

ĐS6. CHUYÊN ĐỀ 2 - LŨY THỪA VỚI SỐ MŨ TỰ NHIÊN

CHỦ ĐỀ 6: TÌM CHỮ SỐ TẬN CÙNG

PHẦN I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Tìm 1 chữ số tận cùng

Tính chất 1:

- a) Các số có chữ số tận cùng là $0, 1, 5, 6$ khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- b) Các số có chữ số tận cùng là $4, 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc lẻ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.
- c) Các số có chữ số tận cùng là $3, 7, 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n (n \in \mathbb{N})$ thì chữ số tận cùng là 1.
- d) Các số có chữ số tận cùng là $2, 4, 8$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n (n \in \mathbb{N})$ thì chữ số tận cùng là 6.

Chú ý: Muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $X = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a :

- Nếu chữ số tận cùng của a là $0, 1, 5, 6$ thì X cũng có chữ số tận cùng là $0, 1, 5, 6$.
- Nếu chữ số tận cùng của a là $3, 7, 9$:

Phân tích: $a^m = a^{4n+r} = a^{4n} \cdot a^r$ với $r = 0, 1, 2, 3$

Từ tính chất 1c $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của X chính là chữ số tận cùng của a^r .

- Nếu chữ số tận cùng của a là $2, 4, 8$: cũng như trường hợp trên

Từ tính chất 1d $\Rightarrow$ chữ số tận cùng của X chính là chữ số tận cùng của $6a^r$.

Tính chất 2:

Một số tự nhiên bất kì, khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+1 (n \in \mathbb{N})$ thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

Chữ số tận cùng của một tổng các lũy thừa được xác định bằng cách tính tổng các chữ số tận cùng của từng lũy thừa trong tổng.

Tính chất 3:

- a) Số có chữ số tận cùng là 3 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 7; số có chữ số tận cùng là 7 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 3.
- b) Số có chữ số tận cùng là 2 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 8; số có chữ số tận cùng là 8 khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ có chữ số tận cùng là 2.
- c) Các số có chữ số tận cùng là $0, 1, 4, 5, 6, 9$ khi nâng lên lũy thừa bậc $4n+3$ sẽ không thay đổi chữ số tận cùng.

Tính chất 4:

Nếu $a \not\equiv 5 \pmod{5}$ và $(a, 5) = 1$ thì $a^{100} - 1$ chia hết cho 125.

Chứng minh:

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}, a^{40}, a^{60}, a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1

Đó $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5.

Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

* Phương pháp dùng cấu tạo số để tìm chữ số tận cùng của số $A = n^k$ với $n, k \in \mathbb{N}$.

- Giả sử $A = 10q + r$. Khi đó, $A^k = (10q + r)^k = 10^k p + r^k$ với $r \in \mathbb{Z}; 0 \leq r < 10$

Suy ra, chữ số cuối cùng của A^k chính là chữ số cuối cùng của số r^k .

- Nếu $A = 100a + \overline{bc} = \overline{abc}$ thì $\overline{bc}$ là hai chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 1000a + \overline{bcd} = \overline{abcd}$ thì $\overline{bcