góc phẳng nhị diện của góc nhị diện là góc có đỉnh nằm trên cạnh của nhị diện, có hai cạnh lần lượt nằm trên hai mặt của nhị diện và vuông góc với cạnh của nhị diện.

✍ **Chú ý:**

- ✓ Đối với một góc nhị diện, các góc phẳng nhị diện đều bằng nhau.
- ✓ Nếu mặt phẳng (R) vuông góc với cạnh d của góc nhị diện và cắt hai mặt $(P_1), (Q_1)$ của góc nhị diện theo hai nửa đường thẳng Ou và Ov thì $\angle uOv$ là góc phẳng nhị diện của góc nhị diện tạo bởi $(P_1), (Q_1)$.
- ✓ Góc nhị diện có góc phẳng nhị diện là góc vuông được gọi là góc nhị diện vuông.
- ✓ Số đo góc phẳng nhị diện được gọi là số đo góc nhị diện.
- ✓ Số đo góc nhị diện nhận giá trị từ 0° đến 180° .

📖 **Các ví dụ minh họa**

Câu 1: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$ cạnh a . Xác định và tính góc phẳng nhị diện:

a) $[A, BD, A']$;

b) $[C, BD, A']$.

Lời giải

a) Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$. Ta có $OA \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\angle AOA'$ là góc phẳng nhị diện $[A, BD, A']$. Trong tam giác AOA' vuông tại A ,

$$\tan \angle AOA' = \frac{AA'}{AO} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2} \Rightarrow \angle AOA' \approx 54,7^\circ$$

ta có:

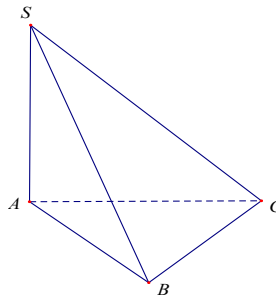
b) Ta có $OC \perp BD$ và $OA' \perp BD$, suy ra $\angle AOC$ là góc phẳng nhị diện $[C, BD, A']$.

Ta có $\angle AOC = 180^\circ - \angle OAA' \approx 125,3^\circ$.

©. Dạng toán rèn luyện

• Dạng ①: Câu trắc nghiệm nhiều phương án lựa chọn

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$; tam giác ABC đều cạnh a và $SA = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tìm góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) .



A. 60° .

B. 45° .

C. 135° .

D. 90° .

Lời giải

Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) là góc $\angle SCA$.

Tam giác SAC vuông cân tại A nên góc $\angle SCA = 45^\circ$.

Câu 2: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng nào dưới đây?

A. SB và AB .

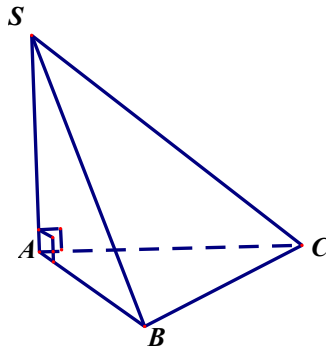
B. SB và SC .

C. SA và SB .

D. SB và BC .

Lời giải

Chọn A



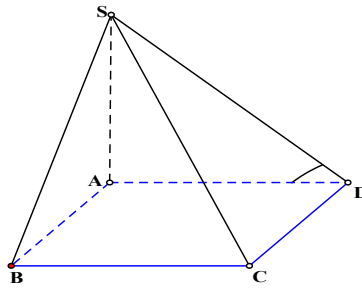
Ta có: Hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) là AB nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là góc giữa hai đường thẳng SB và AB .

Câu 3: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{3}$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng:

- A.** $\arcsin \frac{3}{5}$. **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Lời giải

Chọn C



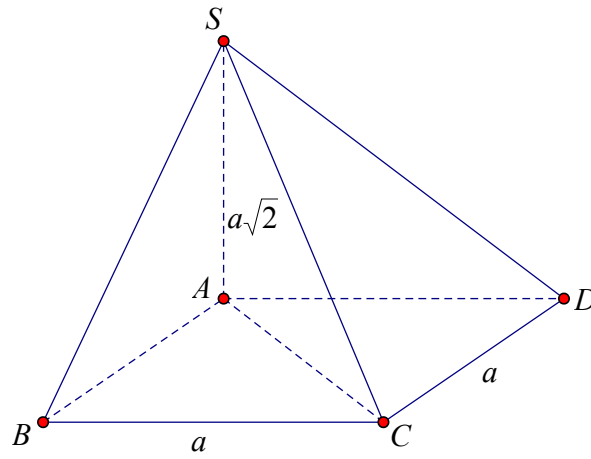
Vì $SA \perp ABCD$ nên góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là góc $\angle SDA$.

Trong tam giác vuông SDA ta có: $\tan \angle SDA = \frac{SA}{AD} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SDA = 60^\circ$.

Câu 4: Cho hình chóp $S.ABCD$ đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD), SA = a\sqrt{2}$. Tính góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

- A.** 30° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải



$$(\overrightarrow{SC}, (\overrightarrow{ABCD})) = (\overrightarrow{SC}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{SCA}.$$

Trong tam giác vuông SAC có $SA = AC = a\sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 5: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có $AB = \sqrt{3}$ và $AA' = 1$. Góc tạo bởi giữa đường thẳng AC' và (ABC) bằng

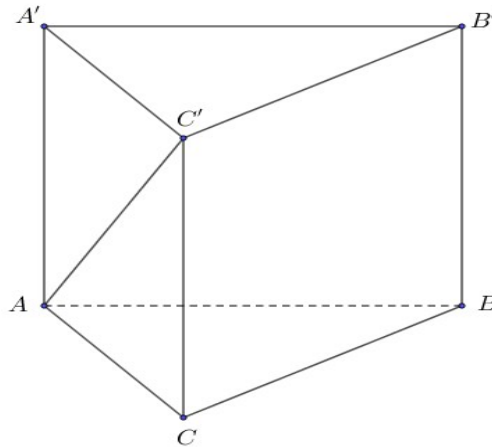
A. 45° .

B. 60° .

C. 30° .

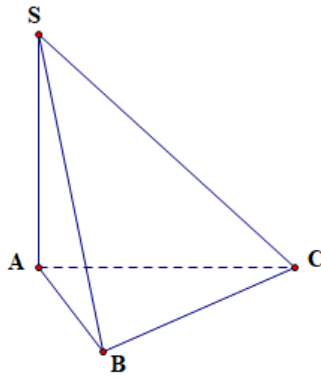
D. 75° .

Lời giải



Ta có $(\overrightarrow{AC'}, (\overrightarrow{ABC})) = (\overrightarrow{AC'}, \overrightarrow{AC}) = \widehat{AC'C}$, $\tan \widehat{AC'C} = \frac{CC'}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \widehat{AC'C} = 30^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a$ và $BC = \sqrt{3}a$ (minh họa như hình vẽ bên).



Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A.** 90° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn D

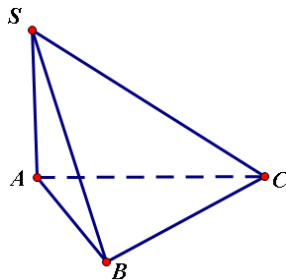
Vì SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\angle SCA$.

$$\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 3a^2}} = 1$$

Mà

$$\text{Vậy } \angle SCA = 45^\circ.$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) . $SA = \sqrt{2}a$. Tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a$ (minh họa như hình vẽ bên).

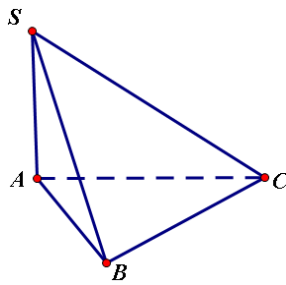


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A.** 45° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 90° .

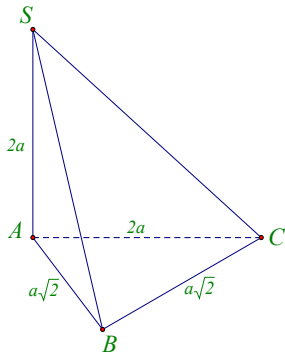
Lời giải

Chọn A



Ta có AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) .
 Suy ra góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng $\angle SCA = \varphi$.
 Ta có $AC = a\sqrt{2}, SA = a\sqrt{2}$ nên tam giác SAC vuông cân tại $A \Rightarrow \varphi = 45^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông cân tại B và $AB = a\sqrt{2}$ (minh họa như hình vẽ bên).

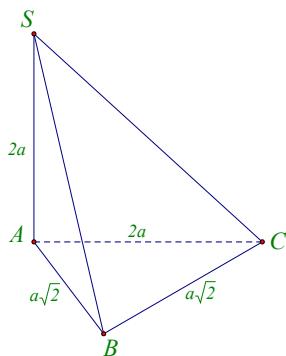


Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A.** 60° . **B.** 45° . **C.** 30° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn B



Ta có $SA \perp (ABC)$ nên đường thẳng AC là hình chiếu vuông góc của đường thẳng SC lên mặt phẳng (ABC) .

Do đó, $\alpha = (\vec{SE}, (ABC)) = (\vec{SE}, AC) = \angle SCA$ (tam giác SAC vuông tại A).

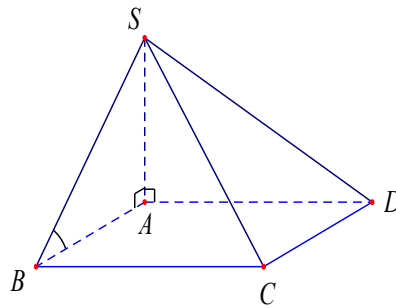
Tam giác ABC vuông cân tại B nên $AC = AB\sqrt{2} = 2a$.

Suy ra $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = 1$ nên $\alpha = 45^\circ$.

- Câu 9:** Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
- A.** 60° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn A



Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng góc $\angle SBA$.

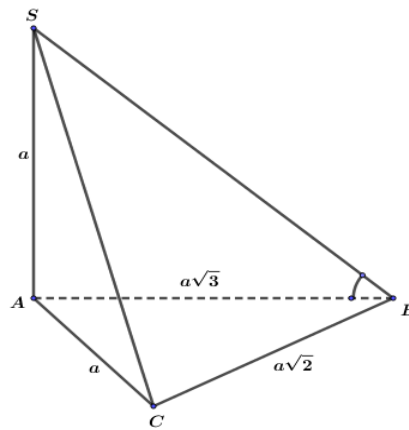
Ta có $\cos \angle SBA = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle SBA = 60^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng 60° .

- Câu 10:** Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông tại C , $AC = a$, $BC = \sqrt{2}a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng
- A.** 60° . **B.** 90° . **C.** 30° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn C



Có $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

$$\Rightarrow (\angle B, (ABC)) = (\angle B, AB) = \angle BBA$$

Mặt khác có $\triangle ABC$ vuông tại C nên $AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = a\sqrt{3}$.

Khi đó $\tan \angle BBA = \frac{SA}{AB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ nên $(\angle B, (ABC)) = 30^\circ$.

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = a$ và $SB = 2a$. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy bằng.

A. 60° .

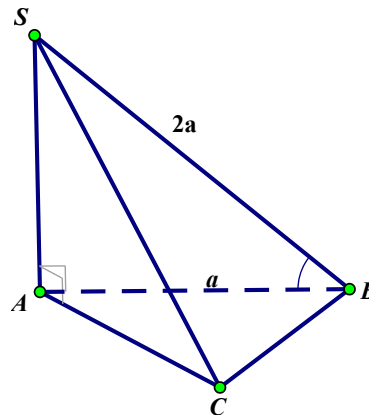
B. 45° .

C. 30° .

D. 90° .

Lời giải.

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABC)$ tại A nên AB là hình chiếu của SB lên mặt phẳng đáy.

Suy ra góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng đáy là $\angle BBA$.

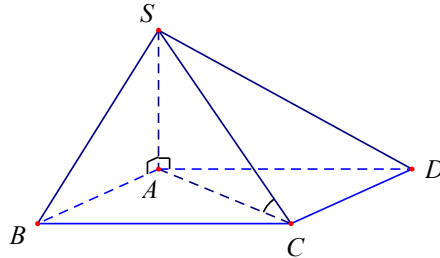
Tam giác SAB vuông tại A nên $\cos \angle BBA = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BBA = 60^\circ$.

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = \sqrt{2}a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng

A. 45° . **B.** 60° . **C.** 30° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn A

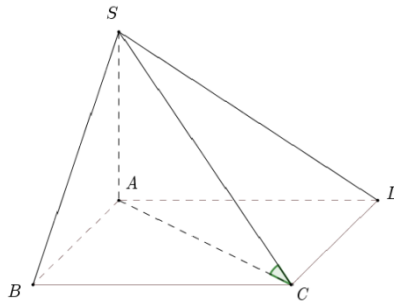


Do $SA \perp (ABCD)$ nên góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng góc $\angle SCA$.

Ta có $SA = \sqrt{2}a$, $AC = \sqrt{2}a \Rightarrow \tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = 1 \Rightarrow \angle SCA = 45^\circ$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy bằng 45° .

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật có $AB = a$, $AD = 2a$, SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, $SA = 3a$. Gọi φ là góc giữa SC và $(ABCD)$ (tham khảo hình vẽ bên). Khi đó $\tan \varphi$ bằng



A. $\frac{\sqrt{5}}{5}$. **B.** $\frac{3}{5}$. **C.** $\frac{\sqrt{5}}{3}$. **D.** $\frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Lời giải

Chọn D

+) AC là hình chiếu của SC trên $(ABCD)$ nên $(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = \varphi$

Ta có: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}a$.

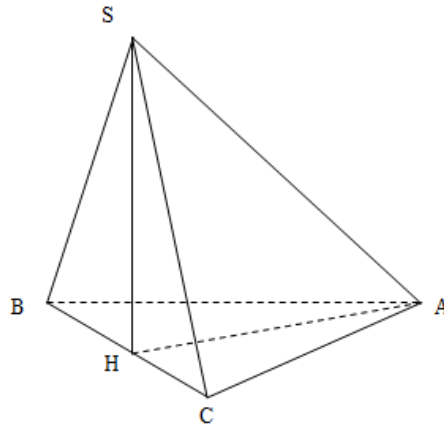
Tam giác SAC vuông tại A nên $\tan \varphi = \frac{SA}{AC} = \frac{3a}{\sqrt{5}a} = \frac{3}{\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của điểm S lên mặt phẳng (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Gọi α là số đo của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng (ABC) . Tính $\tan \alpha$.

- A. 1. B. $\sqrt{3}$. C. 0. D. $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

Chọn A



AH là hình chiếu của SA trên $(ABC) \Rightarrow (SA, (ABC)) = (SA, AH) = \angle SAH = \alpha$.

$\triangle SBC = \triangle ABC \Rightarrow SH = AH \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại $H \Rightarrow \alpha = \angle SAH = 45^\circ$.

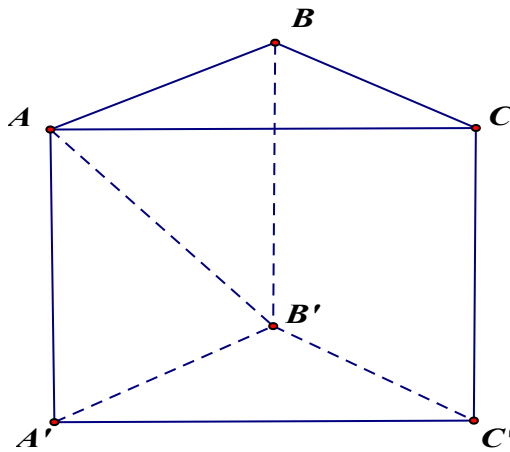
Vậy $\tan \alpha = 1$.

Câu 15: Cho lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Góc giữa đường thẳng AB' và mặt phẳng $(A'B'C')$ bằng

- A. 60° . B. 45° . C. 30° . D. 90° .

Lời giải

Chọn B



Từ giả thiết của bài toán suy ra: AB' là hình chiếu vuông góc của AB' trên $(A'B'C')$.

Do đó, $(\angle AB', (A'B'C')) = (\angle AB', A'B') = \angle ABA'$.

Tam giác $AB'A'$ vuông tại A' có $AA' = A'B' = a \Rightarrow \Delta AA'B'$ vuông cân tại A' .

$$(\angle AB', (A'B'C')) = (\angle AB', A'B') = \angle ABA' = 45^\circ.$$

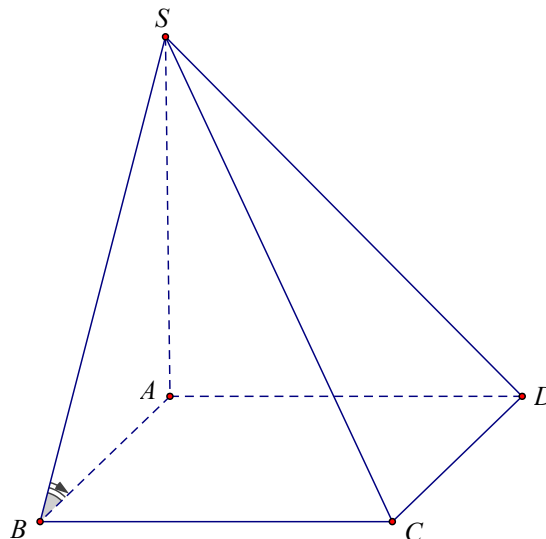
Suy ra

Câu 16: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a$, cạnh bên SA vuông góc mặt đáy và $SA = a$. Gọi φ là góc tạo bởi SB và mặt phẳng $(ABCD)$. Xác định $\cot \varphi$?

- A.** $\cot \varphi = 2$. **B.** $\cot \varphi = \frac{1}{2}$. **C.** $\cot \varphi = 2\sqrt{2}$. **D.** $\cot \varphi = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

Chọn A



Ta có $SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\overline{SB}, (ABCD)) = (\overline{SB}, BA) = \angle SBA$

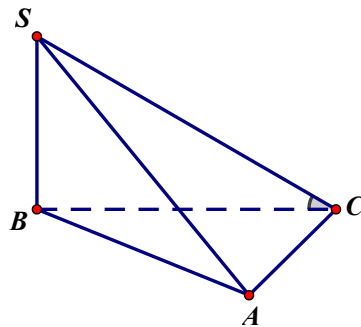
$$\Rightarrow \cot \varphi = \frac{AB}{SA} = \frac{2a}{a} = 2.$$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABC$ có SB vuông góc (ABC) . Góc giữa SC với (ABC) là góc giữa

- A.** SC và AC . **B.** SC và AB . **C.** SC và BC . **D.** SC và SB .

Lời giải

Chọn C



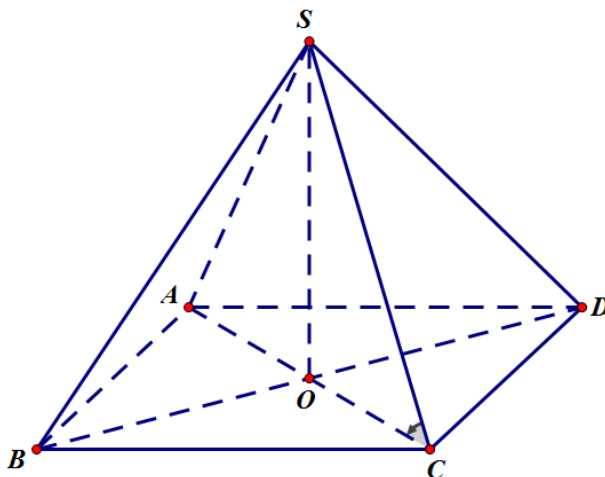
* Hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là BC nên góc giữa SC với (ABC) là góc giữa SC và BC .

Câu 18: Cho hình thoi $ABCD$ tâm O có $BD = 4a, AC = 2a$. Lấy điểm S không thuộc $(ABCD)$ sao cho $SO \perp (ABCD)$. Biết $\tan \angle SBO = \frac{1}{2}$. Tính số đo góc giữa SC và $(ABCD)$.

- A.** 60° . **B.** 75° . **C.** 30° . **D.** 45° .

Lời giải

Chọn D



Góc giữa SC và $(ABCD)$ là góc $\angle SCO$.

$$BD = 4a \Rightarrow BO = 2a$$

$$SO = BO \cdot \tan \angle SBO = 2a \cdot \frac{1}{2} = a$$

$$AC = 2a \Rightarrow OC = a$$

Vậy $\angle SCO = 45^\circ$.

Câu 19: Cho hình chóp $S.MNP$ có đáy là tam giác đều, $MN = a$, SM vuông góc với mặt phẳng đáy, $SP = 2a$, với $0 < a \leq 1$. Tính góc giữa đường thẳng SN và mặt phẳng đáy.

A. 45° .

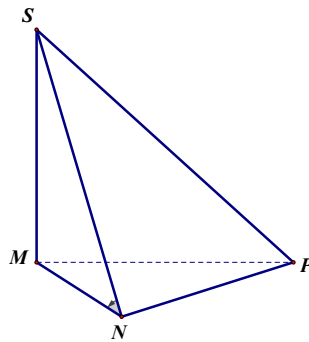
B. 90° .

C. 60° .

D. 30° .

Lời giải

Chọn C



Ta có: $SN = SP = 2a$

Vì $SM \perp (MNP) \Rightarrow \angle(SN, (MNP)) = \angle SNM$

$$\cos \angle SNM = \frac{MN}{SN} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle SNM = 60^\circ$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, $SA = a$, tam giác ABC đều cạnh a . Góc giữa SC và mặt phẳng (ABC) là:

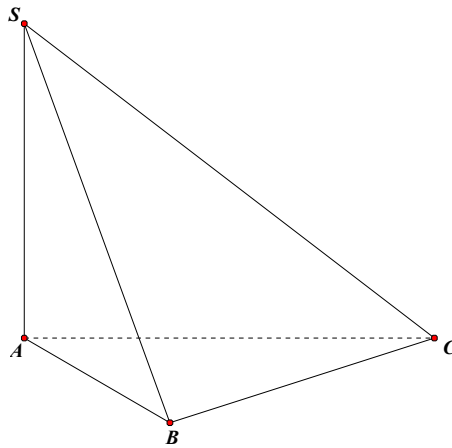
A. $\arctan 2$

B. 60° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải.

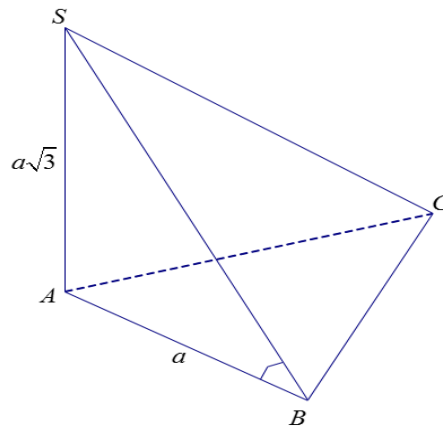


- Nhận thấy AC là hình chiếu vuông góc của SC trên mặt phẳng (ABC) nên góc giữa SC và (ABC) là góc $\widehat{SCA}$.
- Do $\triangle SAC$ vuông cân tại A nên $\widehat{SCA} = 45^\circ$.

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh bằng a , $SA \perp (ABC)$, $SA = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (ABC) .

- A.** 75° . **B.** 45° . **C.** 60° . **D.** 30° .

Lời giải



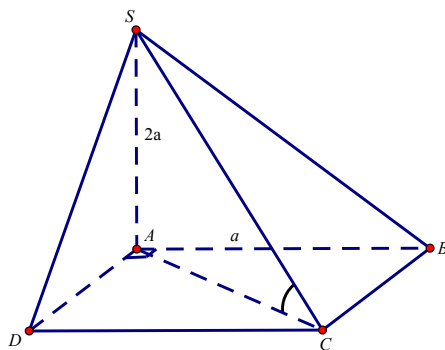
Vì $SA \perp (ABC)$ nên $(\widehat{SB}, (ABC)) = \widehat{SBA}$

Suy ra $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \sqrt{3} \Rightarrow \widehat{SBA} = 60^\circ$.

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a . Đường thẳng SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = 2a$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng $ABCD$ là α . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A.** $\sqrt{2}$. **B.** $\frac{2}{\sqrt{3}}$. **C.** 2 . **D.** $2\sqrt{2}$.

Lời giải



$$\tan \alpha = \frac{SA}{AC} = \frac{2a}{a\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Câu 23: Cho hình chóp $SABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh $2a$, H là hình chiếu của S lên AB , tam giác SAB vuông cân tại S , SH vuông góc với (ABC) . Góc giữa cạnh SC và mặt đáy bằng:

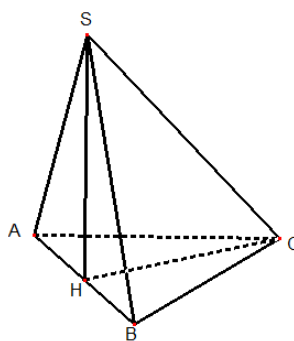
A. 60° .

B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

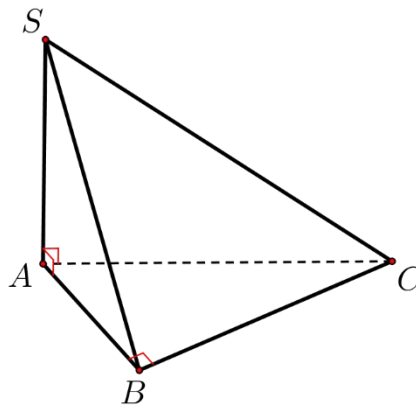


Do tam giác SAB vuông cân tại S nên H là trung điểm của AB và ta có $SH = \frac{1}{2}AB = a$.

Góc giữa cạnh SC và mặt đáy là góc $\angle SCH$.

Xét tam giác vuông HSC có $HC = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$, $SH = a$ nên $\tan \angle SCH = \frac{HS}{HC} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle SCH = 30^\circ$.

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , $SA = 2a$, tam giác ABC vuông tại B , $AB = a\sqrt{3}$ và $BC = a$ (minh họa hình vẽ bên). Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng



A. 90° .

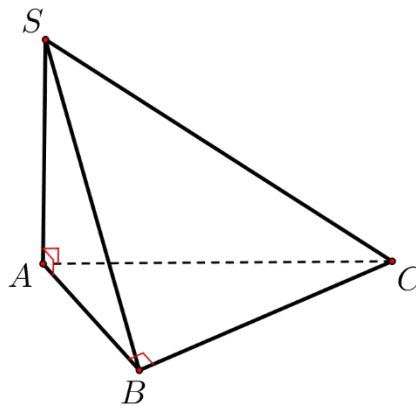
B. 45° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn B



Ta thấy hình chiếu vuông góc của SC lên (ABC) là AC nên $(SC, (ABC)) = \angle SCA$.

Mà $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2a$ nên $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = 1$.

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng 45° .

Câu 25: Cho hình chóp $SABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ADC = 60^\circ$. Gọi O là giao điểm của AC và BD , $SO \perp (ABCD)$ và $SO = a$. Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ bằng

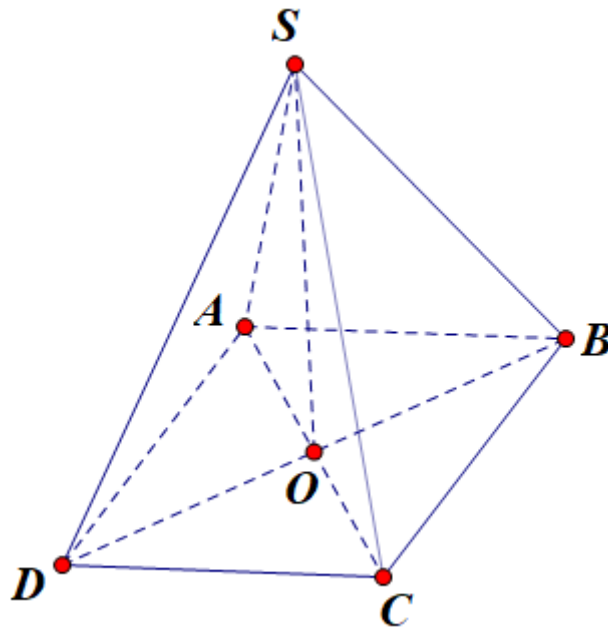
A. 60° .

B. 75° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải



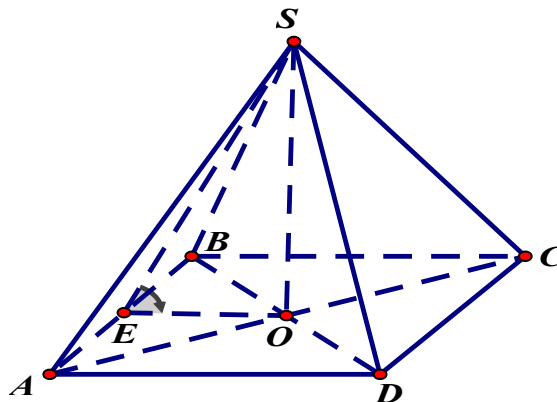
Ta có $ABCD$ là hình thoi cạnh $2a$, và $\angle ADC = 60^\circ$ nên $\triangle ACD$ đều và $OD = \frac{2a \cdot \sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Góc giữa đường thẳng SD và mặt phẳng $(ABCD)$ là $\angle SDO$ và $\tan \angle SDO = \frac{SO}{DO} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ suy ra $\angle SDO = 30^\circ$.

Câu 26: Cho hình chóp tứ giác đều có cạnh đáy bằng $a\sqrt{2}$ và chiều cao bằng $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.
Tang của góc nhị diện $[S, AB, O]$

- A. 1. B. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. C. $\sqrt{3}$. D. $\frac{3}{4}$.

Lời giải



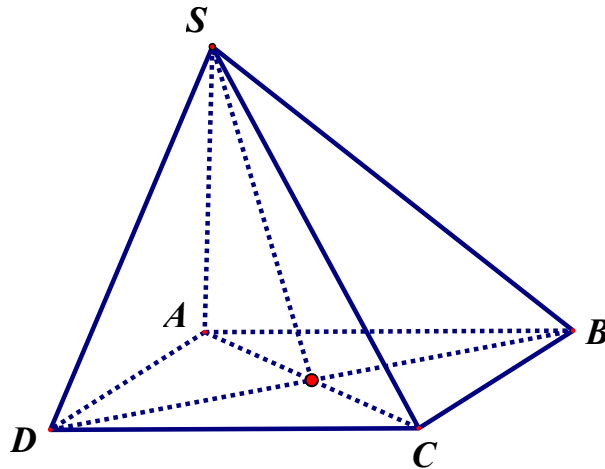
Góc giữa mặt bên và mặt đáy bằng $\angle SEO$; $EO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Xét $\triangle SEO$ vuông tại O , ta có $\tan \angle SEO = \frac{SO}{EO} = 1$.

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABCD$ với đáy $ABCD$ là hình vuông có cạnh $2a$, $SA = a\sqrt{6}$ và vuông góc với đáy. Góc nhị diện $[S, BD, A]$?

- A. 90° . B. 30° . C. 45° . D. 60° .

Lời giải



Từ A ta kẻ đường vuông góc tới BD , thì chân đường vuông góc là tâm O của hình vuông, từ đây dễ thấy $SO \perp BD$, nên góc giữa hai mặt phẳng là góc SOA .

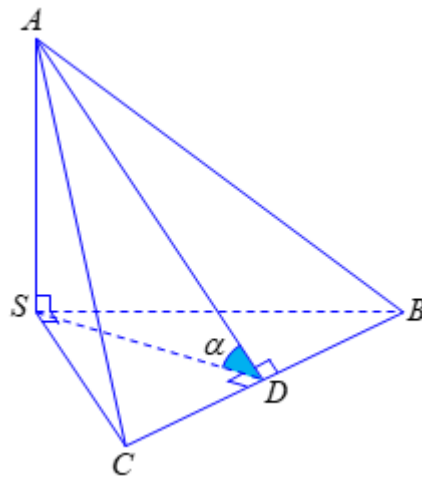
Xét tam giác $\triangle SOA$ có $\tan \angle SOA = \frac{SA}{OA} = \frac{a\sqrt{6}}{a\sqrt{2}} = \sqrt{3}$. Vậy góc cần tìm bằng 60° .

Câu 28: Cho tứ diện $S.ABC$ có các cạnh SA, SB, SC đôi một vuông góc và $SA = SB = SC = 1$. Tính $\cos \alpha$, trong đó α là góc nhị diện $[S, BC, A]$

- A. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. B. $\cos \alpha = \frac{1}{2\sqrt{3}}$. C. $\cos \alpha = \frac{1}{3\sqrt{2}}$. D. $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Lời giải

○ Cách 1:



Gọi D là trung điểm cạnh BC .

Ta có $\begin{cases} SA \perp SB \\ SA \perp SC \end{cases} \Rightarrow SA \perp (SBC) \Rightarrow SA \perp BC$.

Mà $SD \perp BC$ nên $BC \perp (SAD)$.

$\Rightarrow (\angle SBC), (ABC) = \angle SDA = \alpha$.

Khi đó tam giác SAD vuông tại S có $SD = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $AD = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ và $\cos \alpha = \frac{SD}{AD}$
 $\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A và $AB = a\sqrt{2}$. Biết $SA \perp (ABC)$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[S, BC, A]$

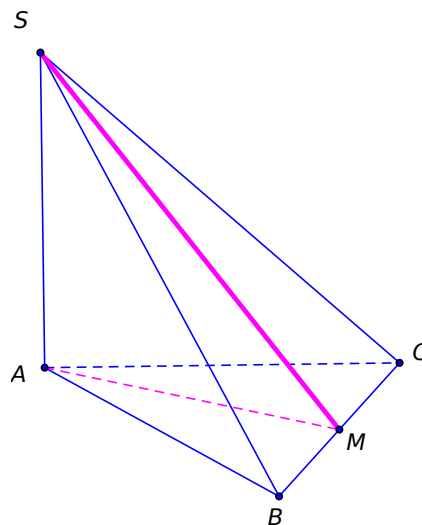
A. 30° .

B. 45° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ (SAM) \perp BC \\ (SAM) \cap (SBC) = SM \\ (SAM) \cap (ABC) = AM \end{cases} \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SM, AM)$$

Kẻ $AM \perp BC$ tại M . Ta có

Góc nhị diện $[S, BC, A]$ bằng góc $\widehat{SMA}$.

$$\text{Ta có } \tan \widehat{SMA} = \frac{SA}{AM} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SMA} = 45^\circ$$

Câu 30: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Giá trị $\sin$ của góc nhị diện $[A', BD, A]$

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}$

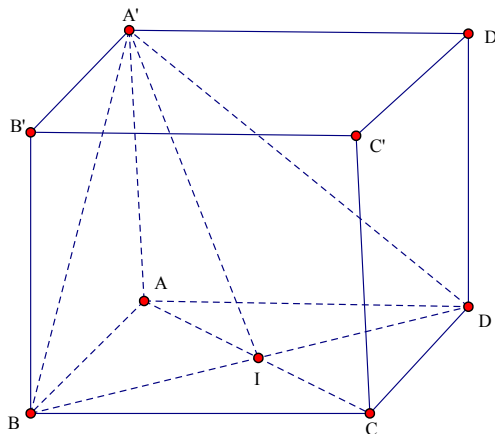
B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$

C. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

Lời giải

Chọn C



Gọi $I = AC \cap BD$. Ta có: $\begin{cases} BD \perp AI \\ BD \perp AA' \end{cases} \Rightarrow BD \perp (AIA')$; $BD = (BDA') \cap (ABCD)$.

Do đó góc nhị diện $[A', BD, A]$ là $\widehat{AIA'}$.

Ta có: $\triangle AA'I$ vuông tại A , có:

$$AA' = a; AI = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A'I = \sqrt{AA'^2 + AI^2} = \frac{a\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \sin \widehat{AIA'} = \frac{AA'}{A'I} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

Câu 31: Cho hình chóp tứ giác $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật cạnh $AB = 4a$, $AD = 3a$. Các cạnh bên đều có độ dài $5a$. Tính góc nhị diện $[S, BC, O]$

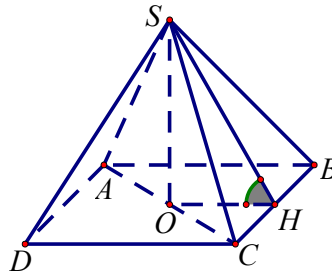
A. $\alpha \approx 75^\circ 46'$

B. $\alpha \approx 71^\circ 21'$

C. $\alpha \approx 68^\circ 31'$

D. $\alpha \approx 65^\circ 21'$

Lời giải



Gọi O, H lần lượt là trung điểm của AC và BC .

Xét tam giác SHC vuông tại H ta có: $SH = \sqrt{SC^2 - HC^2} = \sqrt{(5a)^2 - \left(\frac{3}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{91}a}{2}$.

Vì $SA = SB = SC = SD = 5a$ nên $SO \perp (ABCD)$.

Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = BC$, $SH \perp BC$, $OH \perp BC$, suy ra góc $[S, BC, O]$ bằng $\angle SHO = \alpha$.

Xét tam giác SOH vuông tại O , ta có: $\cos \alpha = \frac{OH}{SH} = \frac{\frac{2a}{\sqrt{91}}}{\frac{\sqrt{91}a}{2}} = \frac{4\sqrt{91}}{91} \Rightarrow \alpha \approx 65^\circ 21'$.

Câu 32: Cho tứ diện $OABC$ có OA, OB, OC đôi một vuông góc và $OB = OC = a\sqrt{6}$, $OA = a$. Tính góc nhị diện $[A, BC, O]$

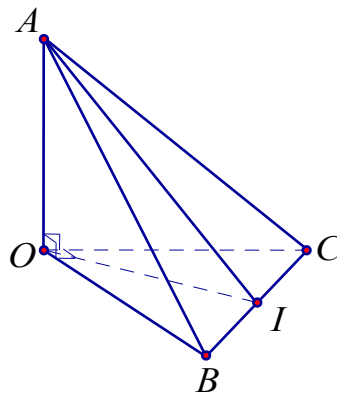
A. 60° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 90° .

Lời giải



Gọi I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$. Mà $OA \perp BC$ nên $AI \perp BC$.

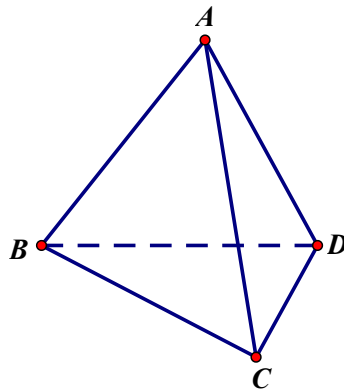
Ta có:
$$\begin{cases} (OBC) \cap (ABC) = BC \\ BC \perp AI \\ BC \perp OI \end{cases} \Rightarrow [A, BC, O] = \angle AIO$$
.

Ta có: $OI = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{OB^2 + OC^2} = a\sqrt{3}$.

Xét tam giác OAI vuông tại A có $\tan \angle OIA = \frac{OA}{OI} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle OIA = 30^\circ$.

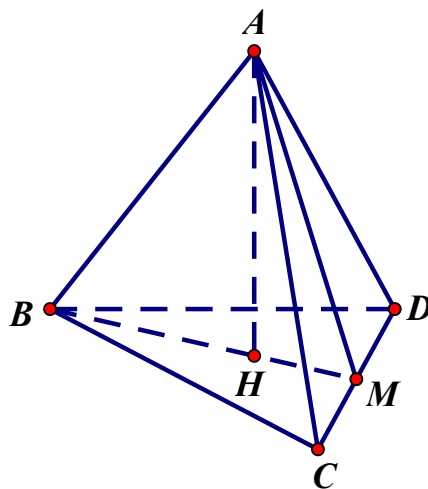
Vậy $[A, BC, O] = 30^\circ$.

Câu 33: Cho tứ diện đều $ABCD$. Gọi φ là góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) . Tính $\cos \varphi$.



- A. $\cos \varphi = 0$. B. $\cos \varphi = \frac{1}{2}$. C. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$. D. $\cos \varphi = \frac{\sqrt{2}}{3}$.

Lời giải



Gọi M là trung điểm của CD . Ta có $BM = \frac{AB\sqrt{3}}{2}$.

Gọi H là chân đường cao hạ từ A xuống mặt phẳng (BCD) thì $H \in BM$ và

$$BH = \frac{2}{3}BM = \frac{AB\sqrt{3}}{3}.$$

Góc giữa đường thẳng AB và mặt phẳng (BCD) là $\angle ABM$.

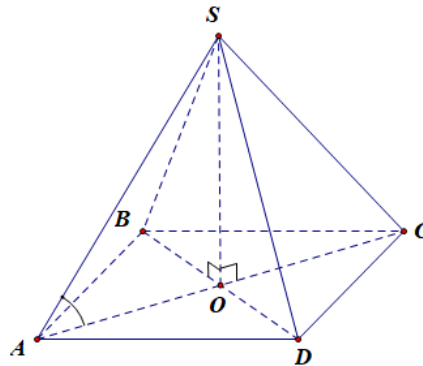
Ta có $\cos \varphi = \cos \angle ABM = \frac{BH}{AB} = \frac{\frac{AB\sqrt{3}}{3}}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Câu 34: Cho hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có cạnh đáy bằng a , cạnh bên bằng $\sqrt{2}a$. Độ lớn của góc giữa đường thẳng SA và mặt phẳng đáy bằng

- A.** 45° . **B.** 75° . **C.** 30° . **D.** 60° .

Lời giải

Chọn D



Gọi O là tâm của hình vuông $ABCD$, ta có $SO \perp (ABCD)$.

$$(\angle SA, (ABCD)) = (\angle SA, AO) = \angle SAO = \alpha.$$

Ta có $OA = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\sqrt{AB^2 + BC^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

$\triangle SAO$ vuông tại O có $\cos \alpha = \frac{OA}{SA} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$ suy ra $\alpha = 60^\circ$.

Vậy góc giữa SA và $(ABCD)$ bằng 60° .

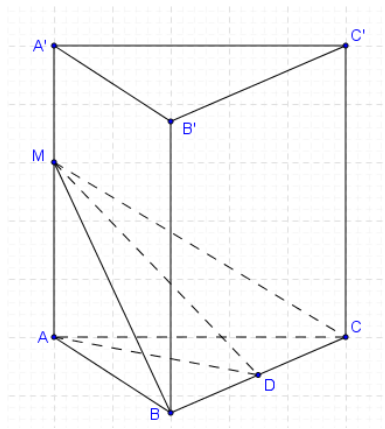
Câu 35: Lăng trụ tam giác đều $ABC.A'B'C'$ có cạnh đáy bằng a . Gọi M là điểm trên

cạnh AA' sao cho $AM = \frac{3a}{4}$. Tang của góc nhị diện $[M, BC, A]$:

- A.** 2. **B.** $\frac{1}{2}$. **C.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **D.** $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Lời giải

Chọn C



Gọi D là trung điểm của BC .

Ta có $(MBC) \cap (ABC) = BC$.

Và $\begin{cases} BC \perp AD \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMD)$.

Do đó $\alpha = [M, BC, A] = \angle MDA$, (vì tam giác MAD vuông tại A).

Vậy $\tan \alpha = \frac{AM}{AD} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Câu 36: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}$. Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$.

A. 60°

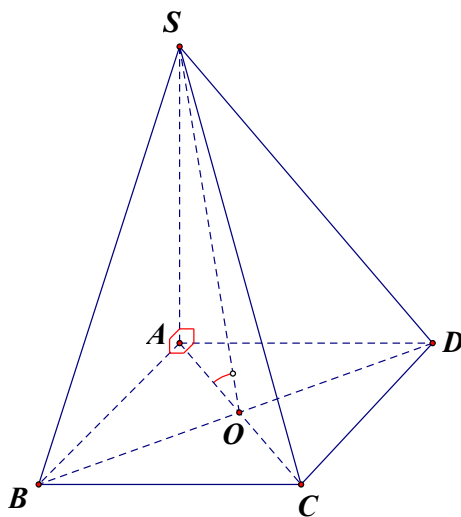
B. 45°

C. 30°

D. 75°

Lời giải

Chọn C



Gọi $O = AC \cap BD$ ta có $SO \perp BD, AO \perp BD$

Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$ là góc $\widehat{SOA}$

Xét tam giác vuông SOA có $SA = \frac{a\sqrt{6}}{6}; OA = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$$\tan \widehat{SOA} = \frac{SA}{OA} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Nên $\frac{\sqrt{3}}{3}$, suy ra góc $\widehat{SOA} = 30^\circ$

Khi đó góc nhị diện $[S, BD, A]$ bằng 30°

Câu 37: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $3a$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $SB = 5a$. Tính $\sin$ của góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$.

A. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

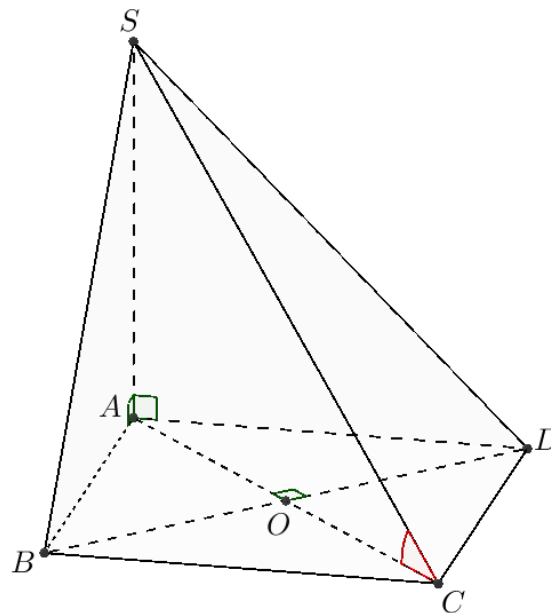
B. $\frac{3\sqrt{2}}{4}$.

C. $\frac{3\sqrt{17}}{17}$.

D. $\frac{2\sqrt{34}}{17}$.

Lời giải

Chọn D



$ABCD$ là hình vuông cạnh $3a$ nên $AC = 3a\sqrt{2}$

Xét tam giác SAB vuông tại A : $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = 4a$

$$SA \perp (ABCD) \Rightarrow (\widehat{SC, (ABCD)}) = \widehat{SCA}$$

Xét tam giác SAC vuông tại A :

$$SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = a\sqrt{34}$$

$$\sin \angle SCA = \frac{SA}{SC} = \frac{2\sqrt{34}}{17}.$$

Câu 38: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, $AB = 2a$, $AD = a$. SA vuông góc với mặt phẳng đáy. $SA = a\sqrt{3}$. Cosin của góc giữa SC và mặt đáy bằng:

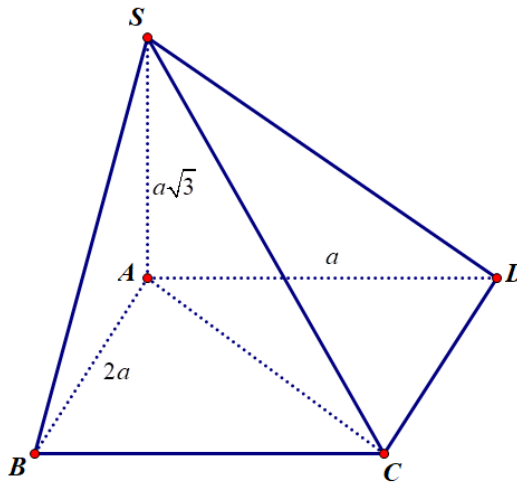
A. $\frac{\sqrt{5}}{4}$.

B. $\frac{\sqrt{7}}{4}$.

C. $\frac{\sqrt{6}}{4}$.

D. $\frac{\sqrt{10}}{4}$.

Lời giải



Hình chiếu của SC lên $(ABCD)$ là AC

Do đó $\angle SC, (ABCD) = \angle SCA$

$$AC = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{4a^2 + a^2} = a\sqrt{5} \quad \text{và} \quad SC = 2a\sqrt{2}$$

Trong tam giác vuông SAC : $\cos \angle SCA = \frac{AC}{SC} = \frac{a\sqrt{5}}{2a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$.

Câu 39: Cho tứ diện $ABCD$ có BCD là tam giác vuông tại đỉnh B , cạnh $CD = a$,

$$BD = \frac{a\sqrt{6}}{3}, \quad AB = AC = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}. \quad \text{Tính góc nhị diện } [A, BC, D]$$

A. $\frac{\pi}{4}$.

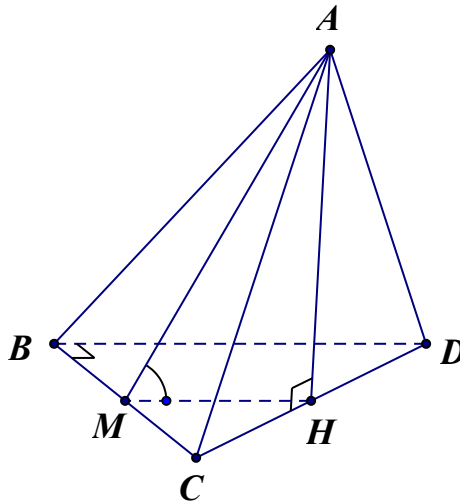
B. $\frac{\pi}{3}$.

C. $\frac{\pi}{6}$.

D. $\arctan 3$.

Lời giải

Chọn B



Gọi M và H lần lượt là trung điểm BC và CD . Do $AB = AC = AD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ và H là chân đường tròn ngoại tiếp tam giác đáy BCD nên $AH \perp (BCD)$.

Ta có
$$\begin{cases} BC \perp MH \\ BC \perp AH \\ MH, AH \subset (AMH) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (AMH)$$

Suy ra
$$\begin{cases} BC \perp MH \\ BC \perp AM \end{cases} \Rightarrow [A, BC, D] = \square AMH$$

$$\tan \angle AMH = \frac{AH}{MH} = \frac{\sqrt{AB^2 - BH^2}}{\frac{1}{2}BD} = \frac{\sqrt{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3}} = \sqrt{3}$$

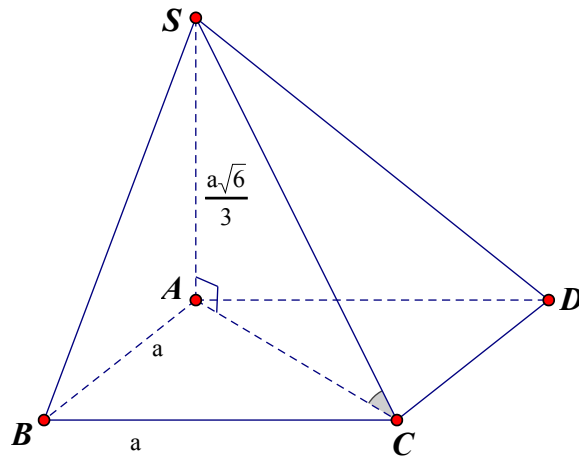
Suy ra $\angle AMH = \frac{\pi}{3}$.

Câu 40: Cho hình chóp $S.ABCD$, đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a và $SA \perp (ABCD)$.

Biết $SA = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Góc giữa SC và $(ABCD)$ là:

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 75° . **D.** 60° .

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABCD)$.

Do đó AC là hình chiếu của SC lên $(ABCD)$.

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA.$$

Xét tam giác SAC vuông tại A có $\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

$$\Rightarrow \angle SCA = 30^\circ.$$

Vậy góc giữa SC và $(ABCD)$ là 30° .

Câu 41: Cho khối chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , Tam giác SAB cân tại S và nằm trong mặt phẳng vuông góc với mặt phẳng đáy. Biết thể tích của khối chóp $S.ABCD$ là $\frac{a^3 \sqrt{15}}{6}$. Góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng đáy $(ABCD)$ là

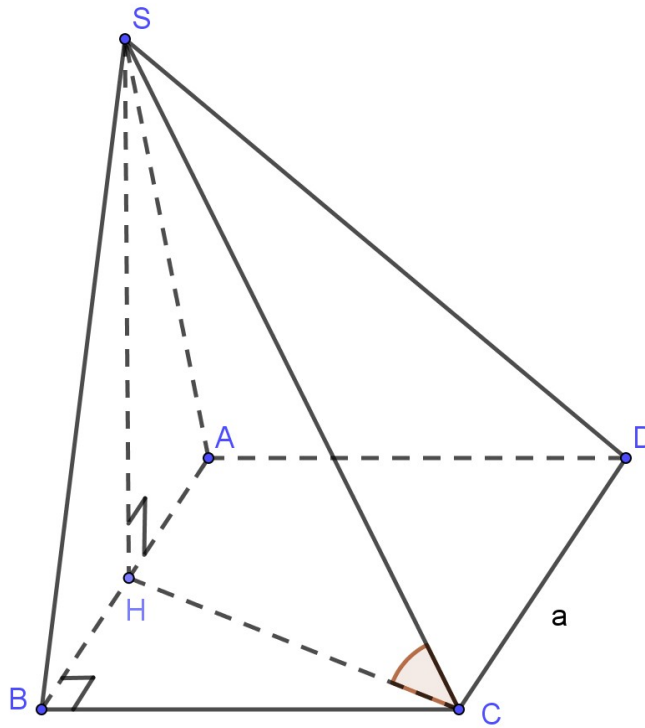
A. 120° .

B. 30° .

C. 45° .

D. 60° .

Lời giải



Gọi H là trung điểm AB . Ta có $SH \perp (ABCD)$.

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$V = \frac{1}{3} S_{ABCD} \cdot SH \Rightarrow SH = \frac{3V}{S_{ABCD}} = \frac{a\sqrt{15}}{2}$$

$$CH = \sqrt{AC^2 + AH^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$$

$$(\angle SC, (ABCD)) = (\angle SC, CH)$$

$$\tan \angle SC, CH = \frac{SH}{CH} = \sqrt{3}$$

$$\text{Vậy } (\angle SC, (ABCD)) = 60^\circ$$

Câu 42: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh SA vuông góc với mặt phẳng (ABC) , biết $AB = AC = a$, $BC = a\sqrt{3}$. Tính góc nhị diện $[B, SA, C]$

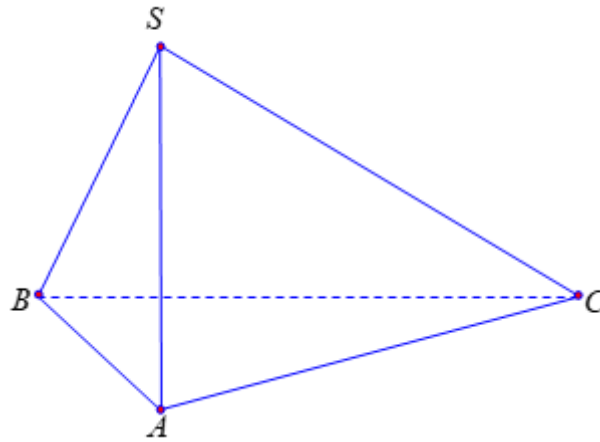
A. 30° .

B. 150° .

C. 60° .

D. 120° .

Lời giải



Vì $SA \perp (ABC)$ nên $SA \perp AB$ và $SA \perp AC$.

$$\text{ta có: } \begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ SA \perp AB \\ SA \perp AC \end{cases} \Rightarrow [B, SA, C] = \widehat{BAC}.$$

$$\text{Xét } \triangle ABC \text{ có } \cos \widehat{BAC} = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2 \cdot AB \cdot AC} = \frac{a^2 + a^2 - (a\sqrt{3})^2}{2 \cdot a \cdot a} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{BAC} = 120^\circ.$$

$$\text{Vậy } [B, SA, C] = 120^\circ.$$

Câu 43: Cho hình lăng trụ đều $ABC.A'B'C'$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm của AB và α là góc tạo bởi đường thẳng MC' và mặt phẳng (ABC) . Khi đó $\tan \alpha$ bằng

- A. $\frac{2\sqrt{7}}{7}$. B. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. C. $\sqrt{\frac{3}{7}}$. D. $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

Ta có MC là hình chiếu của MC' lên (ABC) . Suy ra $\alpha = \widehat{C'CM}$.

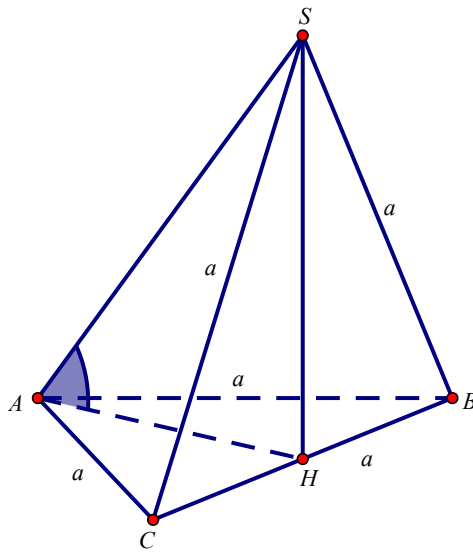
$$\tan \alpha = \frac{CC'}{CM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Xét tam giác MCC' vuông tại C có:

Câu 44: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) trùng với trung điểm H của cạnh BC . Biết tam giác SBC là tam giác đều. Tính số đo của góc giữa SA và (ABC) .

- A. 30° . B. 75° . C. 60° . D. 45° .

Lời giải



Dễ thấy AH là hình chiếu vuông góc của SA lên mặt phẳng đáy.

Do đó góc tạo bởi SA và (ABC) là $\widehat{SAH}$.

Mặt khác, $\triangle ABC = \triangle SBC \Rightarrow SH = AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Vậy tam giác SAH là tam giác vuông cân đỉnh H hay $\widehat{SAH} = 45^\circ$.

Câu 45: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, $AB = BC = a$ và $SA = a$. Góc nhị diện $[B, SC, A]$

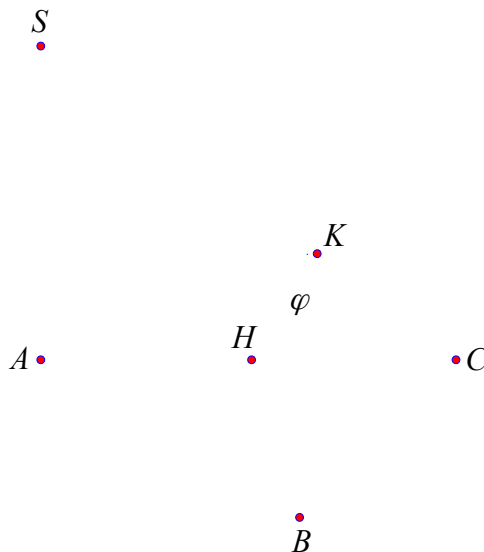
A. 60° .

B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải



Gọi H là trung điểm cạnh AC

Ta có $(SAC) \perp (ABC)$ (vì $SA \perp (ABC)$) và $BH \perp AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

Trong mặt phẳng (SAC) , kẻ $HK \perp SC$ thì $SC \perp (BHK) \Rightarrow SC \perp BK$.

$$\Rightarrow [B, SC, A] = \angle KHA = \varphi$$

Mặt khác

Tam giác ABC vuông cân tại B có $AB = BC = a$ nên $AC = a\sqrt{2}$ và $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Hai tam giác CKH và CAS đồng dạng nên $HK = \frac{HC.SA}{SC}$

$$\Leftrightarrow HK = \frac{HC.SA}{\sqrt{SA^2 + AC^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

Tam giác BHK vuông tại H có $\tan \varphi = \frac{BH}{BK} = \sqrt{3} \Rightarrow \varphi = 60^\circ$.

Vậy $[B, SC, A] = 60^\circ$.

Câu 46: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A . Tam giác SBC là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Số đo góc giữa đường thẳng SA và (ABC) bằng:

A. 45° .

B. 30° .

C. 75° .

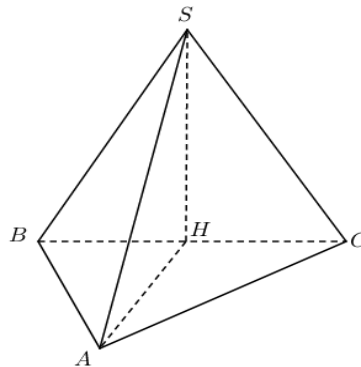
D. 60° .

Lời giải

Chọn D

Gọi H là trung điểm cạnh $BC \Rightarrow SH \perp BC$; $SH = \frac{BC\sqrt{3}}{2}$ ($\triangle SBC$ đều)

$$\begin{cases} (SBC) \perp (ABC) \\ (SBC) \cap (ABC) = BC \Rightarrow SH \perp (ABC) \\ SH \perp AB; SH \in (SBC) \end{cases}$$



$$\Rightarrow (\angle SA, (ABC)) = (\angle SA, AH) = \angle SAH$$

ΔABC vuông tại A ; H là trung điểm $BC \Rightarrow AH = \frac{BC}{2}$

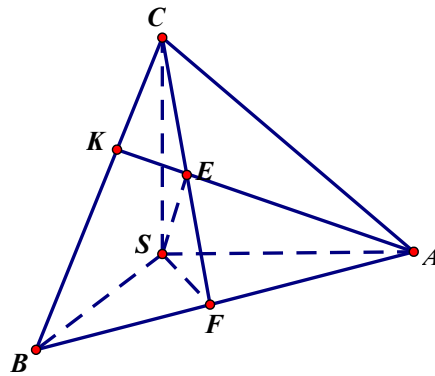
$$H \Rightarrow \tan \angle SAH = \frac{SH}{AH} = \frac{\frac{BC \cdot \sqrt{3}}{2}}{\frac{BC}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SAH = 60^\circ$$

ΔSAH vuông tại H .

Câu 47: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA, SB, SC đôi một vuông góc với nhau và $SA = SB = SC = a$. $\sin$ của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (ABC) bằng

- A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$. C. $\frac{1}{\sqrt{3}}$. D. $\frac{2}{\sqrt{6}}$.

Lời giải



Trong tam giác ABC kẻ đường cao AK và CF và $AK \cap CF = \{E\}$ nên E là trực tâm tam giác ABC .

$$\begin{cases} SC \perp SA \\ SC \perp SB \end{cases} \Rightarrow SC \perp (SAB) \text{ hay } SC \perp AB$$

Mà $CF \perp AB$ nên $AB \perp (SCF) \Rightarrow AB \perp SE$. Chứng minh tương tự ta được $BC \perp (SAK) \Rightarrow BC \perp SE$. Vậy $SE \perp (ABC)$.

Ta có CE là hình chiếu của SC lên mặt phẳng (ABC) .

$$(SC, (ABC)) = (SC, CE) = \angle SCE$$

Ta có tam giác SCF vuông tại S nên $\frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SF^2}$. Mặt khác tam giác

SAB vuông tại S nên $\frac{1}{SF^2} = \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}$. Suy ra $\frac{1}{SE^2} = \frac{1}{SC^2} + \frac{1}{SA^2} + \frac{1}{SB^2}$

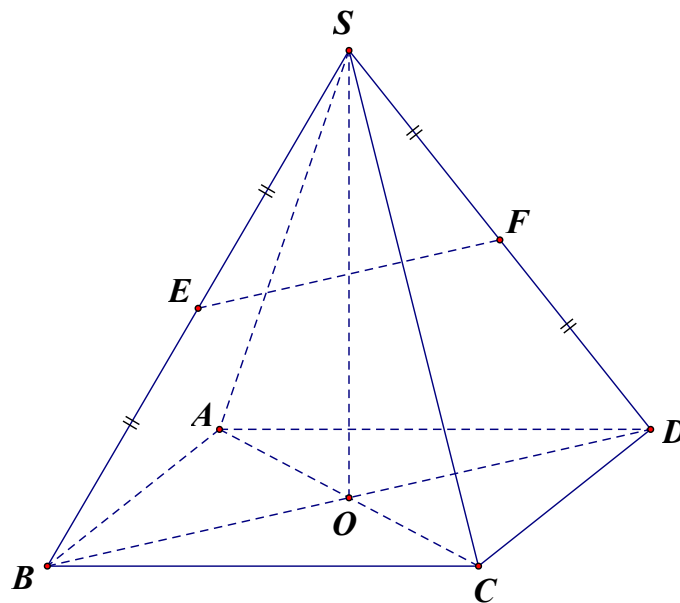
$$\Leftrightarrow \frac{1}{SE^2} = \frac{3}{a^2} \Leftrightarrow SE = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

$$\sin \angle SCE = \frac{SE}{SC} = \frac{a}{\sqrt{3}} : a = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

Câu 48: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SD , O là giao điểm của AC và BD . Khẳng định nào sau đây **sai**?

- A. $SO \perp (ABCD)$ B. $(SAC) \perp (SBD)$
 C. $EF \parallel (ABCD)$ D. $(\angle SA, (ABCD)) = 60^\circ$

Lời giải



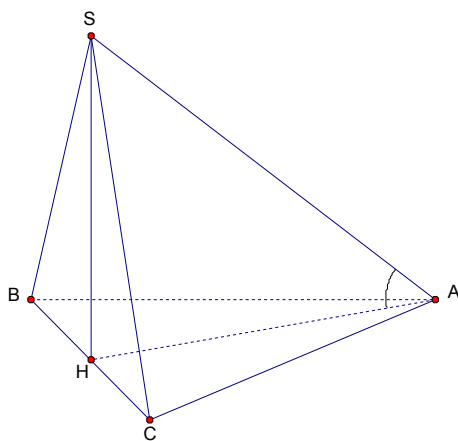
Ta có:

- + $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$
 + $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$
 + $EF \parallel BD \Rightarrow EF \parallel (ABCD)$
 + $(\angle SA, (ABCD)) = (\angle SA, AO) = \angle SAO = 45^\circ$

Câu 49: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh a . Hình chiếu vuông góc của S lên (ABC) là trung điểm của cạnh BC . Biết $\triangle SBC$ đều, tính góc giữa SA và (ABC)

- A. 45° B. 90° C. 30° D. 60°

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC suy ra $SH \perp (ABC)$

Do đó hình chiếu của SA lên mặt phẳng (ABC) là AH

Do $\triangle ABC$ và $\triangle SBC$ đều cạnh a nên $SH = AH \Rightarrow \triangle SAH$ vuông cân tại H
 $\Rightarrow (SA, (ABC)) = \angle SAH = 45^\circ$.

Câu 50: Cho hình lăng trụ $ABC.A'B'C'$, đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = a$, $\angle ACB = 30^\circ$. M là trung điểm AC . Hình chiếu vuông góc của đỉnh A' lên mặt phẳng (ABC) là trung điểm H của BM . Khoảng cách từ C' đến mặt phẳng (BMB') bằng $\frac{3a}{4}$. Tính số đo góc tạo bởi cạnh bên và mặt phẳng đáy của hình lăng trụ.

A. 60° .

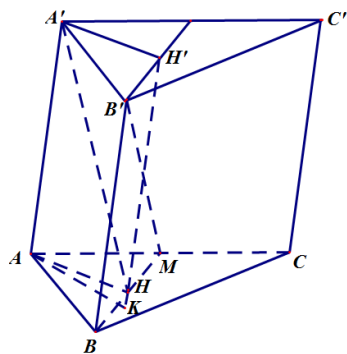
B. 30° .

C. 90° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn A



Ta có: $d(C', (BMB')) = d(C, (BMB')) = d(A, (BMB')) = \frac{3a}{4}$,

Trong tam giác ABC có: $AC = 2a, BM = a, AM = a$ suy ra tam giác ABM là tam giác đều cạnh a . Dựng hình bình hành $AA'H'H$ suy ra $H' \in (BMB')$, K là hình chiếu của A lên HH' .

$$\begin{cases} BM \perp AH \\ BM \perp A'H \end{cases} \Rightarrow BM \perp (AA'H'H) \Rightarrow BM \perp AK$$

$$\begin{cases} AK \perp BM \\ AK \perp HH' \end{cases} \Rightarrow AK \perp (BMB') \Rightarrow d(A, (BMB')) = AK = \frac{3a}{4}$$

Trong hình bình hành $AA'H'H$ ta có

$$AK \cdot HH' = A'H \cdot AH \Rightarrow \frac{A'H}{HH'} = \frac{AK}{AH} = \frac{3a}{4} \cdot \frac{2}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mặt khác: $(AA', (ABC)) = (AA', AH) = \angle AA'H$

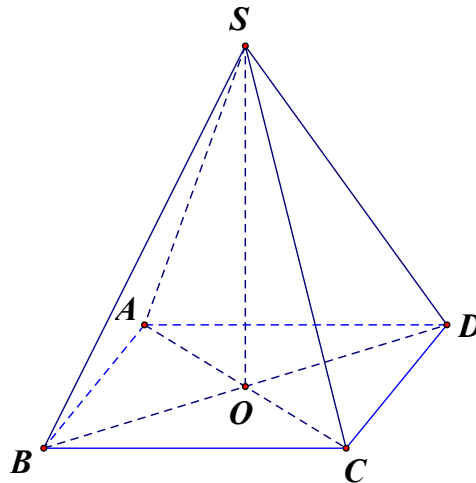
Trong tam giác vuông $AA'H$ có $\sin \angle AA'H = \frac{A'H}{AA'} = \frac{A'H}{HH'} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \angle AA'H = 60^\circ$

Câu 51: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi tâm O , $SO \perp (ABCD)$. Góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc

- A. $\angle ASO$. B. $\angle SAO$. C. $\angle SAC$. D. $\angle ASB$.

Lời giải

Chọn A



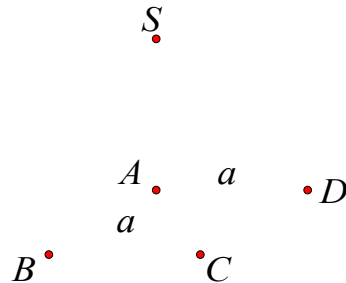
Vì $ABCD$ là hình thoi $\Rightarrow AO \perp BD$.

Mà $AO \perp SO$ do $SO \perp (ABCD)$. Suy ra $AO \perp (SBD)$ hay O là hình chiếu của A lên (SBD) . Suy ra góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) là góc $\angle ASO$ ($\angle ASO < 90^\circ$ do $\triangle SAO$ vuông ở O).

Câu 52: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Tìm số đo của góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) .

- A. 45° . B. 30° . C. 90° . D. 60° .

Lời giải



Để thấy $CB \perp (SAB) \Rightarrow SB$ là hình chiếu vuông góc của SC lên (SAB) .

Vậy góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) là $\widehat{CSB}$.

Tam giác CSB có $\widehat{B} = 90^\circ; CB = a; SB = a\sqrt{3} \Rightarrow \tan \widehat{CSB} = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Vậy $\widehat{CSB} = 30^\circ$.

Câu 53: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) , khi đó α thỏa mãn hệ thức nào sau đây:

- A. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. B. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$. C. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$. D. $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

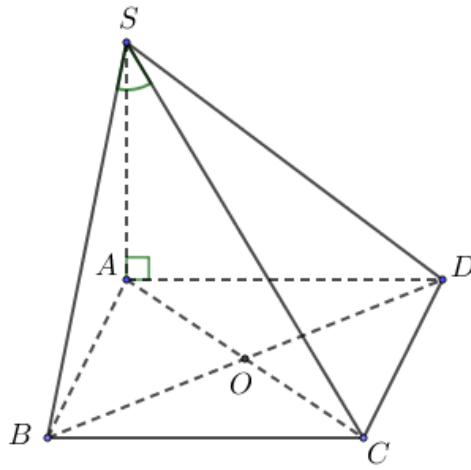
Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Suy ra $\alpha = \widehat{BSO}$.

Lại có $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 54: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a . SA vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và $SA = a\sqrt{6}$ (hình vẽ). Gọi α là góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Tính $\sin \alpha$ ta được kết quả là:



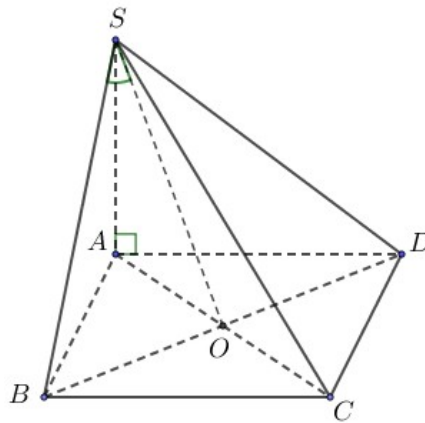
A. $\frac{1}{\sqrt{14}}$.

B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

D. $\frac{1}{5}$.

Lời giải



Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $BO \perp (SAC) \Rightarrow \alpha = (\overline{SB}, (SAC)) = \angle BSO$.

Ta có $SB = a\sqrt{7}$, $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$.

Câu 55: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật, cạnh $AB = a$, $AD = \sqrt{3}a$. Cạnh bên $SA = a\sqrt{2}$ và vuông góc mặt phẳng đáy. Góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) bằng:

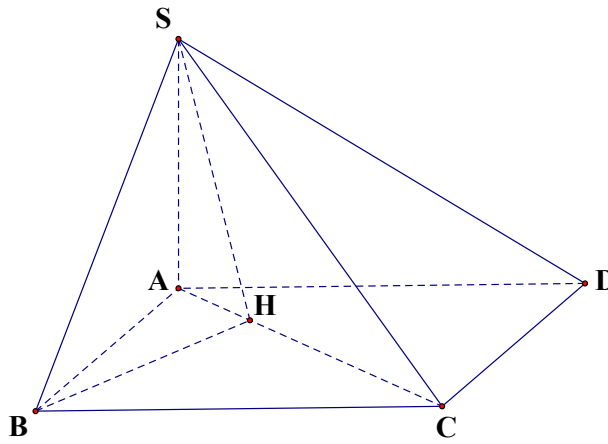
A. 75° .

B. 60° .

C. 45° .

D. 30° .

Lời giải



Kẻ $BH \perp AC$ và $H \in AC \Rightarrow BH \perp (SAC)$.

SH là hình chiếu của BH trên mặt phẳng (SAC) .

Góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) là $\angle BSH$.

Ta có $BH = \frac{AB \cdot BC}{\sqrt{AB^2 + BC^2}} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Trong tam giác vuông SBH ta có $\sin \angle BSH = \frac{BH}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle BSH = 30^\circ$.

Câu 56: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AB = BC = a$, $BB' = a\sqrt{3}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng $(BCC'B')$.

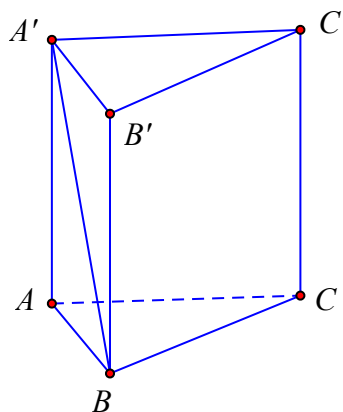
A. 45° .

B. 30° .

C. 60° .

D. 90° .

Lời giải



Hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ nên $BB' \perp (A'B'C') \Rightarrow BB' \perp A'B' \Rightarrow A'B' \perp BB'$ (1)

Bà ra có $AB \perp BC \Rightarrow A'B' \perp B'C'$.

Kết hợp với (1) $\Rightarrow A'B' \perp (BCC'B') \Rightarrow (\angle(A'B'; (BCC'B'))) = \angle A'BB'$

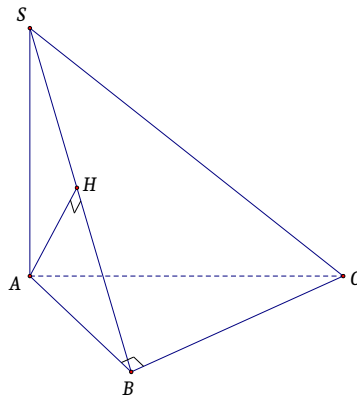
$$\Rightarrow \tan(\angle A'B; (BCC'B')) = \tan \angle A'B'B' = \frac{A'B'}{BB'} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle A'B; (BCC'B') = 30^\circ$$

Câu 57: Cho khối chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, tam giác ABC vuông tại B , $AC = 2a$, $BC = a$, $SB = 2a\sqrt{3}$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBC) .

- A.** 45° . **B.** 30° . **C.** 60° . **D.** 90° .

Lời giải

Chọn B



Trong (SAB) kẻ $AH \perp SB$ ($H \in SB$).

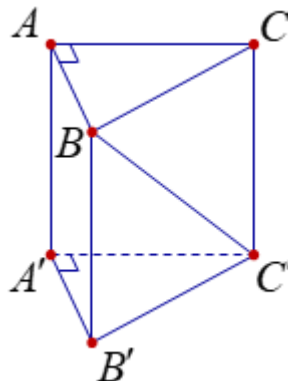
Vì $\begin{cases} SA \perp BC \\ AB \perp BC \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp AH$

Mà $SB \perp AH$ do cách dựng nên $AH \perp (SBC)$, hay H là hình chiếu của A lên (SBC) suy ra góc giữa SA và (SBC) là góc $\angle ASH$ hay góc $\angle ASB$.

Tam giác ABC vuông ở $B \Rightarrow AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = a\sqrt{3}$

Tam giác SAB vuông ở $A \Rightarrow \sin \angle ASB = \frac{AB}{SB} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle ASB = 30^\circ$

Câu 58: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông cân tại A , $AB = AA' = a$ (tham khảo hình vẽ bên). Tính tang của góc giữa đường thẳng BC' và mặt phẳng $(ABB'A')$.



A. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

C. $\sqrt{2}$.

D. $\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Lời giải

ΔABC vuông cân tại $A \Rightarrow AB = AC = a$.

$\Delta ABA'$ vuông tại $A \Rightarrow A'B = a\sqrt{2}$.

Ta có $\begin{cases} C'A' \perp A'B' \\ C'A' \perp AA' \Rightarrow C'A' \perp (ABB'A') \end{cases}$.

$\Rightarrow BA'$ là hình chiếu của BC' lên mặt phẳng $(ABB'A')$.

$\Rightarrow (BC'; (ABB'A')) = (BC'; BA')$.

$\Delta A'BC'$ vuông tại $A' \Rightarrow \tan \angle A'BC' = \frac{A'C'}{A'B} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Câu 59: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông tại B , $AC = 2$, $BC = 1$, $AA' = 1$. Tính góc giữa AB' và $(BCC'B')$.

A. 45° .

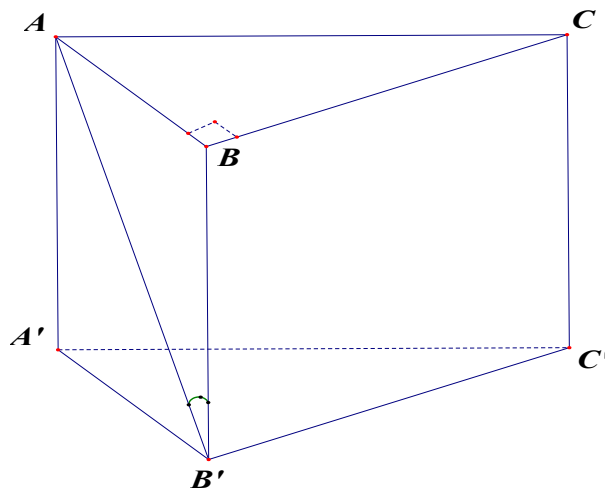
B. 90° .

C. 30° .

D. 60° .

Lời giải

Chọn D



Ta có: $\begin{cases} AB \perp BC \\ AB \perp BB' \end{cases} \Rightarrow AB \perp (BCC'B')$

, suy ra BB' là hình chiếu vuông góc của AB' trên mặt phẳng $(BCC'B')$.

Vậy góc giữa đường AB' và $(BCC'B')$ chính là góc $\angle A'B'B$.

Xét tam giác ABB' vuông tại B có $BB' = AA' = 1$, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{3}$

Suy ra $\tan \angle A'B'B = \frac{AB}{BB'} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle A'B'B = 60^\circ$.

Câu 60:) Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh $2a$, $\angle ABC = 60^\circ$, $SA = a\sqrt{3}$ và $SA \perp (ABCD)$. Tính góc giữa SA và mặt phẳng (SBD) .

A. 60° .

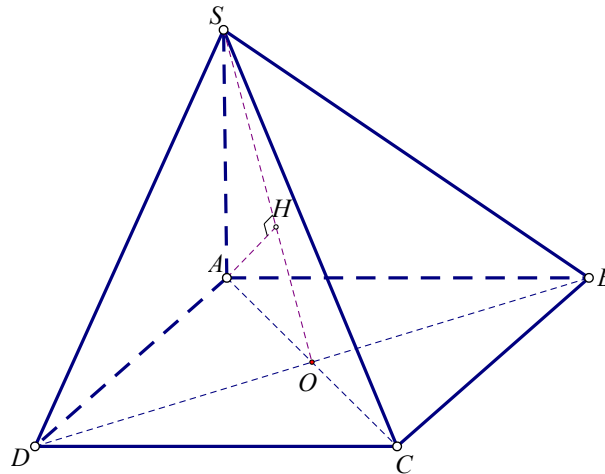
B. 90° .

C. 30° .

D. 45° .

Lời giải

Chọn C



Gọi O là tâm của hình thoi $ABCD$, gọi H là hình chiếu vuông góc của A lên SO , ta có:

$$\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp AH$$

Từ $AH \perp SO, AH \perp BD$ suy ra $AH \perp (SBD)$, hay SH là hình chiếu vuông góc của SA lên (SBD) ,

$$\text{Suy ra } (\angle SA, (SBD)) = (\angle SA, SO) = \angle ASO.$$

Ta có $\triangle ABC$ đều cạnh $2a$ nên $OA = a$.

$$\triangle SAO \text{ vuông tại } A \text{ nên } \tan \angle ASO = \frac{OA}{SA} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle ASO = 30^\circ.$$

•Dạng 2: Câu trắc nghiệm đúng, sai

Câu 1: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông cạnh a , cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy và $SA = a\sqrt{2}$.

a) AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

b) $(SB, (ABCD)) \approx 54,75^\circ$

c) $(SC, (ABCD)) = 45^\circ$

d) $(SC, (SAB)) = 60^\circ$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai

Ta có: $SA \perp (ABCD) \Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mặt phẳng $(ABCD)$.

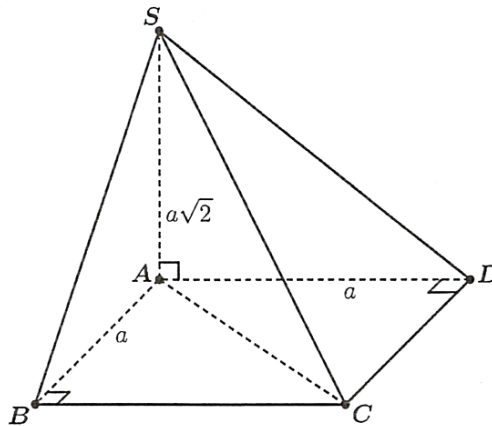
Vì vậy $(SB, (ABCD)) = (SB, AB) = \angle SBA$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2} \Rightarrow \angle SBA \approx 54,74^\circ$.

Vậy $(SB, (ABCD)) = \angle SBA \approx 54,75^\circ$.

Ta có AC là hình chiếu của SC trên mặt phẳng $(ABCD)$ nên

$(SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = 45^\circ$ (do tam giác SAC vuông cân có $SA = AC = a\sqrt{2}$).



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABCD)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$.

Suy ra SB là hình chiếu của SC trên mặt phẳng (SAB) .

Do vậy $(SC, (SAB)) = (SC, SB) = \angle SCB$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = a\sqrt{3}$.

Tam giác SBC vuông tại B có:

$$\tan \angle SCB = \frac{BC}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \angle SCB = 30^\circ.$$

Vậy $(SC, (SAB)) = \angle SCB = 30^\circ$.

Câu 2: Cho tứ diện $ABCD$ có AB, AC, AD đôi một vuông góc với nhau. Biết rằng $AB = AC = a, AD = a\sqrt{3}$.

a) $AC \perp (ABD)$

d) $(CD, (ABD)) = 30^\circ$

c) Góc phẳng nhị diện $[A, BC, D] \approx 87,79^\circ$

d) Góc phẳng nhị diện $[C, AB, D] = 90^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

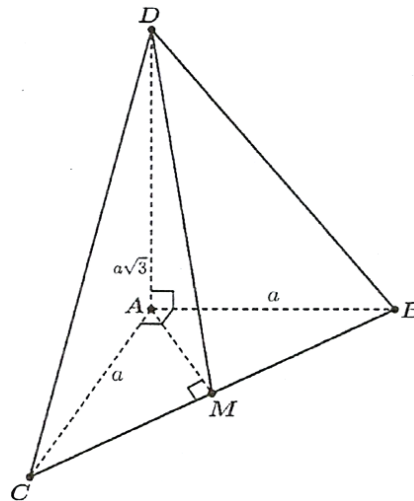
Ta có: $\begin{cases} AC \perp AB \\ AC \perp AD \end{cases} \Rightarrow AC \perp (ABD)$

Khi đó AD là hình chiếu của CD trên (ABD) .

Ta có: $(CD, (ABD)) = (CD, AD) = \angle CDA$.

Tam giác ACD vuông tại A có: $\tan \angle CDA = \frac{AC}{AD} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle CDA = 30^\circ$.

Vậy $(CD, (ABD)) = \angle CDA = 30^\circ$.



Gọi M là trung điểm BC thì $AM \perp BC$ (do $AB = AC$).

Vì $\begin{cases} AD \perp AB \\ AD \perp AC \end{cases}$

$\Rightarrow AD \perp (ABC)$

$\Rightarrow AD \perp BC$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AM \\ BC \perp AD \end{cases}$

$$\Rightarrow BC \perp (ADM)$$

$$\Rightarrow BC \perp DM.$$

Khi đó: $(AM, DM) = \angle AMD$ là góc phẳng nhị diện $[A, BC, D]$.

Tam giác ABC vuông cân tại A nên đường cao $AM = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Tam giác ADM vuông tại A có:

$$\tan \angle AMD = \frac{AD}{AM} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{6} \Rightarrow \angle AMD \approx 67,79^\circ$$

Vì $AB \perp AC, AB \perp AD$ nên $(AC, AD) = \angle CAD$ là góc phẳng nhị diện $[C, AB, D]$ và $\angle CAD = 90^\circ$.

Câu 3: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có cạnh đáy bằng $a\sqrt{3}$, cạnh bên bằng $2a$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC . Khi đó:

- a) $SO \perp (ABC)$
- b) $(SA, (ABC)) = (SA, OA)$
- c) $SO = a\sqrt{2}$
- d) $(SM, (ABC)) \approx 70,9^\circ$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai

Gọi O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều ABC (O thuộc AM). Vì $S.ABC$ là hình chóp tam giác đều nên $SO \perp (ABC)$.

Ta có OA là hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra $(SA, (ABC)) = (SA, OA) = \angle SAO$.

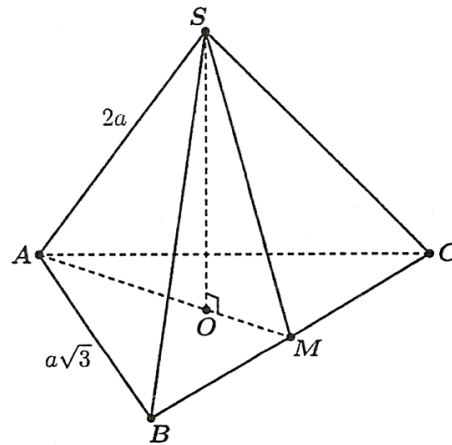
Ta có:
$$OA = \frac{2}{3} AM = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a$$

Tam giác SOA vuông tại O có: $\cos \angle SAO = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \angle SAO = 60^\circ$.

Vậy $(SA, (ABC)) = \angle SAO = 60^\circ$.

Ta có: OM là hình chiếu của SM trên (ABC) nên

$$(SM, (ABC)) = (SM, OM) = \angle SMO.$$



Ta có:

$$OM = \frac{1}{3} AM = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{a}{2}$$

$$\begin{aligned} SO &= \sqrt{SA^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{(2a)^2 - a^2} = a\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Tam giác SMO vuông tại O có:

$$\tan \angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{a}{2}} = 2\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \angle SMO \approx 73,9^\circ.$$

Vậy $(SM, (ABC)) = \angle SMO \approx 73,9^\circ$.

Câu 4: Cho hình lăng trụ tam giác đều $ABC \cdot A'B'C'$ có cạnh đáy bằng $2a$ và cạnh bên bằng $3a$. Khi đó:

a) Gọi M là trung điểm $A'B'$, ta có $CM = a\sqrt{2}$

b) Góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$ bằng 60°

c) Gọi K là trung điểm AB , M là trung điểm $A'B'$, khi đó: $A'B' \perp MK$

b) Góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ bằng 30°

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng

Gọi M là trung điểm $A'B'$, suy ra $CM \perp A'B'$ (do tam giác $A'B'C'$ đều).

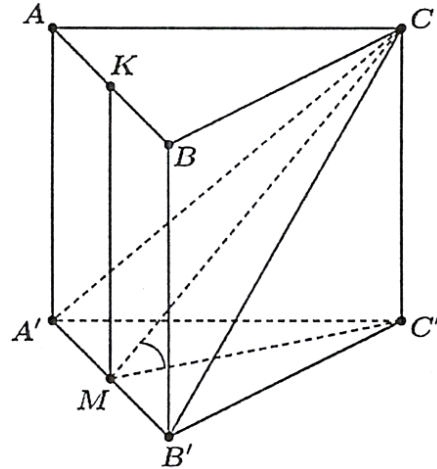
Mặt khác $CC' \perp A'B'$ (do $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ đứng).

Suy ra $A'B' \perp (CMC')$ hay $A'B' \perp CM$.

Vậy $(CM, C'M) = \angle MC'C$ là góc phẳng nhị diện $[C, A'B', C']$.

Ta có: $C'M = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Suy ra $\tan \angle MC'C = \frac{CC'}{C'M} = \frac{3a}{a\sqrt{3}} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle MC'C = 60^\circ$

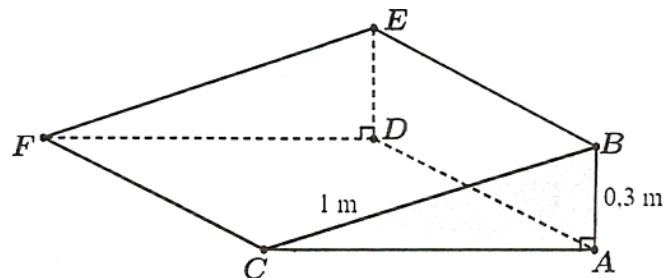


Gọi K là trung điểm AB thì MK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABB'A' \Rightarrow MK \parallel AA' \Rightarrow A'B \perp MK$; ta lại có $A'B \perp CM$ (câu a).

Vậy $(MK, CM) = \angle MKC$ là góc phẳng nhị diện $[A, A'B', C]$ với $\angle MKC = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$.

Câu 5: Một tấm cầu dốc kê bậc thêm được làm bằng cao su như hình vẽ sau. Biết $BCFE$ là hình vuông có cạnh bằng $1m$ và $AB = 0,3m$. Khi đó:

- a) $\sin \angle BCA = 0,5$
- b) $(BC, (ACFD)) \approx 17,46^\circ$
- c) $BF = \sqrt{2}m$
- d) $(BF, (ACFD)) \approx 15,25^\circ$



Lời giải

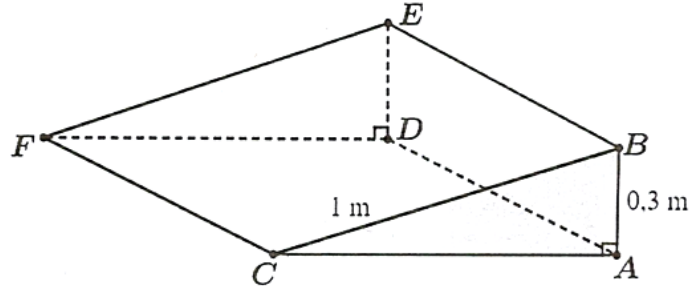
a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai

Vì AC là hình chiếu của BC trên mặt phẳng $(ACFD)$ nên

$(BC, (ACFD)) = (BC, AC) = \angle BCA$. Tam giác ABC vuông tại A có:

$$\sin \angle BCA = \frac{AB}{BC} = \frac{0,3}{1} = 0,3 \Rightarrow \angle BCA \approx 17,46^\circ$$

Vậy $(BC, (ACFD)) = \angle BCA \approx 17,46^\circ$.



Vì AF là hình chiếu của BF trên mặt phẳng $(ACFD)$ nên

$(BF, (ACFD)) = (BF, AF) = \angle BFA$.

Hình vuông $BCFE$ cạnh bằng 1 m có đường chéo $BF = \sqrt{2}\text{ m}$.

Tam giác ABF vuông tại A có: $\sin \angle BFA = \frac{AB}{BF} = \frac{3\sqrt{2}}{20} \Rightarrow \angle BFA \approx 12,25^\circ$

Vậy $(BF, (ACFD)) = \angle BFA \approx 12,25^\circ$.

Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có cạnh bên SA vuông góc với mặt phẳng đáy, tam giác ABC vuông cân tại B . Biết $SB = a\sqrt{3}, AB = a$. Khi đó:

a) $SA = a\sqrt{2}$.

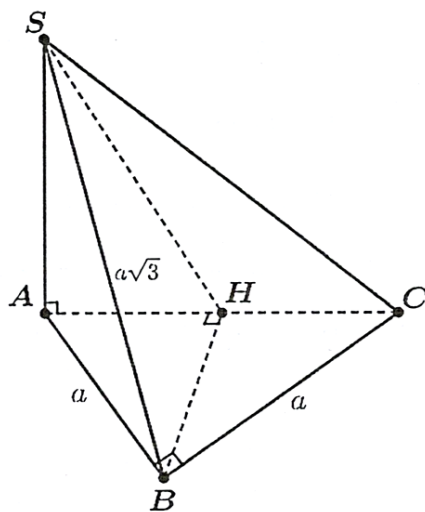
b) Tang góc giữa SB và mặt phẳng (ABC) bằng: $\sqrt{2}$

c) Sin góc giữa SB và mặt phẳng (SAC) bằng $\frac{\sqrt{6}}{8}$

d) Số đo góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ bằng $54,74^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Ta có: $SA \perp (ABC)$ nên AB là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (ABC) .

Suy ra $(SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{3a^2 - a^2} = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAB vuông tại A có: $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{2}}{a} = \sqrt{2}$

Gọi H là trung điểm AC thì $BH \perp AC$ (do tam giác ABC cân tại B). (1)

Ta lại có $SA \perp (ABC) \Rightarrow BH \perp SA$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $BH \perp (SAC)$ hay SH là hình chiếu của SB trên mặt phẳng (SAC) .

Vậy $(SB, (SAC)) = (SB, SH) = \widehat{BSH}$.

Ta có: $BH = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, suy ra $\sin \widehat{BSH} = \frac{BH}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{a\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{6}$.

Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \text{ (do } SA \perp (ABC)) \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB) \Rightarrow BC \perp SB$.

Vì vậy $(SB, AB) = \widehat{SBA}$ chính là góc phẳng nhị diện $[S, BC, A]$ với $\tan \widehat{SBA} = \sqrt{2}$ (theo câu a)).

Suy ra $\widehat{SBA} \approx 54,74^\circ$.

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình chữ nhật có cạnh $AB = 2a, AD = a$, tam giác SAB đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD . Khi đó:

a) $SH \perp (ABCD)$

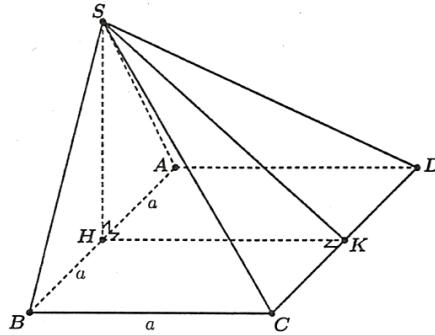
b) Góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ bằng 90°

c) $SH = a\sqrt{5}$

d) Góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$ bằng 30°

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Sai



Gọi H, K lần lượt là trung điểm AB và CD . Ta có $SH \perp AB$ và HK là đường trung bình của hình chữ nhật $ABCD$ nên $HK \parallel AD \parallel BC \Rightarrow HK \perp AB$. (1)

Ta lại có tam giác SAB đều nên $SH \perp AB$. (2)

Mặt khác $(SAB) \perp (ABCD)$, suy ra $SH \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp HK$.

Từ (1) và (2) suy ra $\angle SHK$ là góc phẳng nhị diện $[S, AB, C]$ và $\angle SHK = 90^\circ$.

Theo câu a), ta có: $CD \perp HK$. (3)

Mặt khác $SH \perp (ABCD)$ nên $CD \perp SH$.

Suy ra $CD \perp (SHK) \Rightarrow CD \perp SK$. (4)

Từ (3) và (4) suy ra $\angle SKH$ là góc phẳng nhị diện $[S, CD, A]$.

Tam giác SAB đều cạnh $2a$ nên đường cao $SH = \frac{2a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$.

Từ câu a), ta có $HK = BC = a$ (tính chất đường trung bình của hình chữ nhật).

Do đó $\tan \angle SKH = \frac{SH}{HK} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SKH = 60^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SB = 2a$. Khi đó:

a) $SA = \sqrt{3}a$

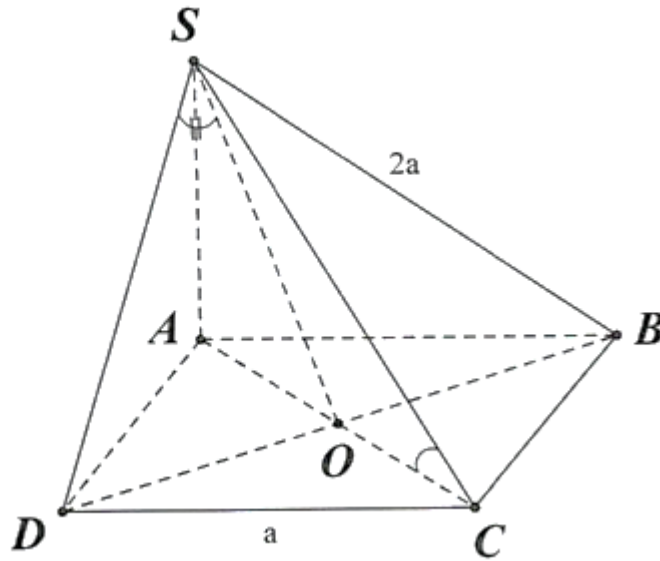
b) $(SC, (ABCD)) \approx 50,8^\circ$

c) $SD = 2a$

d) $(SD, (SAC)) \approx 30,7^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ tại A và SC cắt mp $(ABCD)$ tại C

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên mp $(ABCD)$

$$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA$$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A :

$$\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \angle SCA \approx 50,8^\circ$$

Vậy $(SC, (ABCD)) \approx 50,8^\circ$.

Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$ tại O và SD cắt mp (SAC) tại S

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD trên mp $(SAC) \Rightarrow (SD, (SAC)) = (SD, SO) = \angle SDO$

Ta có: $SD = SB = 2a$ (vì $\triangle SAB = \triangle SAD$)

Xét $\triangle SDO$ vuông tại O : $\sin \angle SDO = \frac{DO}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle SDO \approx 20,7^\circ$

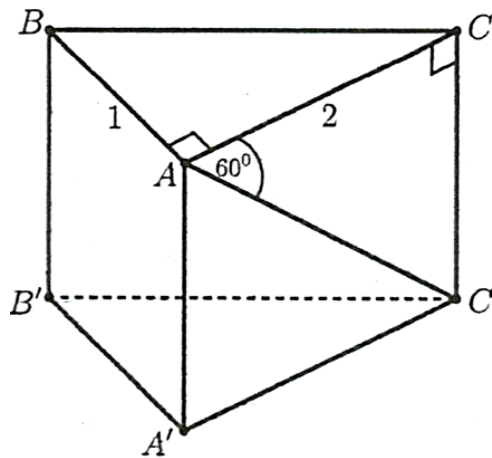
Vậy $(SD, (SAC)) \approx 20,7^\circ$.

Câu 9: Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông tại A với $AB=1, AC=2$. Biết rằng góc phẳng nhị diện $[C, AB, C']$ bằng 60° . Khi đó:

- a) $AC \perp AB$
- b) $CC' = 2\sqrt{3}$
- c) Thể tích của khối lăng trụ đã cho bằng $3\sqrt{3}$
- d) Góc phẳng nhị diện $[A, CC', B]$ gần bằng $26,57^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Vì $ABC \cdot A'B'C'$ là lăng trụ đứng nên $AA' \perp (ABC) \Rightarrow AA' \perp AB$, mà $AC \perp AB$ (1).

Suy ra $AB \perp (ACC'A') \Rightarrow AC' \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\widehat{C'AC}$ là góc phẳng nhị diện $[C, AB, C']$ và $\widehat{C'AC} = 60^\circ$.

Tam giác ACC' vuông tại C có: $\tan \widehat{C'AC} = \frac{CC'}{AC} \Rightarrow CC' = 2\sqrt{3}$.

Thể tích khối lăng trụ đã cho là: $V_{ABC \cdot A'B'C'} = A'A \cdot S_{\Delta ABC} = 2\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 2\sqrt{3}$ (đơn vị thể tích).

Dễ thấy $CC' \perp (ABC)$ và $CC' = (ACC') \cap (B'CC')$ nên $\widehat{ACB}$ là góc phẳng nhị diện $[A, CC', B]$.

Tam giác ABC vuông tại A có: $\tan \widehat{ACB} = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{ACB} \approx 26,57^\circ$.

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. ABC là tam giác vuông cân tại B . Cho độ dài các cạnh $SA=AB=a$. Khi đó:

a) AB là hình chiếu của SB trên mp (ABC)

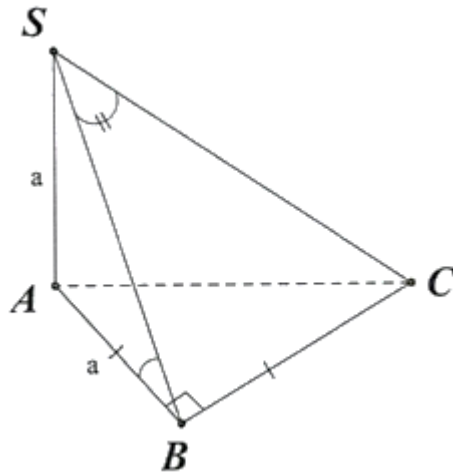
b) $(SB, (ABC)) = 45^\circ$

c) $SB = a\sqrt{2}$

d) $(SC, (SAB)) \approx 35,3^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Ta có: $SA \perp (ABC)$ tại A và SB cắt mặt phẳng (ABC) tại B

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên mp (ABC)

$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \widehat{SBA}$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A : $\tan \widehat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \widehat{SBA} = 45^\circ$

Vậy $(SB, (ABC)) = 45^\circ$.

Ta có: $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$ tại B và SC cắt mặt phẳng (SAB) tại S

$\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên mp (SAB)

$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = \widehat{BSC}$

Ta có: $SB = a\sqrt{2}$ (vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B : $\tan \widehat{BSC} = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \widehat{BSC} \approx 35,3^\circ$

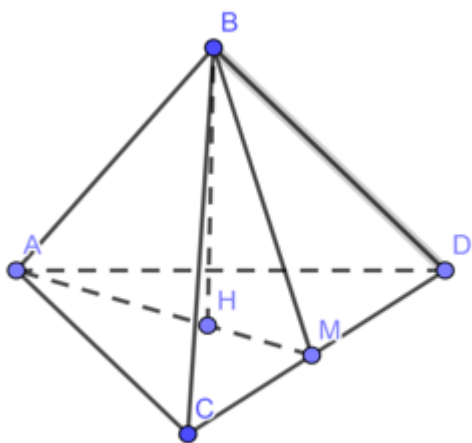
Vậy $(SC, (SAB)) \approx 35,3^\circ$.

Câu 11: Cho tứ diện $ABCD$ có hai mặt bên ACD và BCD là hai tam giác cân có đáy CD . Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên (ACD) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc ADB .
- b) $H \in AM$ (M là trung điểm CD).
- c) $(ABH) \perp (ACD)$.
- d) AB nằm trên mặt phẳng trung trực của CD .

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Tính chất tam giác cân suy ra CD vuông góc với AM, BM , do đó góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc AMB nên khẳng định ở phương án **A** là **sai**. Chọn phương án **a)**

Các khẳng định ở các phương án còn lại đúng là do CD vuông góc với AM, BM nên $CD \perp (AMB)$, do đó $BH \perp AM$ tại H thì $BH \perp (ACD)$. Vì vậy:

. $H \in AM$ tức là khẳng định ở phương án **B** là đúng.

. Có $CD \perp (AMB)$ suy ra $(ACD) \perp (AMB)$ tức là khẳng định ở phương án **C** là đúng.

. Có $CD \perp (AMB)$ tại trung điểm M của CD nên (ABM) là mặt phẳng trung trực của CD tức là khẳng định ở phương án **D** là đúng.

Câu 13: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$, đáy ABC vuông tại A . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa $(SBC), (SAC)$ là góc SCB .

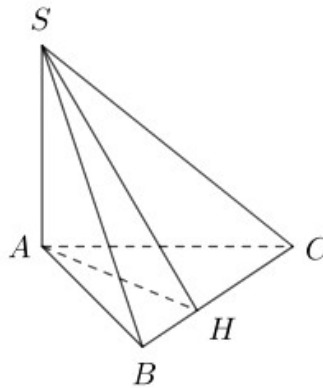
b) $(SAB) \perp (ABC)$.

c) $(SAB) \perp (SAC)$.

d) Vẽ $AH \perp BC, H \in BC$. Góc giữa (SBC) , (ABC) là góc AHS

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Đúng



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$

Mà $AC \perp AB$ nên $AC \perp (SAB) \Rightarrow (SAC) \perp (SAB)$

Lại có: $\left. \begin{array}{l} AH \perp BC \\ SA \perp BC \end{array} \right\} \Rightarrow (SAH) \perp BC \Rightarrow ((SBC), (ABC)) = \angle AHS$

Vậy ý A sai.

Câu 14: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , $SA \perp (ABCD)$ và $SA = a\sqrt{3}$. Gọi α là góc tạo bởi đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

b) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{8}$.

c) $\sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

d) $\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

Gọi O là tâm của đáy $ABCD$.

Ta có $BO \perp AC$ và $BO \perp SA$ nên SO là hình chiếu của SB trên (SAC) .

Suy ra $\alpha = \angle BSO$.

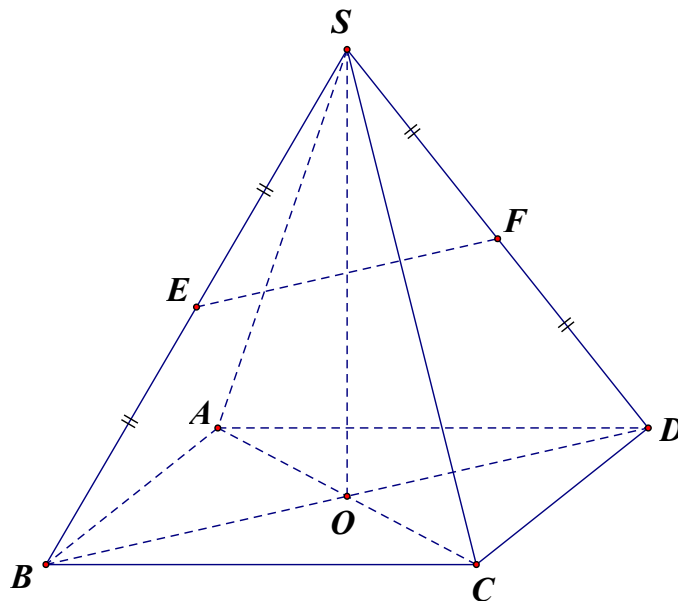
Lại có $BO = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = 2a$. Suy ra $\sin \alpha = \frac{BO}{SB} = \frac{\sqrt{2}}{4}$.

Câu 15: Cho hình chóp $S.ABCD$ có tất cả các cạnh đều bằng nhau. Gọi E, F lần lượt là trung điểm của SB và SD , O là giao điểm của AC và BD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $SO \perp (ABCD)$
- b) $(SAC) \perp (SBD)$
- c) $EF \parallel (ABCD)$
- d) $(\angle SA, (ABCD)) = 60^\circ$

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có:

+ $S.ABCD$ là hình chóp đều $\Rightarrow SO \perp (ABCD)$

+ $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow (SBD) \perp (SAC)$

+ $EF \parallel BD \Rightarrow EF \parallel (ABCD)$

$$(\overline{SA}, (ABCD)) = (\overline{SA}, AO) = \angle SAO = 45^\circ$$

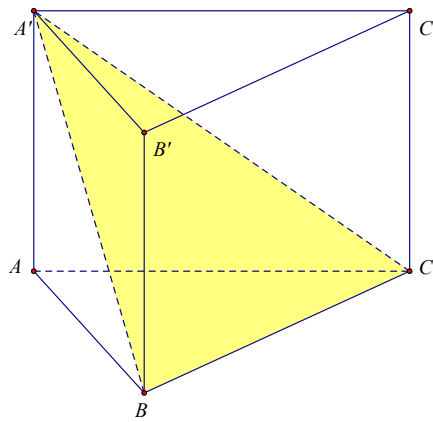
+

Câu 16: Trong hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $AC = a\sqrt{5}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45° .
- b) Hai mặt phẳng $(AA'B'B)$ và $(BB'C)$ vuông góc với nhau.
- c) $AC' = 2a\sqrt{2}$.
- d) Đáy ABC là tam giác vuông.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Xét tam giác ABC có $AB^2 + BC^2 = a^2 + (2a)^2 = 5a^2 = AC^2 \Rightarrow$ tam giác ABC vuông tại B .

$\Rightarrow$ Đáp án **D** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên $AB \perp (BB'C) \Rightarrow (AA'B'B) \perp (BB'C) \Rightarrow$ Đáp án **B** đúng.

Do $ABC.A'B'C'$ là lăng trụ đứng và tam giác ABC vuông tại B nên $((ABC), (A'BC)) = (\overline{AB}, \overline{A'B}) = \angle ABA' = 45^\circ \Rightarrow$ Đáp án **A** đúng.

Xét tam giác vuông $A'AC$ ta có $A'C = \sqrt{AA'^2 + AC^2} = \sqrt{a^2 + 5a^2} = a\sqrt{6} \Rightarrow$ Đáp án **C** sai.

Câu 17: Cho tứ diện đều $ABCD$, M là trung điểm BC . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

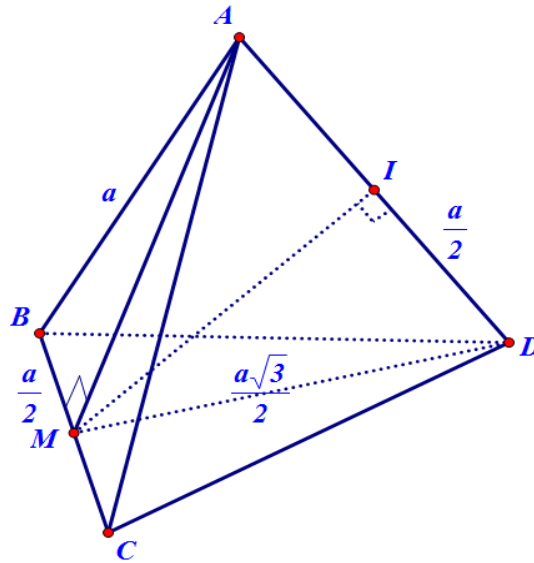
- a) cosin của (AM, DM) có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$?
- b) cosin của (AD, DM) có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$?

c) cosin của (AB, DM) có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$?

d) cosin của (AB, AM) có giá trị bằng $\frac{\sqrt{3}}{6}$?

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai



$$\cos(AM, DM) = \frac{AM^2 + DM^2 - AD^2}{2 \cdot AM \cdot DM} = \frac{\frac{3a^2}{4} + \frac{3a^2}{4} - a^2}{2 \cdot \frac{3a^2}{4}} = \frac{1}{3}$$

♦ Ta có: nên phương án a sai.

$$\cos(AD, DM) = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

♦ Ta có: nên phương án b sai

$$\cos(AB, AM) = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

♦ Ta có phương án d sai.

Câu 18: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC) , tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao AH ($H \in BC$). Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $SC \perp (ABC)$.

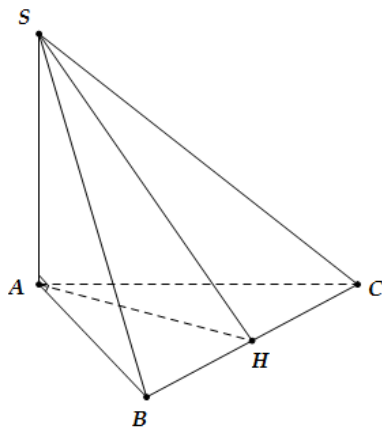
b) $O \in SH$.

c) $(SAH) \perp (SBC)$.

d) $((SBC), (ABC)) = \angle SBA$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có
$$\left. \begin{array}{l} (SAB) \perp (ABC) \\ (SAC) \perp (ABC) \\ (SAB) \cap (SAC) = SA \end{array} \right\} \Rightarrow SA \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp BC$$

$$\left. \begin{array}{l} BC \perp AH \\ BC \perp SA \end{array} \right\} \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow BC \perp SH$$

Mặt khác, $AH \perp BC$ nên $((SBC), (ABC)) = (\angle SH, AH) = \angle SHA$.

Câu 19: Cho tam giác ABC vuông tại A . Cạnh $AB = a$ nằm trong mặt phẳng (P) , cạnh $AC = a\sqrt{2}$, AC tạo với (P) một góc 60° . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) (ABC) tạo với (P) góc 45° .

b) BC tạo với (P) góc 30° .

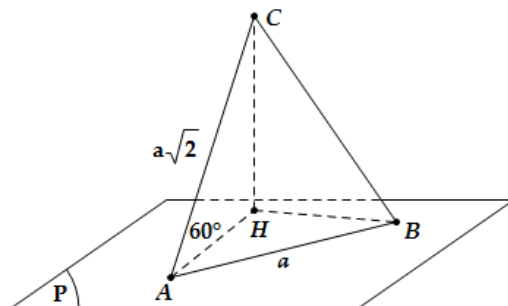
c) BC tạo với (P) góc 45° .

d) BC tạo với (P) góc 60° .

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai

Gọi H là hình chiếu vuông góc của C mặt phẳng (P) .



Khi đó, $(AC, (P)) = (AC, AH) = \angle AHC = 60^\circ$ và $(BC, (P)) = (BC, AH) = \angle BHC = \alpha$.

Tam giác AHC vuông tại H nên

$$\sin \angle AHC = \frac{CH}{AC} \Rightarrow CH = AC \cdot \sin \angle AHC = a\sqrt{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

$$\sin \alpha = \frac{CH}{BC} = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{a^2 + (a\sqrt{2})^2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 45^\circ$$

Tam giác CHB vuông tại H nên

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABC$ có $SA \perp (ABC)$ và đáy ABC vuông ở A . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAB) \perp (ABC)$.

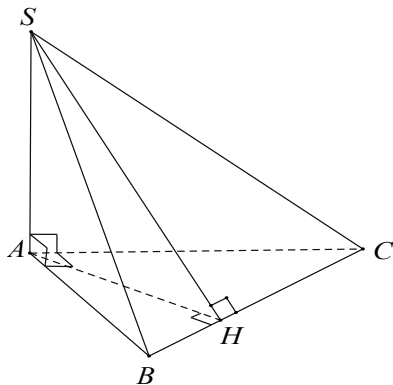
b) $(SAB) \perp (SAC)$.

c) Vẽ $AH \perp BC, H \in BC \Rightarrow$ góc AHS là góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) .

d) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (SAC) là góc $\angle SCB$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có: $SA \perp (ABC) \Rightarrow (SAB) \perp (ABC)$ nên đáp án a đúng.

$AB \perp AC, AB \perp SA \Rightarrow AB \perp (SAC) \Rightarrow (SAB) \perp (SAC)$. Nên đáp án b đúng

$AH \perp BC; BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow SH \perp BC \Rightarrow (\angle SHC, \angle AHC) = \angle SHA$.

Nên đáp án c đúng.

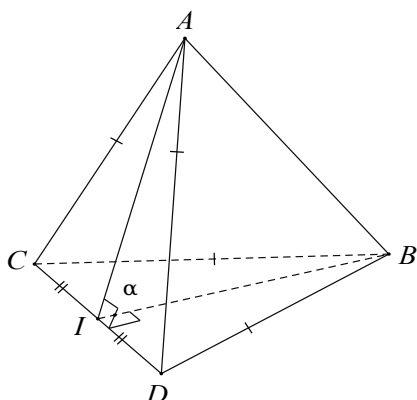
Ta có: $(SBC) \cap (SAC) = SC$ nên đáp án d sai.

Câu 21: Cho tứ diện $ABCD$ có $AC = AD$ và $BC = BD$. Gọi I là trung điểm của CD . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa hai mặt phẳng (ACD) và (BCD) là góc $\widehat{AIB}$.
- b) $(BCD) \perp (AIB)$.
- c) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và (ABD) là góc $\widehat{CBD}$.
- d) $(ACD) \perp (AIB)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



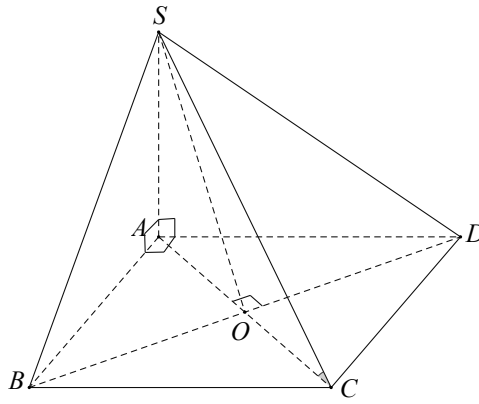
Ta có:
$$\begin{cases} (ABC) \cap (ABD) = AB \\ BC \not\subset AB \\ BD \not\subset AB \end{cases} \Rightarrow ((ABD), (ABC)) \neq \widehat{CBD} \text{ . c sai}$$

Câu 22: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông và $SA \perp (ABCD)$, gọi O là tâm hình vuông $ABCD$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{ABS}$.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.
- c) Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.
- d) $(SAC) \perp (SBD)$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Ta có:
$$\begin{cases} (SAD) \cap (ABCD) = AD \\ AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases} \Rightarrow ((SAD), (ABCD)) = \perp_{AB}$$

Câu 23: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật tâm O và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $(SAB) \perp (SAD)$.

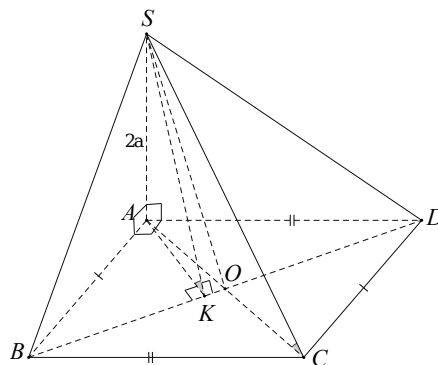
b) $(SAC) \perp (ABCD)$.

c) $\tan \alpha = \sqrt{5}$.

d) $\alpha = \angle SOA$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Gọi AK là khoảng cách từ A đến BD

Khi đó $AK = \frac{2a}{\sqrt{5}}$ và $BD \perp AK$, $BD \perp SA$

$$((SBD), (ABCD)) = \angle SKA = \alpha \Rightarrow \tan \alpha = \frac{SA}{AK} = \sqrt{5}.$$

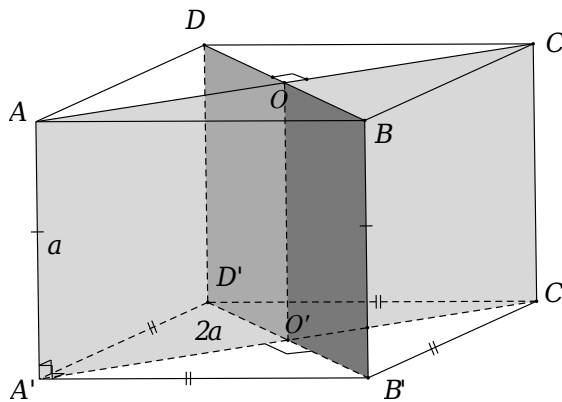
Vậy đáp án **d** sai.

Câu 24: Cho hình lăng trụ $ABCD.A'B'C'D'$ có đáy $ABCD$ là hình thoi, $AC = 2a$. Các cạnh bên vuông góc với đáy và $AA' = a$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.
- b) Góc giữa hai mặt phẳng $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ có số đo bằng 60° .
- c) Hai mặt bên $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ vuông góc với hai đáy.
- d) Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



Ta có: các cạnh bên vuông góc với đáy, đáy là hình thoi nên
Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình chữ nhật.

Hai mặt bên $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ vuông góc với hai đáy.

Hai mặt bên $(AA'B'B)$ và $(AA'D'D)$ bằng nhau.

suy ra đáp án **A,C,D** đúng.

Mặt khác hai đáy $ABCD$ và $A'B'C'D'$ là các hình thoi nên $(AA'C'C) \perp (BB'D'D)$.
Suy ra đáp án **B** sai.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông có tâm O và $SA \perp (ABCD)$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

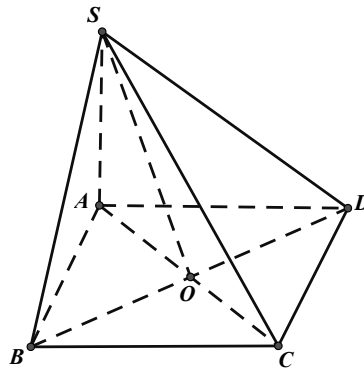
- a) Góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và $(ABCD)$ là góc $\angle ABS$.
- b) $(SAC) \perp (SBD)$.

c) Góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SOA}$.

d) Góc giữa hai mặt phẳng (SAD) và $(ABCD)$ là góc $\widehat{SDA}$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Ta có: $(SBC) \cap (ABCD) = CD$

$$\begin{cases} AB \perp BC, AB \subset (ABCD) \\ SB \perp BC, SB \subset (SBC) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBC); (ABCD)) = \widehat{ABS}$$

Vậy a đúng

Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SA \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Mà $BD \subset (SBD) \Rightarrow (SAC) \perp (SBD)$.

Vậy b đúng

Ta có: $(SBD) \cap (ABCD) = BD$

$$\begin{cases} AO \perp BD, AO \subset (ABCD) \\ SO \perp BD, SO \subset (SBD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = \widehat{SOA}$$

Vậy c đúng

Ta có: $(SAD) \cap (ABCD) = AD$

$$\begin{cases} AB \perp AD, AB \subset (ABCD) \\ SA \perp AD, SA \subset (SAD) \end{cases}$$

$$\Rightarrow ((SAD); (ABCD)) = \angle SAB = 90^\circ$$

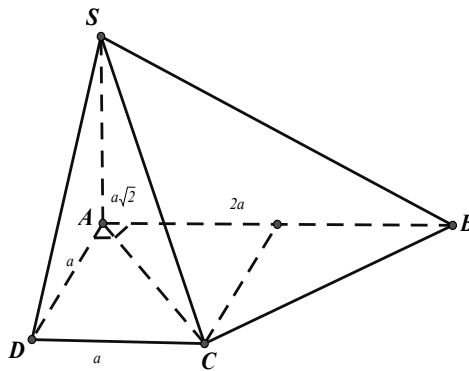
Vậy d sai.

Câu 26: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thang vuông tại A và D . $AB = 2a$, $AD = DC = a$ Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $(SBC) \perp (SAC)$.
- b) Giao tuyến của (SAB) và (SCD) song song với AB .
- c) (SDC) tạo với (BCD) một góc 60° .
- d) (SBC) tạo với đáy một góc 45° .

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



$$+Ta \text{ có: } \begin{cases} BC \perp SA \\ BC \perp AB \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$$

$$Mà BC \subset (SBC) \Rightarrow (SBC) \perp (SAC)$$

(a đúng)

$$\begin{cases} (SAD) \cap (SAB) = S \\ AB \parallel CD \\ AB \subset (SAB) \\ CD \subset (SCD) \end{cases} \Rightarrow (SAD) \cap (SAB) = Sx \parallel AB$$

+

b đúng

$$+ (SCD) \cap (BCD) = CD$$

Ta có:
$$\begin{cases} AD \perp CD, AD \subset (BCD) \\ SD \perp CD, SD \subset (SCD) \end{cases}$$

Suy ra góc giữa (SDC) và (BCD) là $\widehat{SDA}$.

$$\tan \widehat{SDA} = \frac{SA}{AD} = \sqrt{2} \Rightarrow \widehat{SDA} = 54^\circ 44'$$

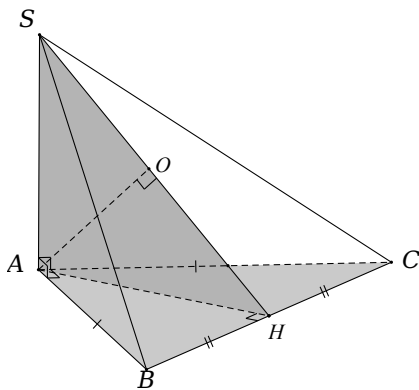
(c sai)

Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có hai mặt bên (SAB) và (SAC) vuông góc với đáy (ABC) , tam giác ABC vuông cân ở A và có đường cao $AH, (H \in BC)$. Gọi O là hình chiếu vuông góc của A lên (SBC) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $SC \perp (ABC)$.
- b) $(SAH) \perp (SBC)$.
- c) $O \in SC$.
- d) Góc giữa (SBC) và (ABC) là góc $\widehat{SBA}$.

Lời giải

a) Sai b) Đúng c) Sai d) Sai



Ta có:
$$\begin{cases} (SAB) \cap (SAC) = SA \\ (SAC) \perp (ABC) \Rightarrow SA \perp (ABC) \\ (SAB) \perp (ABC) \end{cases}$$

Gọi H là trung điểm của $BC \Rightarrow AH \perp BC$

mà $BC \perp SA \Rightarrow BC \perp (SAH) \Rightarrow (SBC) \perp (SAH)$.

Khi đó O là hình chiếu vuông góc

của A lên (SBC)

Thì suy ra $O \in SI$ và $((SBC), (ABC)) = \angle SHA$.

Vậy đáp án **b** đúng.

Câu 28: Cho hình lập phương $ABCD.A'B'C'D'$ có cạnh bằng a . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Tam giác $AB'C$ là tam giác đều.

b) Nếu α là góc giữa AC' và $(ABCD)$ thì $\cos \alpha = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

c) $ACC'A'$ là hình chữ nhật có diện tích bằng $2a^2$.

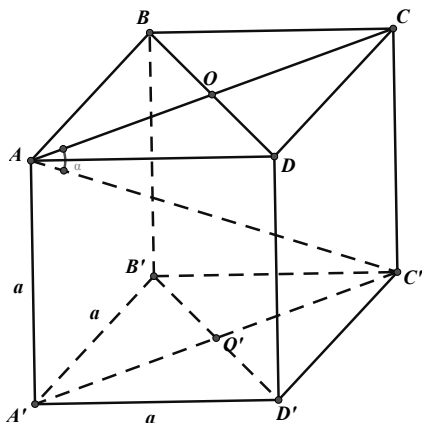
d) Hai mặt $(AA'C'C)$ và $(BB'D'D)$ ở trong hai mặt phẳng vuông góc với nhau.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

Từ giả thiết dễ dàng tính được $AC = a\sqrt{2}$.

Mặt khác vì $ABCD.A'B'C'D'$ là hình lập phương nên suy ra $\angle AA'C' = 90^\circ$.



Xét tứ giác $ACC'A'$ có $\begin{cases} AA' \parallel CC' \\ AA' = CC' = a \\ \angle AA'C' = 90^\circ \end{cases} \Rightarrow ACC'A'$ là hình chữ nhật có các cạnh a và $a\sqrt{2}$.

Diện tích hình chữ nhật $ACC'A'$ là : $S = a \cdot a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ (đvdt)

Câu 29: Cho ba tia Ox , Oy , Oz vuông góc nhau từng đôi một. Trên Ox , Oy , Oz lần lượt lấy các điểm A , B , C sao cho $OA = OB = OC = a$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $O.ABC$ là hình chóp đều.

b) Tam giác ABC có diện tích $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$.

c) Tam giác ABC có chu vi $2p = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.

d) Ba mặt phẳng (OAB) , (OBC) , (OCA) vuông góc với nhau từng đôi một.

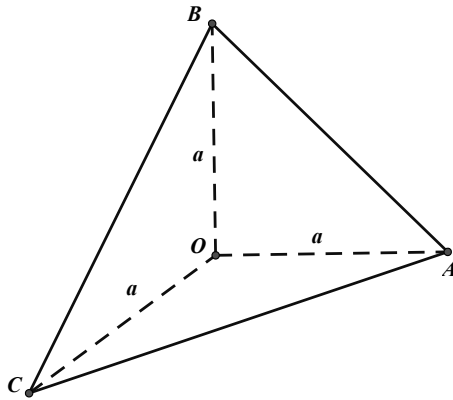
Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng

+ Áp dụng định lý Pytago trong tam giác OAB vuông tại O ta có:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 = a^2 + a^2 = 2a^2 \Rightarrow AB = a\sqrt{2}.$$

Hoàn toàn tương tự ta tính được $BC = AC = a\sqrt{2}$.



$\Rightarrow \triangle ABC$ là tam giác đều. Mặt khác theo giả thiết $OA = OB = OC = a \Rightarrow$ các mặt bên của hình chóp $O.ABC$ là các tam giác cân tại $O \Rightarrow O.ABC$ là hình chóp đều $\Rightarrow$ **đáp án a đúng.**

+ Chu vi $\triangle ABC$ là: $2p = AB + AC + BC = a\sqrt{2} + a\sqrt{2} + a\sqrt{2} = 3a\sqrt{2} \Rightarrow$ **đáp án c sai.**

+ Nửa chu vi Diện tích $\triangle ABC$ là: $p = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$. Diện tích $\triangle ABC$ là:

$$S = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2} \left(\frac{3a\sqrt{2}}{2} - a\sqrt{2} \right)} = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2} \left(\frac{a\sqrt{2}}{2} \right)} = \sqrt{\frac{3a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2a^3\sqrt{2}}{8}} = \sqrt{\frac{3a^4}{4}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \quad (\text{đvdt}).$$

$\Rightarrow$ **đáp án b đúng.**

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \begin{array}{l} OA \perp (OBC) \\ OA \subset (OAB) \\ OA \subset (OAC) \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} (OAB) \perp (OBC) \\ (OAC) \perp (OBC) \end{array} \right. \\
 + & \text{ Dễ chứng minh được } \left\{ \begin{array}{l} OB \perp (OAC) \\ OB \subset (OAB) \end{array} \right\} \Rightarrow (OAB) \perp (OAC)
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ **đáp án d đúng.**

Câu 30: Cho hình thoi $ABCD$ có cạnh bằng a và $\angle A = 60^\circ$. Trên đường thẳng vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ tại O (O là tâm của $ABCD$), lấy điểm S sao cho tam giác SAC là tam giác đều. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) $S.ABCD$ là hình chóp đều.

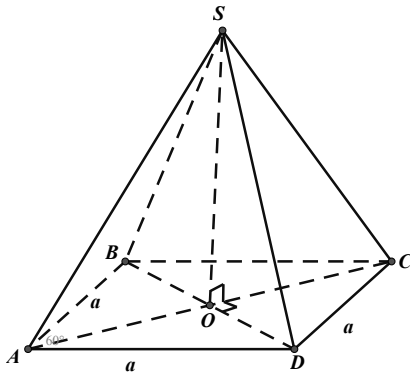
b) Hình chóp $S.ABCD$ có các mặt bên là các tam giác cân.

c) $SO = \frac{3a}{2}$.

d) SA và SB hợp với mặt phẳng $(ABCD)$ những góc bằng nhau.

Lời giải

a) Sai b) Sai c) Đúng d) Sai



Xét $\triangle ABD$ có $\angle A = 60^\circ$, $AB = AD = a \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều cạnh a . Vì O là tâm của $ABCD$ nên suy ra AO là đường trung tuyến trong $\triangle ABD$ đều cạnh

a nên dễ tính được $AO = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AC = 2AO = a\sqrt{3}$.

Mặt khác theo giả thiết SAC là tam giác đều $\Rightarrow SA = SC = AC = a\sqrt{3}$

$\Rightarrow SO = a\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2}$.

Câu 31: Cho hình chóp cắt đều $ABC.A'B'C'$ với đáy lớn ABC có cạnh bằng a . Đáy nhỏ $A'B'C'$ có cạnh bằng $\frac{a}{2}$, chiều cao $OO' = \frac{a}{2}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

a) Ba đường cao AA' , BB' , CC' đồng qui tại S .

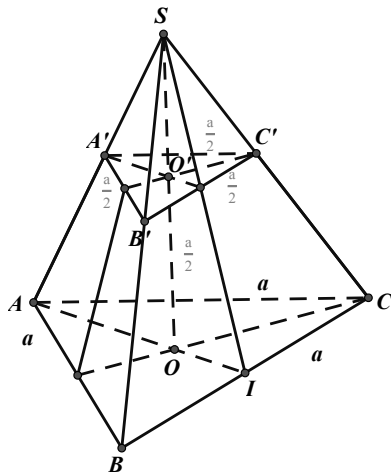
b) $AA' = BB' = CC' = \frac{a}{2}$.

c) Góc giữa mặt bên và mặt đáy là góc SIO (I là trung điểm BC).

d) Đáy lớn ABC có diện tích gấp 4 lần diện tích đáy nhỏ $A'B'C'$.

Lời giải

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Đúng



+ **Đáp án a đúng.**

+ Gọi I là trung điểm của BC .

Từ giả thiết dễ dàng chỉ ra được $\frac{AA'}{SA} = \frac{OO'}{SO} = \frac{1}{2} \Rightarrow SO = 2OO' = a$. Mặt khác

$\triangle ABC$ là tam giác đều cạnh a , có AI là đường trung tuyến $\Rightarrow AI = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
 $\Rightarrow AO = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$.

Áp dụng định lý Pytago trong $\triangle SOA$ vuông tại O ta có:

$SA^2 = SO^2 + AO^2 = a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = \frac{12a^2}{9} \Rightarrow SA = \frac{2a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow AA' = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Vì $ABC.A'B'C'$ là

hình chóp cắt đều nên $AA' = BB' = CC' = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$ **đáp án b sai.**

+ Ta có: $(SBC) \cap (ABC) = BC$. Vì ΔSBC cân tại S và I là trung điểm của BC nên suy ra $SI \perp BC$. Mặt khác ΔABC là tam giác đều có I là trung điểm của $BC \Rightarrow AI \perp BC$.

$\Rightarrow ((SBC), (ABC)) = (SI, AI) = (SI, OI) = \angle SIO \Rightarrow$ **đáp án c đúng.**

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin A}{\frac{1}{2} \cdot A'B' \cdot A'C' \cdot \sin A'} = \frac{AB \cdot AC}{A'B' \cdot A'C'} = \frac{2A'B' \cdot 2A'C'}{A'B' \cdot A'C'} = 4$$

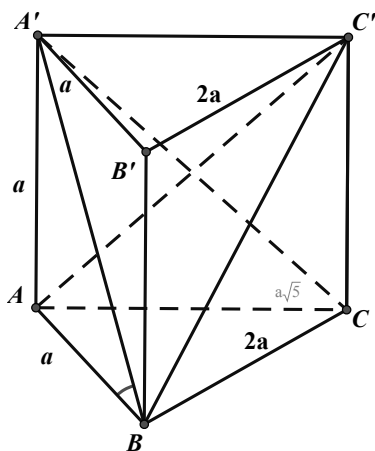
+ Ta có: $\Rightarrow$ **đáp án d đúng.**

Câu 32: Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có $AB = AA' = a$, $BC = 2a$, $CA = a\sqrt{5}$. Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) Đáy ABC là tam giác vuông.
- b) Hai mặt $(AA'B'B)$ và $(BB'C'C)$ vuông góc nhau.
- c) Góc giữa hai mặt phẳng (ABC) và $(A'BC)$ có số đo bằng 45° .
- d) $AC' = 2a\sqrt{2}$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Đúng d) Sai



Chứng minh trực tiếp chỉ ra D là đáp án sai.

Từ giả thiết dễ dàng suy ra $CC' = AA' = a$.

Áp dụng định lý Pytago trong tam giác ACC' vuông tại C ta có:

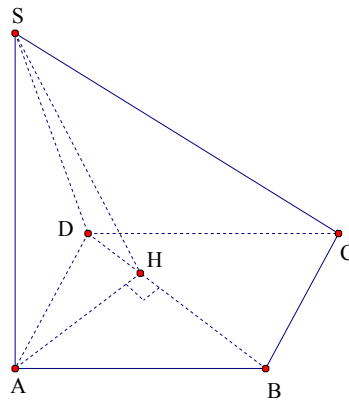
$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2 = 5a^2 + a^2 = 6a^2 \Rightarrow AC' = a\sqrt{6} \Rightarrow$$
 đáp án d sai.

Câu 33: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình chữ nhật và khoảng cách từ A đến BD bằng $\frac{2a}{\sqrt{5}}$. Biết $SA \perp (ABCD)$ và $SA = 2a$. Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng $(ABCD)$ và (SBD) . Các mệnh đề sau đúng hay sai?

- a) $(SAC) \perp (ABCD)$.
- b) $(SAB) \perp (SAD)$.
- c) $\alpha = \angle OSA$.
- d) $\tan \alpha = \sqrt{5}$.

Lời giải

a) Đúng b) Đúng c) Sai d) Đúng



Ta có $(SAC) \perp (ABCD)$, $(SAB) \perp (SAD)$. Từ A kẻ $AH \perp BD$ ($H \in BD$) $\Rightarrow AH = \frac{2a}{\sqrt{5}}$

Lại có $BD \perp (SAH)$ mà $\begin{cases} (SBD) \cap (SAH) = SH \\ (ABCD) \cap (SAH) = AH \end{cases}$
 $\Rightarrow ((SBD); (ABCD)) = (\angle H; AH) = \angle SHA$.

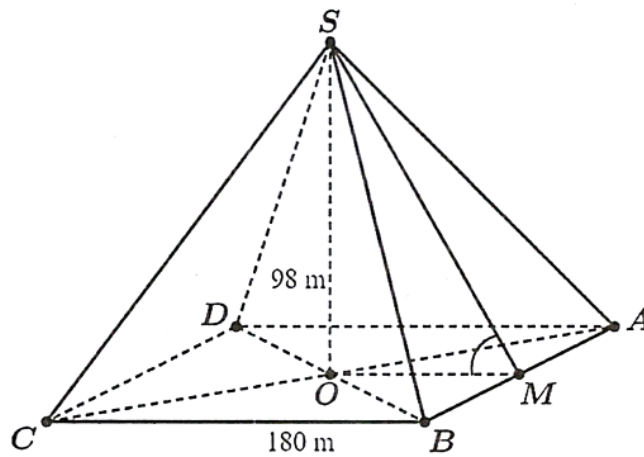
Xét $\triangle SAH$ vuông tại A , có $\tan \angle SHA = \frac{SA}{AH}$ suy ra $\tan \alpha = 2a : \frac{2a}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$.

•Dạng 3: Câu trắc nghiệm trả lời ngắn

Câu 1: Kim tự tháp Memphis tại bang Tennessee (Mỹ) có dạng hình chóp tứ giác đều với chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$. Tính số đo góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp đó.

Trả lời: $\approx 47,44^\circ$

Lời giải



Xét hình chóp tứ giác đều $S.ABCD$ có chiều cao $98m$ và cạnh đáy $180m$.

Gọi O là tâm hình vuông $ABCD$ thì $SO \perp (ABCD) \Rightarrow SO \perp AB$. (1)

Gọi M là trung điểm AB thì OM là đường trung bình của tam giác ABC , suy

ra $OM = \frac{BC}{2} = 90(m)$ và $OM \perp AB$. (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle SMO$ là góc phẳng nhị diện $[(SAB), AB, (ABCD)]$ với

$$\tan \angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{98}{90} = \frac{49}{45} \Rightarrow \angle SMO \approx 47,44^\circ$$

Vậy góc nhị diện tạo bởi mặt bên và mặt đáy của kim tự tháp xấp xỉ $47,44$.

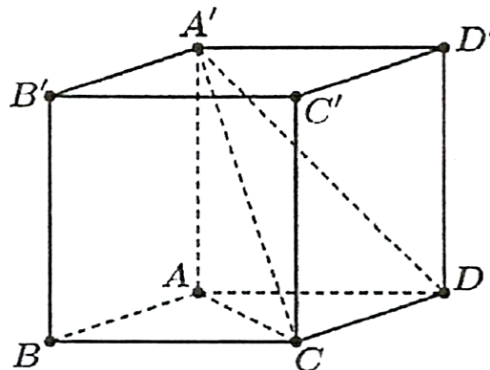
Câu 2: Cho hình lập phương $ABCD \cdot A'B'C'D'$.

a) Xác định và tính góc giữa $A'D$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

b) Xác định và tính góc giữa $A'C$ với mặt phẳng $(ABCD)$.

Trả lời: $(A'D, (ABCD)) = 45^\circ$; $(A'C, (ABCD)) \approx 35,26^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ nên AD là hình chiếu của $A'D$ trên mặt phẳng $(ABCD)$.

Suy ra $(A'D, (ABCD)) = (A'D, AD) = \hat{A'DA} = 45^\circ$ (do tam giác $AA'D$ vuông cân tại A).

b) Ta có: $AA' \perp (ABCD)$ nên AC là hình chiếu của $A'C$ trên mặt phẳng $(ABCD)$. Suy ra $(A'C, (ABCD)) = (A'C, AC) = \hat{A'CA}$.

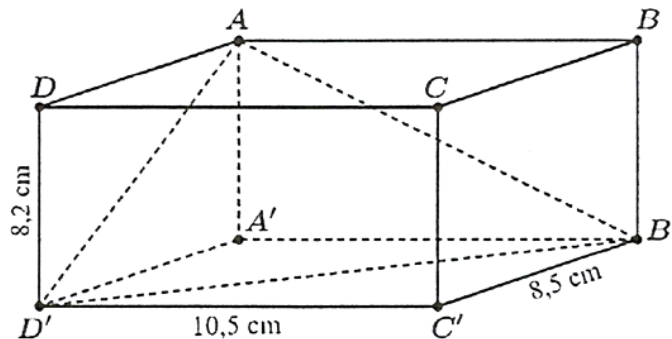
Giả sử cạnh hình lập phương là a thì $AA' = a, AC = a\sqrt{2}$.

Tam giác $AA'C$ vuông tại A có:

$$\tan \hat{A'CA} = \frac{AA'}{AC} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A'CA} \approx 35,26^\circ.$$

Vậy $(A'C, (ABCD)) = \hat{A'CA} \approx 35,26^\circ$

Câu 3: Một hộp phấn không bụi có dạng hình hộp chữ nhật, chiều cao hộp phấn bằng $8,2\text{ cm}$ và đáy của nó có hai kích thước là $8,5\text{ cm}; 10,5\text{ cm}$ (xem hình vẽ sau). Tìm góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$ (tính theo độ, làm tròn kết quả đến hàng phần chục).



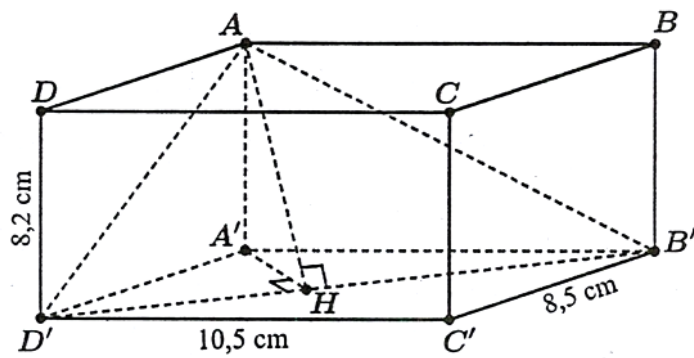
Trả lời: $\approx 51,14^\circ$

Lời giải

Trong mặt phẳng $(A'B'C'D')$, kẻ $A'H \perp B'D'$ tại H .

Ta có:
$$\begin{cases} B'D' \perp A'H \\ B'D' \perp AA' \text{ (do } AA' \perp (A'B'C'D')) \end{cases} \Rightarrow B'D' \perp (AA'H) \Rightarrow B'D' \perp AH$$

Do đó $\hat{AHA'}$ là góc phẳng nhị diện $[A, B'D', A']$.



Tam giác $A'B'D'$ vuông tại A' có đường cao $A'H$ nên

$$\frac{1}{A'H^2} = \frac{1}{A'B'^2} + \frac{1}{A'D'^2} \Rightarrow A'H = \frac{A'B' \cdot A'D'}{\sqrt{A'B'^2 + A'D'^2}} = \frac{357}{2\sqrt{730}}.$$

Tam giác AHA' vuông tại A' có:

$$\tan \angle AHA' = \frac{AA'}{A'H} = \frac{8,2}{\frac{357}{2\sqrt{730}}} \Rightarrow \angle AHA' \approx 51,14^\circ$$

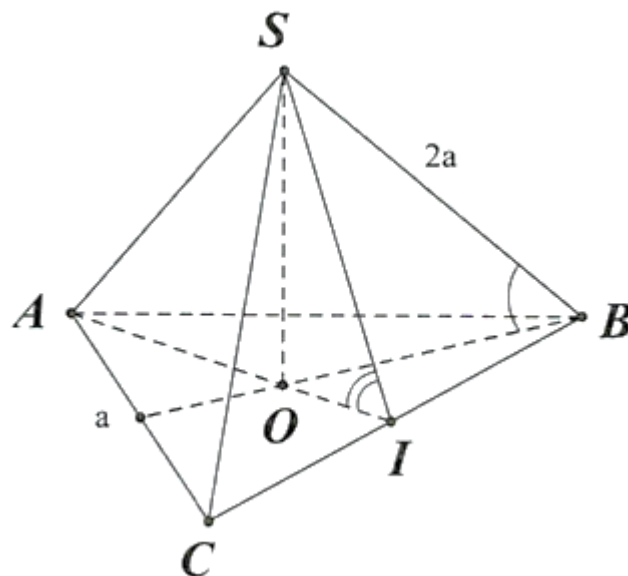
Câu 4: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O , cạnh a và cạnh bên là $2a$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy?

b) Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$?

Trả lời: a) $\approx 73,2^\circ$ b) $[S, BC, O] \approx 81,4^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O và SB cắt mp (ABC) tại B
 $\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên mp (ABC)

$$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, OB) = \widehat{SBO}$$

Ta có: $OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O :

$$\cos \widehat{SBO} = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \widehat{SBO} \approx 73,2^\circ$$

Vậy $(SB, (ABC)) \approx 73,2^\circ$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong } (ABC), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \widehat{SIO} \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

Ta có: $OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$

$$O: \tan \widehat{SIO} = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{33}a}{3}}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{11} \Rightarrow \widehat{SIO} \approx 81,4^\circ$$

Xét $\triangle SOI$ vuông tại

$$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 81,4^\circ$$

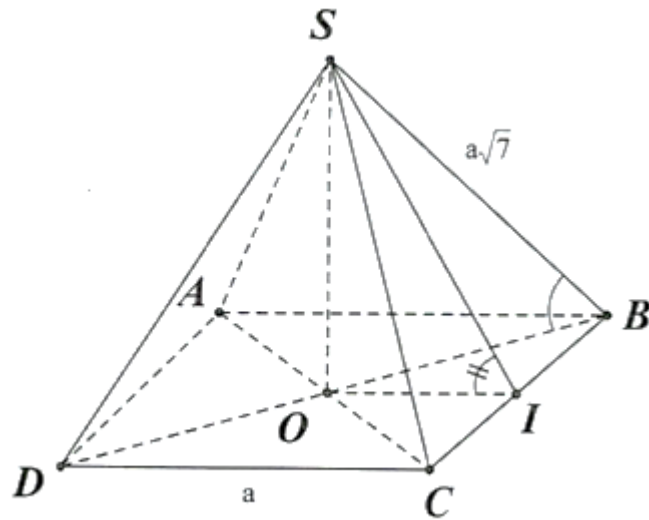
Câu 5: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy?

b) Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$?

Trả lời: a) $\approx 74,5^\circ$ b) $[S, BC, O] \approx 78,9^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $SO \perp (ABCD)$ tại O và SB cắt mp $(ABCD)$ tại B

$\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên mp $(ABCD)$

$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \angle SBO$

Ta có: $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O : $\cos \angle SBO = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \angle SBO \approx 74,5^\circ$

Vậy $(SB, (ABCD)) \approx 74,5^\circ$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ \text{Trong } (ABCD), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \angle SIO \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

Ta có: $OI = \frac{a}{2}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}a$

$\tan \angle SIO = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{26}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{26} \Rightarrow \angle SIO \approx 78,9^\circ$

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O

$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 78,9^\circ$

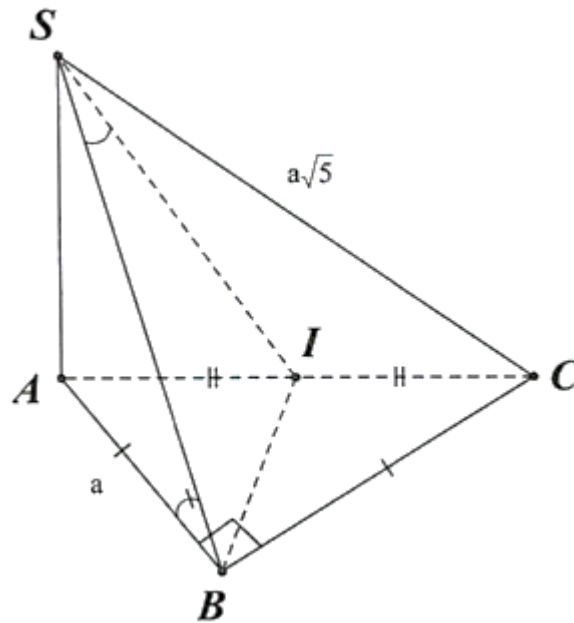
Câu 6: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a, SC = a\sqrt{5}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) ?

b) Tính góc phẳng nhị diện $[A, BC, S]$?

Trả lời: a) $(SB, (SAC)) \approx 20,7^\circ$ b) $[S, BC, A] = 60^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$ tại I và SB cắt mp (SAC) tại S
 $\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB trên mp (SAC)
 $\Rightarrow (SB, (SAC)) = (SB, SI) = \widehat{BSI}$

Ta có: $AC = a\sqrt{2} \Rightarrow BI = \frac{AC}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

Ta có: $SA = \sqrt{SC^2 - AC^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{3}a$

Ta lại có: $SB = \sqrt{SA^2 + AB^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a$

Xét $\triangle SBI$ vuông tại I : $\sin \widehat{BSI} = \frac{BI}{SB} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \widehat{BSI} \approx 20,7^\circ$

Vậy $(SB, (SAC)) \approx 20,7^\circ$.

b) Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$$\left\{ \begin{array}{l} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong } (ABC), AB \perp BC \Rightarrow [S, BC, A] = \hat{SBA} \\ \text{Trong } (SBC), SB \perp BC \end{array} \right.$$

Ta có:

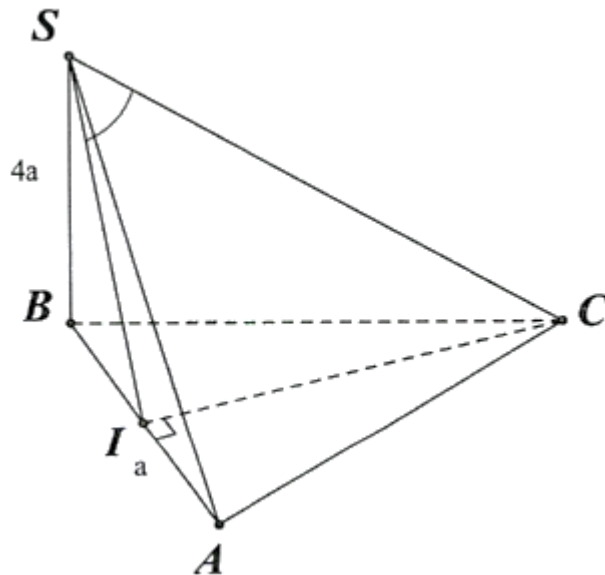
$$\text{Xét } \triangle SAB \text{ vuông tại } A: \tan \hat{SBA} = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \hat{SBA} = 60^\circ$$

$$\Rightarrow [S, BC, A] = 60^\circ$$

Câu 7: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SB \perp (ABC)$ và $SB = 4a$.
Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) ?

Trả lời: $(SC, (SAB)) \approx 12,1^\circ$

Lời giải



Kẻ $CI \perp AB \Rightarrow I$ là trung điểm AB

Ta có: $\left\{ \begin{array}{l} CI \perp AB \\ CI \perp SB \end{array} \right. \Rightarrow CI \perp (SAB)$ tại I và SC cắt mp (SAB) tại S

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mp (SAB)

$$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SI) = \hat{CSI}$$

$$\text{Ta có: } IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Ta có: } SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{(4a)^2 + a^2} = \sqrt{17}a$$

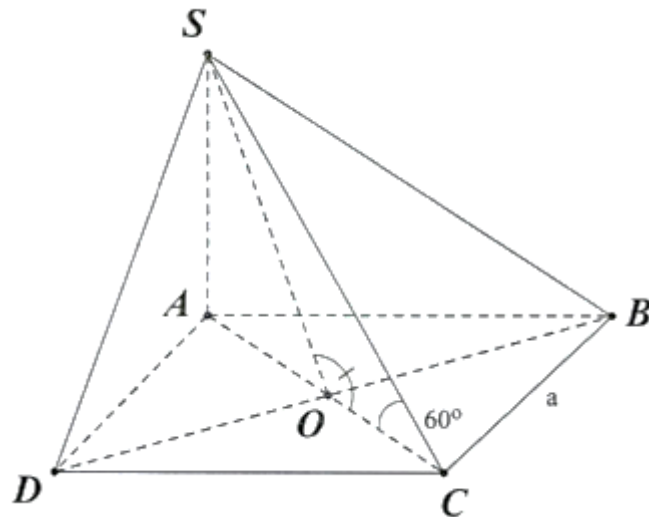
Xét $\triangle SCI$ vuông tại I : $\sin \angle CSI = \frac{CI}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{17}a} = \frac{\sqrt{51}}{34} \Rightarrow \angle CSI \approx 12,1^\circ$

Vậy $(SC, (SAB)) \approx 12,1^\circ$.

Câu 8: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $a, SA \perp (ABCD)$. Biết góc giữa SC và mặt phẳng $(ABCD)$ là 60° . Tính góc phẳng nhị diện $[S, BD, C]$?

Trả lời: $\angle SOC = 106,1^\circ$

Lời giải



Ta có: $SA \perp (ABCD)$ tại A và SC cắt mp $(ABCD)$ tại C

$\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên mp $(ABCD)$

$\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA = 60^\circ$

Ta có: $\Rightarrow SA = AC \cdot \tan 60^\circ = a\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}a$

Ta có: $\begin{cases} BD \perp SA \\ BD \perp AC \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} (SBD) \cap (CBD) = BD \\ \text{Trong } (CBD), CO \perp BD \Rightarrow [S, BD, C] = \angle SOC \\ \text{Trong } (SBC), SO \perp BD \end{cases}$

$$A: \tan \angle SOA = \frac{SA}{AO} = \frac{a\sqrt{6}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = 2\sqrt{3} \Rightarrow \angle SOA = 73,9^\circ$$

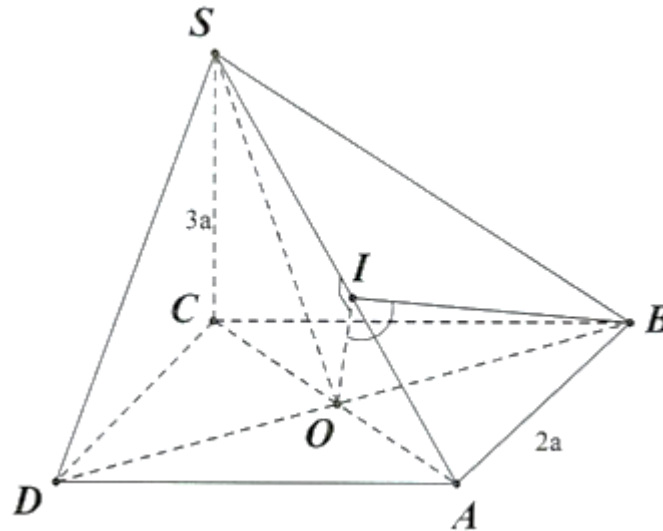
Xét $\triangle SAO$ vuông tại

$\Rightarrow \angle SOC = 106,1^\circ$

Câu 9: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a, SC \perp (ABCD)$ và $SC = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[B, SA, C]$?

Trả lời: $\approx 54^\circ$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BO \perp SA \\ BO \perp AC \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} (SBA) \cap (SAC) = SA \\ \text{Trong } (SAC), OI \perp SA \Rightarrow [B, SA, C] = [B, SA, O] = \widehat{BIO} \\ \text{Trong } (SBA), BI \perp SA \end{cases}$

Ta có: $\Delta IAO \sim \Delta CAS \Rightarrow \frac{OI}{SC} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow OI = \frac{OA \cdot SC}{SA} = \frac{\sqrt{2}a \cdot 3a}{\sqrt{(3a)^2 + (2\sqrt{2}a)^2}} = \frac{3\sqrt{34}}{17}a$

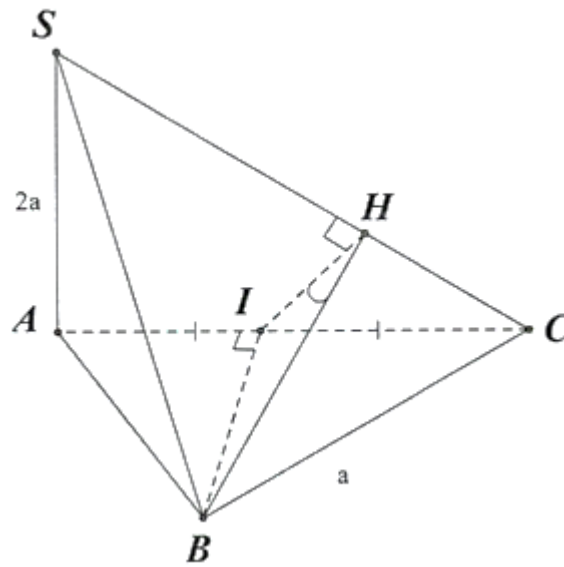
$$O : \tan \widehat{BIO} = \frac{BO}{OI} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{34}}{17}a} = \frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow \widehat{BIO} \approx 54^\circ$$

Xét ΔBOI vuông tại

Câu 10: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SA = 2a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A, SC, B]$?

Trả lời: $\approx 62,7^\circ$

Lời giải



Kẻ $BI \perp AC$

Ta có: $\begin{cases} BI \perp AC \\ BI \perp SA \end{cases} \Rightarrow BI \perp (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} (SAC) \cap (SBC) = SC \\ \text{Trong } (SAC), IH \perp SC \Rightarrow [A, SC, B] = \angle HIB \\ \text{Trong } (SBC), BH \perp SC \end{cases}$

Ta có:

$$\Delta HCI \sim \Delta ACS \Rightarrow \frac{HI}{SA} = \frac{CI}{SC} \Rightarrow HI = \frac{SA \cdot CI}{SC} = \frac{2a \cdot \frac{a}{2}}{\sqrt{(2a)^2 + a^2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}a$$

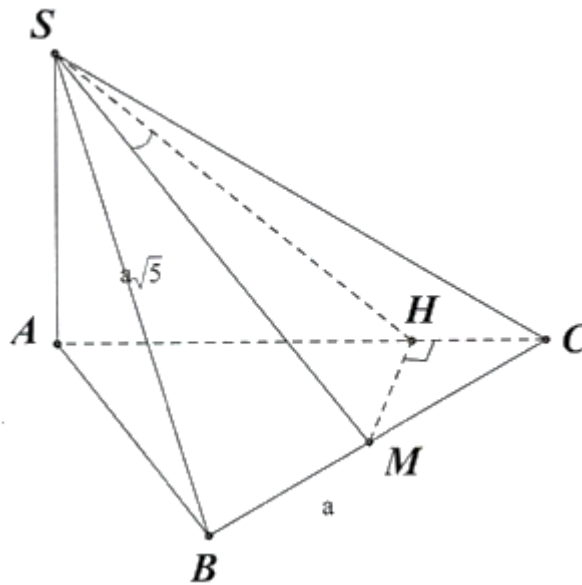
$$I: \tan \angle BHI = \frac{BI}{HI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{5}}{5}a} = \frac{\sqrt{15}}{2} \Rightarrow \angle BHI \approx 62,7^\circ$$

Xét ΔBH vuông tại

Câu 11: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (SAC) ?

Trả lời: $\approx 11,5^\circ$

Lời giải



Kẻ $MH \perp AC$

Ta có: $MH \perp SA \Rightarrow MH \perp (SAC)$ tại H và SM cắt mp (SAC) tại S

$\Rightarrow SH$ là hình chiếu của SM trên mp (SAC)

$\Rightarrow (SM, (SAC)) = (SM, SH) = \angle MSH$

Ta có: $HM = MC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$HC = MC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{4} \Rightarrow AH = AC - HC = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{4}a$

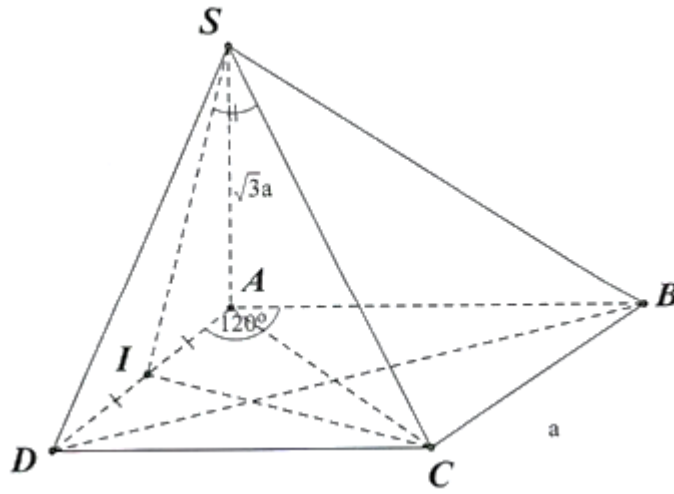
$$\tan \angle MSH = \frac{HM}{SH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{73}a}{4}} = \frac{\sqrt{219}}{73} \Rightarrow \angle MSH \approx 11,5^\circ$$

Xét $\triangle SHM$ vuông tại

Câu 12: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thoi cạnh a , $\angle BAD = 120^\circ$, $SA \perp (ABCD)$ và $SA = \sqrt{3}a$. Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAD) ?

Trả lời: $\approx 64,3^\circ$

Lời giải



Xét $\triangle ADC$ cân tại D , có $\widehat{D} = 60^\circ$ nên $\triangle ADC$ đều.

Kẻ $CI \perp AD$

Ta có: $CI \perp SA \Rightarrow CI \perp (SAD)$ tại I và SC cắt mp (SAD) tại $S \Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên mp (SAD)

$$\Rightarrow (SC, (SAD)) = (SC, SI) = \widehat{SCI}$$

Ta có:

$$SI = \sqrt{SA^2 + AI^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

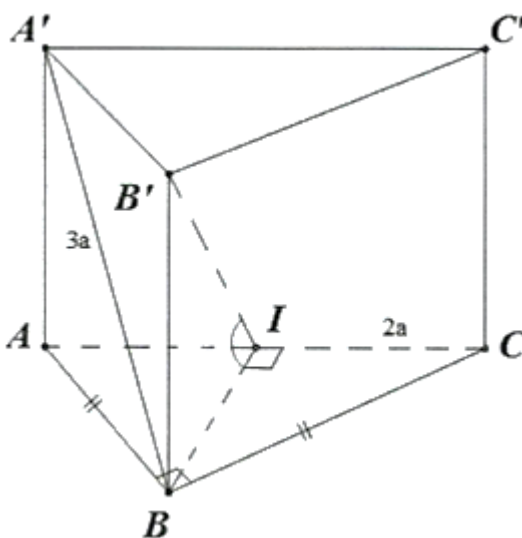
$$\tan \widehat{SCI} = \frac{SI}{IC} = \frac{\frac{a\sqrt{13}}{2}}{\frac{\sqrt{3}a}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{3} \Rightarrow \widehat{SCI} \approx 64,3^\circ$$

Xét $\triangle SCI$ vuông tại

Câu 13: Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B , $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[B', AC, B]$?

Trả lời: $69,3^\circ$

Lời giải



Ta có:
$$\begin{cases} (B'AC) \cap (ABC) = AC \\ \text{Trong } (ABC), BI \perp AC \Rightarrow [A, SC, B] = \hat{B}IB \\ \text{Trong } (B'AC), B'I \perp AC \end{cases}$$

Ta có:
$$BI = \frac{AC}{2} = a$$

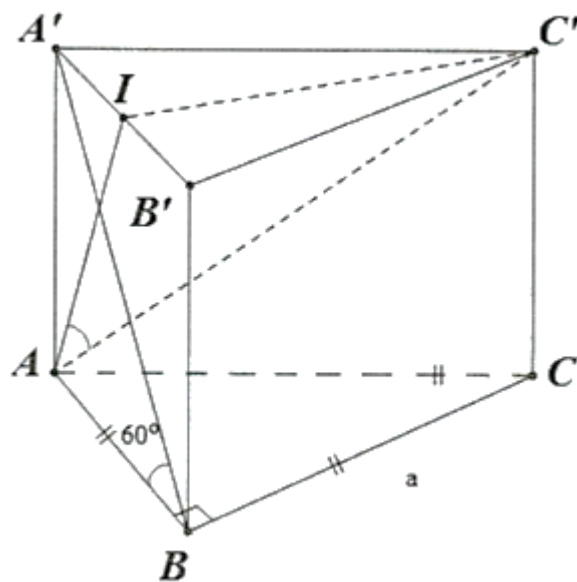
$$B'B = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a$$

Xét $\triangle BB'I$ vuông tại B' :
$$\tan \hat{B}IB = \frac{B'B}{BI} = \frac{\sqrt{7}a}{a} = \sqrt{7} \Rightarrow \hat{B}IB \approx 69,3^\circ$$

Câu 14: Cho hình lăng trụ đều $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy cạnh a , góc giữa đường thẳng $A'B$ và mặt phẳng (ABC) là 60° . Tính góc giữa đường thẳng $C'A$ và mặt phẳng $(AA'B'B)$?

Trả lời: $\approx 25,7^\circ$

Lời giải



Kẻ $C'I \perp A'B'$

Ta có: $C'I \perp A'A \Rightarrow C'I \perp (AA'B'B)$ tại I và $C'A$ cắt mp $(AA'B'B)$ tại A .

$\Rightarrow AI$ là hình chiếu của $C'A$ trên mp $(AA'B'B)$

$$\Rightarrow (C'A, (AA'B'B)) = (C'A, AI) = \hat{C'AI}$$

Ta có: $A'A = AB \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{3}a$

$$AI = \sqrt{A'A^2 + A'I^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{13}}{2}a$$

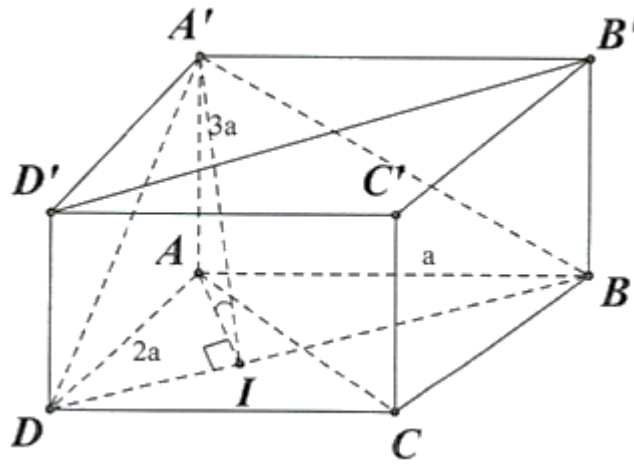
$$I: \tan \hat{C'AI} = \frac{C'I}{AI} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{13}a}{2}} = \frac{\sqrt{39}}{13} \Rightarrow \hat{C'AI} \approx 25,7^\circ$$

Xét $\Delta C'AI$ vuông tại

Câu 15: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$?

Trả lời: $\approx 73,4^\circ$

Lời giải



Kẻ $AI \perp BD$. Mà $BD \perp AA' \Rightarrow BD \perp (AA'I)$

$$\text{Ta có: } \begin{cases} (A'BD) \cap (ABD) = BD \\ \text{Trong } (ABD), AI \perp BD \\ \text{Trong } (A'BD), A'I \perp BD \end{cases}$$

$$\Rightarrow [A', BD, A] = \square_{A'I}A$$

$$AI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AB^2} + \frac{1}{AD^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{(2a)^2}}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}a$$

Ta có:

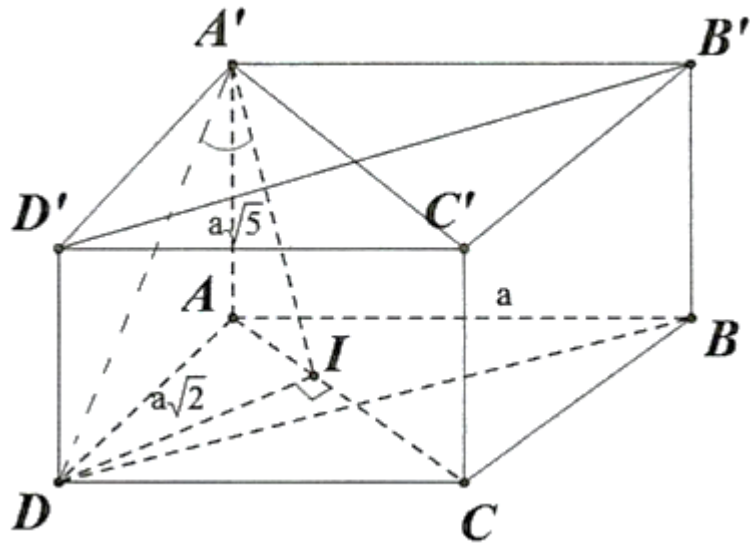
$$A: \tan \square_{A'I}A = \frac{A'A}{AI} = \frac{a\sqrt{3}}{\frac{2\sqrt{5}}{5}a} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \square_{A'I}A \approx 73,4^\circ$$

Xét $\triangle AA'I$ vuông tại

Câu 16: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD.A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = a\sqrt{2}, AA' = a\sqrt{5}$. Tính góc giữa đường thẳng $A'D$ và mặt phẳng $(AA'C'C)$.

Trả lời: $\approx 18^\circ$

Lời giải



Kẻ $DI \perp AC$. Mà $DI \perp AA' \Rightarrow DI \perp (AA'C'C)$ tại I và $A'D$ cắt mp $(AA'C'C)$ tại A'

$\Rightarrow A'I$ là hình chiếu của DA' trên mp $(AA'C'C)$

$\Rightarrow (DA', (AA'C'C)) = (DA', A'I) = \angle DA'I$

$$DI = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{AD^2} + \frac{1}{DC^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(a\sqrt{2})^2} + \frac{1}{a^2}}} = \frac{\sqrt{6}}{3}a$$

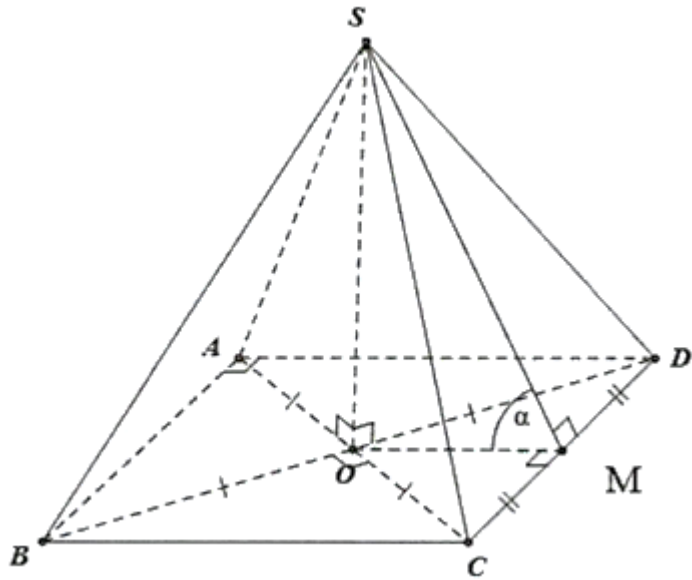
$$A'D = \sqrt{AA'^2 + AD^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 + (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a$$

Xét $\triangle DA'I$ vuông tại I : $\sin \angle A'DI = \frac{DI}{A'D} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{3}a}{\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{42}}{21} \Rightarrow \angle A'DI \approx 18^\circ$

Câu 17: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O . M là trung điểm CD . Biết $SA = SC = SB = SD = a\sqrt{2}$, đường tròn ngoại tiếp $ABCD$ có bán kính bằng a . Gọi α là góc giữa SM và mặt đáy. Tính $\tan \alpha$?

Trả lời: $\sqrt{2}$

Lời giải



Vì các tam giác SAC cân tại S nên $SO \perp AC$;

Tương tự $SO \perp BD$

$$\Rightarrow SO \perp (ABCD)$$

$\Rightarrow OM$ là hình chiếu của SM lên $(ABCD)$

$$\Rightarrow \overline{(SM; (ABCD))} = (SM; OM) = \hat{SMO}$$

Xét tam giác SMO vuông tại O , có:

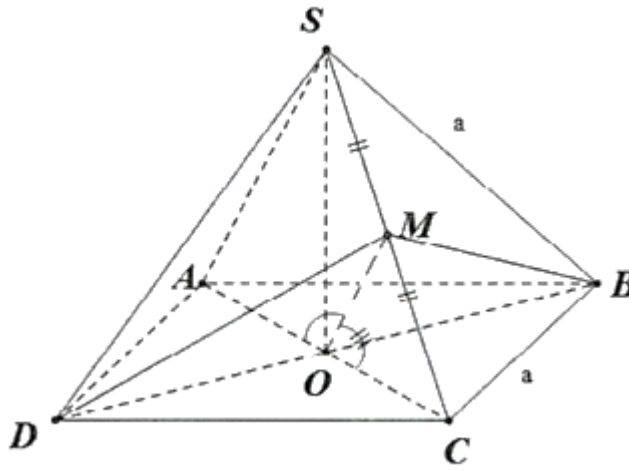
$$OM = \frac{a\sqrt{2}}{2}; SO = a$$

$$\Rightarrow \tan \alpha = \tan \hat{SMO} = \frac{SO}{OM} = \frac{a}{\frac{a\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}$$

Câu 18: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có tất cả các cạnh bằng a . Gọi M là trung điểm SC . Tính góc phẳng nhị diện $[M, BD, A]$?

Trả lời: 135°

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BD \perp AC \\ BD \perp SO \end{cases} \Rightarrow BD \perp (SAC) \Rightarrow BD \perp OM$

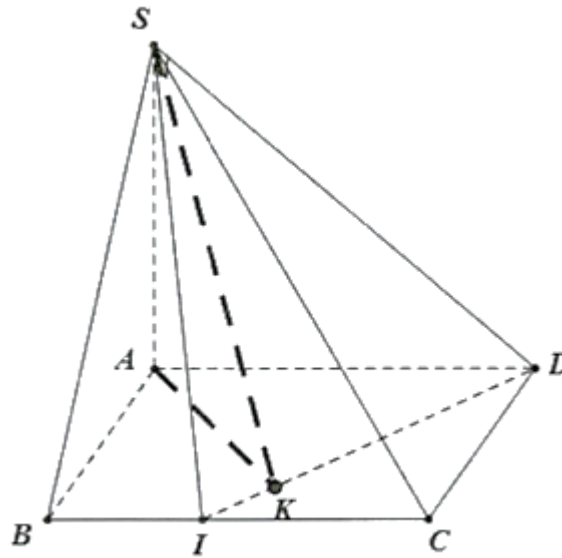
Ta có: $\begin{cases} (MBD) \cap (ABD) = BD \\ \text{Trong}(MBD), MO \perp BD \Rightarrow [M, BD, A] = \angle MOA \\ \text{Trong}(ABD), AO \perp BD \end{cases}$

Xét $\triangle MOC$ có: $OM = MC = \frac{a}{2}, OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ nên $\triangle MOC$ vuông cân tại M
 $\Rightarrow \angle MOC = 45^\circ \Rightarrow \angle MOA = 135^\circ$

Câu 19: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình vuông tâm O cạnh $2a$. $SA = a$ và vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$. Trên BC lấy điểm I sao cho tam giác SDI vuông tại S . Biết góc phẳng nhị diện $[S, DI, A]$ là 60° . Tính độ dài SI .

Trả lời: $\frac{2\sqrt{55}a}{11}$

Lời giải



Từ A dựng $AK \perp ID, (K \in ID) \Rightarrow ID \perp (SAK) \Rightarrow ID \perp SK$

Suy ra góc phẳng nhị diện $[S, DI, A]$ là góc $\angle_{AKS} = 60^\circ$

Tam giác SAK vuông tại A , $\sin \angle KSA = \frac{SA}{SK}$

$$\Rightarrow SK = \frac{SA}{\sin 60^\circ} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$SD = \sqrt{a^2 + 4a^2} = a\sqrt{5}$$

Tam giác SID vuông tại S, SK là đường cao

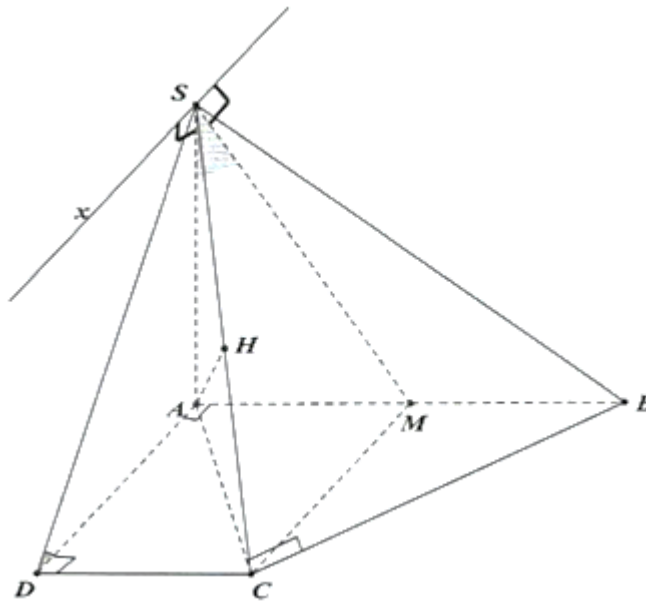
$$\frac{1}{SK^2} = \frac{1}{SI^2} + \frac{1}{SD^2} \Leftrightarrow \frac{1}{SI^2} = \frac{1}{SK^2} - \frac{1}{SD^2}$$

$$\Leftrightarrow SI = \frac{2\sqrt{55}a}{11}$$

Câu 20: Cho hình chóp $S.ABCD$ có SA vuông góc với đáy $ABCD$, đáy là hình thang vuông tại A , có đáy lớn $AB, AB=2a, AD=DC=a$. Vẽ $AH \perp SC, H \in SC$ và M là trung điểm của AB . Biết $[S, DC, B] = 60^\circ$. Gọi S_x là giao tuyến của hai mặt phẳng (SAD) và (SMC) . Tính $[A, S_x, M]$?

Trả lời: 30°

Lời giải



Ta có $AD \parallel CM$ (dễ dàng chứng minh được).

Giao tuyến của $\text{mp}(SAD)$ và $\text{mp}(SCM)$:

$$\begin{cases} S \in (SAD) \cap (SCM) \\ AD \parallel CM \\ AD \subset (SAD), CM \subset (SCM) \end{cases}$$

$$\Rightarrow (SAD) \cap (SCM) = Sx (Sx \parallel AD \parallel CM)$$

Ta có $DA \perp SA (DA \perp (SAB)) \Rightarrow SA \perp Sx$

$CM \perp (SAB)$ (vì $CM \parallel AD$) $\Rightarrow SM \perp CM \Rightarrow SM \perp Sx$

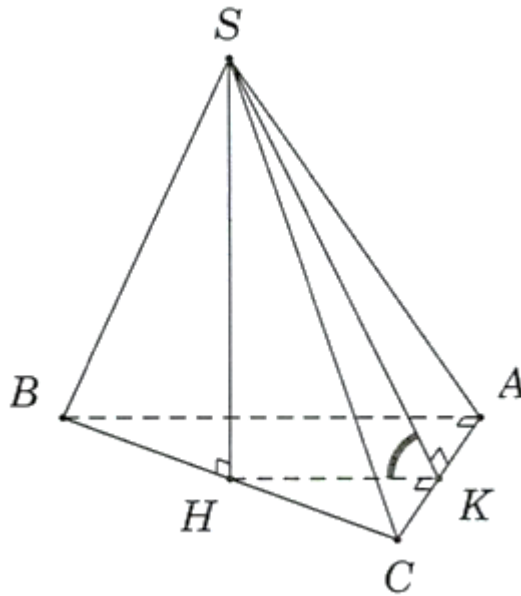
Vậy $[A, Sx, M] = \angle ASM$.

$$\tan \angle ASM = \frac{AM}{SA} = \frac{a}{a\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \angle ASM = 30^\circ$$

Câu 21: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy ABC là tam giác vuông tại A , $\angle ABC = 60^\circ$, tam giác SBC là tam giác đều có bằng cạnh $2a$ và nằm trong mặt phẳng vuông với đáy. Gọi φ là góc phẳng nhị diện $[S, AC, B]$. Tính $\tan \varphi$?

Trả lời: $2\sqrt{3}$

Lời giải



Gọi H là trung điểm của BC , suy ra $SH \perp BC \Rightarrow SH \perp (ABC)$.

Gọi K là trung điểm AC , suy ra $HK \parallel AB$ nên $HK \perp AC$.

Ta có
$$\begin{cases} AC \perp HK \\ AC \perp SH \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow AC \perp SK$$

Do đó $[S, AC, B] = (SK, HK) = \angle SKH$

Tam giác vuông ABC , có $AB = BC \cdot \cos \angle ABC = a$

$$\Rightarrow HK = \frac{1}{2} AB = \frac{a}{2}$$

Tam giác vuông SHK , có $\tan \angle SKH = \frac{SH}{HK} = 2\sqrt{3}$.

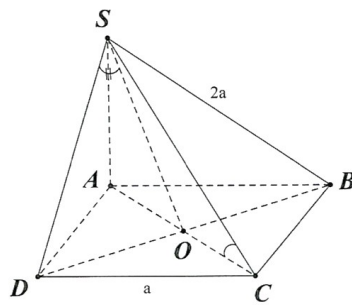
Câu 22: Cho hình chóp $S \cdot ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh a , SA vuông góc với đáy và $SB = 2a$. Tính:

a) Góc giữa đường thẳng SC và $(ABCD)$?

b) Góc giữa SD và (SAC) ?

Trả lời: $(SC, (ABCD)) \approx 50,8^\circ$; $(SD, (SAC)) \approx 20,7^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $SA \perp (ABCD)$ tại A và SC cắt $mp(ABCD)$ tại C
 $\Rightarrow AC$ là hình chiếu của SC trên $mp(ABCD)$
 $\Rightarrow (SC, (ABCD)) = (SC, AC) = \angle SCA$

Ta có: $SA = \sqrt{SB^2 - AB^2} = \sqrt{(2a)^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

Xét $\triangle SAC$ vuông tại A :

$$\tan \angle SCA = \frac{SA}{AC} = \frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \angle SCA \approx 50,8^\circ$$

Vậy $(SC, (ABCD)) \approx 50,8^\circ$.

b) Ta có: $\begin{cases} DO \perp AC \\ DO \perp SA \end{cases} \Rightarrow DO \perp (SAC)$ tại O và SD cắt $mp(SAC)$ tại S

$\Rightarrow SO$ là hình chiếu của SD trên $mp(SAC)$

$$\Rightarrow (SD, (SAC)) = (SD, SO) = \angle DSO$$

Ta có: $SD = SB = 2a$ (vì $\triangle SAB = \triangle SAD$)

Xét $\triangle SDO$ vuông tại O : $\sin \angle DSO = \frac{DO}{SD} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{2a} = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow \angle DSO \approx 20,7^\circ$

Vậy $(SD, (SAC)) \approx 20,7^\circ$.

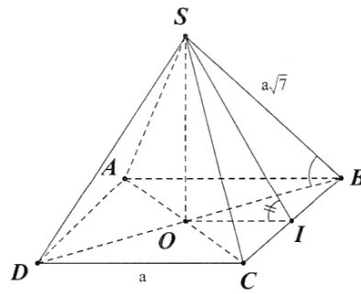
Câu 23: Cho hình chóp đều $S.ABCD$ có đáy tâm O cạnh a và cạnh bên là $a\sqrt{7}$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy?

b) Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$?

Trả lời: a) $\approx 74,5^\circ$; b) $[S, BC, O] \approx 78,9^\circ$.

Lời giải



a) Ta có: $SO \perp (ABCD)$ tại O và SB cắt $mp(ABCD)$ tại B

$\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên $mp(ABCD)$

$$\Rightarrow (SB, (ABCD)) = (SB, OB) = \angle SBO$$

Ta có: $OB = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O :

$$\cos \angle SBO = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{2}a}{2}}{\sqrt{7}a} = \frac{\sqrt{14}}{14} \Rightarrow \angle SBO \approx 74,5^\circ \Rightarrow (SB, (ABCD)) \approx 74,5^\circ.$$

b) Ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABCD) = BC \\ \text{Trong } (ABCD), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \angle SIO \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

Ta có: $OI = \frac{a}{2}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(a\sqrt{7})^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}a$

$$\tan \angle SIO = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{26}a}{2}}{\frac{a}{2}} = \sqrt{26} \Rightarrow \angle SIO \approx 78,9^\circ$$

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O :

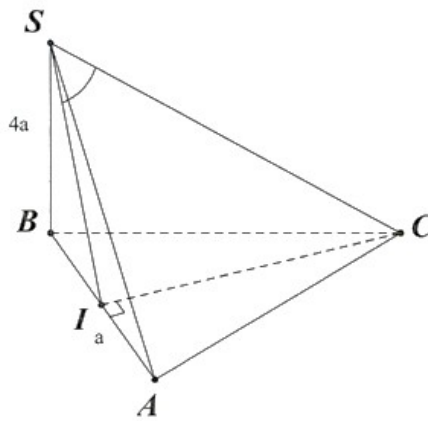
$$\Rightarrow [S, BC, O] \approx 78,9^\circ.$$

Câu 24: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SB \perp (ABC)$ và $SB = 4a$.

Tính góc giữa đường thẳng SC và mặt phẳng (SAB) ?

Trả lời: $(SC, (SAB)) \approx 12,1^\circ$

Lời giải



Kẻ $CI \perp AB \Rightarrow I$ là trung điểm AB

Ta có: $\begin{cases} CI \perp AB \\ CI \perp SB \end{cases} \Rightarrow CI \perp (SAB)$ tại I và SC cắt $mp(SAB)$ tại S

$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SC trên $mp(SAB)$

$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SI) = \angle SI$

Ta có: $IC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Ta có: $SC = \sqrt{SB^2 + BC^2} = \sqrt{(4a)^2 + a^2} = \sqrt{17}a$

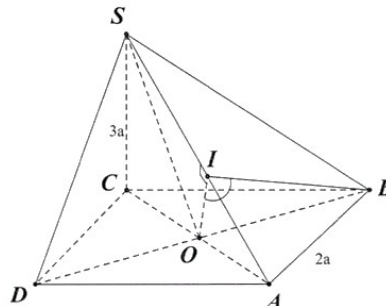
Xét $\triangle SCI$ vuông tại I : $\sin \angle SI = \frac{CI}{SC} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{\sqrt{17}a} = \frac{\sqrt{51}}{34} \Rightarrow \angle SI \approx 12,1^\circ$

Vậy $(SC, (SAB)) \approx 12,1^\circ$.

Câu 25: Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình vuông cạnh $2a, SC \perp (ABCD)$ và $SC = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[B, SA, C]$?

Trả lời: $\approx 54^\circ$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} BO \perp SC \\ BO \perp AC \end{cases} \Rightarrow BO \perp (SAC)$

Ta có: $\begin{cases} (SBA) \cap (SAC) = SA \\ \text{Trong}(SAC), OI \perp SA \Rightarrow [B, SA, C] = [B, SA, O] = \hat{B}IO \\ \text{Trong}(SBA), BI \perp SA \end{cases}$

Ta có: $\Delta IAO \sim \Delta CAS \Rightarrow \frac{OI}{SC} = \frac{OA}{SA} \Rightarrow OI = \frac{OA \cdot SC}{SA} = \frac{\sqrt{2}a \cdot 3a}{\sqrt{(3a)^2 + (2\sqrt{2}a)^2}} = \frac{3\sqrt{34}}{17}a$

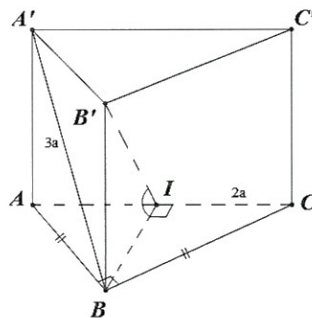
$$\tan \hat{B}IO = \frac{BO}{OI} = \frac{a\sqrt{2}}{\frac{3\sqrt{34}}{17}a} = \frac{\sqrt{17}}{3} \Rightarrow \hat{B}IO \approx 54^\circ$$

Xét ΔBOI vuông tại O:

Câu 26: Cho hình lăng trụ đứng $ABC \cdot A'B'C'$ có đáy là tam giác vuông cân tại B, $AC = 2a$ và $A'B = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[B', AC, B]$?

Trả lời: $\approx 69,3^\circ$

Lời giải



Ta có: $\begin{cases} (B'AC) \cap (ABC) = AC \\ \text{Trong}(ABC), BI \perp AC \Rightarrow [A, SC, B] = \hat{B}IB \\ \text{Trong}(B'AC), B'I \perp AC \end{cases}$

Ta có: $BI = \frac{AC}{2} = a$

$$B'B = \sqrt{(3a)^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{7}a$$

Xét $\Delta BB'I$ vuông tại I: $\tan \hat{B}IB = \frac{B'B}{BI} = \frac{\sqrt{7}a}{a} = \sqrt{7} \Rightarrow \hat{B}IB \approx 69,3^\circ$

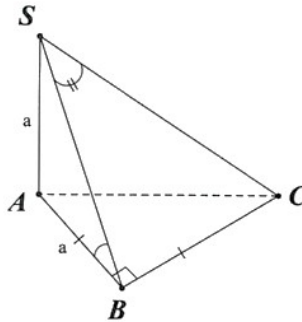
Câu 27: Cho hình chóp $S.ABC$ có SA vuông góc với đáy. ABC là tam giác vuông cân tại B. Cho độ dài các cạnh $SA = AB = a$. Tính:

a) Góc giữa đường thẳng SB và (ABC) ?

b) Góc giữa SC và (SAB) ?

Trả lời: $(SB, (ABC)) = 45^\circ$; $(SC, (SAB)) \approx 35,3^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $SA \perp (ABC)$ tại A và SB cắt $mp(ABC)$ tại B

$\Rightarrow AB$ là hình chiếu của SB trên $mp(ABC)$

$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, AB) = \angle SBA$.

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A : $\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a}{a} = 1 \Rightarrow \angle SBA = 45^\circ$

Vậy $(SB, (ABC)) = 45^\circ$.

b) Ta có: $\begin{cases} CB \perp AB \\ CB \perp SA \end{cases} \Rightarrow CB \perp (SAB)$

tại B và SC cắt $mp(SAB)$ tại S

$\Rightarrow SB$ là hình chiếu của SC trên $mp(SAB)$

$\Rightarrow (SC, (SAB)) = (SC, SB) = \angle BSC$

Ta có: $SB = a\sqrt{2}$ (vì tam giác SAB vuông cân tại A)

Xét $\triangle SBC$ vuông tại B : $\tan \angle BSC = \frac{CB}{SB} = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \angle BSC \approx 35,3^\circ$.

Vậy $(SC, (SAB)) \approx 35,3^\circ$.

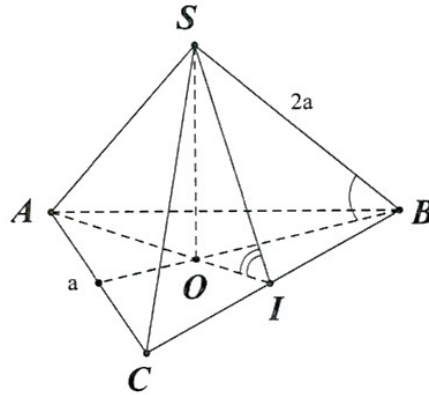
Câu 28: Cho hình chóp tam giác đều $S.ABC$ có đáy tâm O , cạnh a và cạnh bên là $2a$.

a) Tính góc giữa cạnh bên và mặt phẳng đáy?

b) Tính góc phẳng nhị diện $[S, BC, O]$?

Trả lời: a) $\approx 73,2^\circ$ b) $[S, BC, O] \approx 81,4^\circ$

Lời giải



a) Ta có: $SO \perp (ABC)$ tại O và SB cắt $mp(ABC)$ tại B

$\Rightarrow OB$ là hình chiếu của SB trên $mp(ABC)$

$$\Rightarrow (SB, (ABC)) = (SB, OB) = \angle SBO$$

Ta có:
$$OB = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Xét $\triangle SOB$ vuông tại O :
$$\cos \angle SBO = \frac{BO}{SB} = \frac{\frac{\sqrt{3}a}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6} \Rightarrow \angle SBO \approx 73,2^\circ$$

Vậy $(SB, (ABC)) \approx 73,2^\circ$.

b) Ta có:
$$\begin{cases} (SBC) \cap (ABC) = BC \\ \text{Trong } (ABC), OI \perp BC \Rightarrow [S, BC, O] = \angle SIO \\ \text{Trong } (SBC), SI \perp BC \end{cases}$$

Ta có:
$$OI = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}, SO = \sqrt{SB^2 - OB^2} = \sqrt{(2a)^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{33}}{3}a$$

Xét $\triangle SOI$ vuông tại O :

$$\tan \angle SIO = \frac{SO}{OI} = \frac{\frac{\sqrt{33}}{3}a}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = 2\sqrt{11} \Rightarrow \angle SIO \approx 81,4^\circ \Rightarrow [S, BC, O] \approx 81,4^\circ$$

Câu 29: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác vuông cân tại $B, SA \perp (ABC)$. Biết $AB = a, SC = a\sqrt{5}$.

a) Tính góc giữa đường thẳng SB và mặt phẳng (SAC) ?

Trả lời: $(SB, (SAC)) \approx 20,7^\circ$; $[S, BC, A] = 60^\circ$

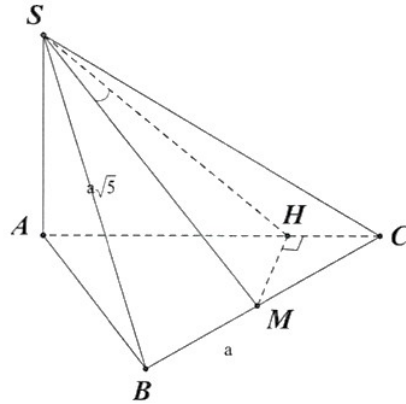
$\Rightarrow SI$ là hình chiếu của SB trên $mp(SAC)$

Xét $\triangle SAB$ vuông tại A : $\tan \angle SBA = \frac{SA}{AB} = \frac{a\sqrt{3}}{a} = \sqrt{3} \Rightarrow \angle SBA = 60^\circ \Rightarrow \angle S, BC, A = 60^\circ$

Câu 30: Cho hình chóp $S.ABC$ có đáy là tam giác đều cạnh $a, SA \perp (ABC)$ và $SB = a\sqrt{5}$. Gọi M là trung điểm BC . Tính góc giữa đường thẳng SM và mặt phẳng (SAC) ?

Trả lời: $\approx 11,5^\circ$

Lời giải



Kẻ $MH \perp AC$

Ta có: $MH \perp SA \Rightarrow MH \perp (SAC)$ tại H và SM cắt $mp(SAC)$ tại S

$\Rightarrow SH$ là hình chiếu của SM trên $mp(SAC)$

$\Rightarrow (SM, (SAC)) = (SM, SH) = \angle MSH$

Ta có: $HM = MC \cdot \sin 60^\circ = \frac{a}{2} \cdot \sin 60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{4}$;

$HC = MC \cdot \cos 60^\circ = \frac{a}{4} \Rightarrow AH = AC - HC = a - \frac{a}{4} = \frac{3a}{4}$

Ta có: $SH = \sqrt{SA^2 + AH^2} = \sqrt{(a\sqrt{5})^2 - a^2 + \left(\frac{3a}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{73}}{4}a$

$$\tan \angle MSH = \frac{HM}{SH} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{73}a}{4}} = \frac{\sqrt{219}}{73} \Rightarrow \angle MSH \approx 11,5^\circ$$

Xét $\triangle SHM$ vuông tại H .

Câu 31: Cho hình hộp chữ nhật $ABCD \cdot A'B'C'D'$ có $AB = a, AD = 2a, AA' = 3a$. Tính góc phẳng nhị diện $[A', BD, A]$?

Trả lời: $\approx 73,4^\circ$

Lời giải

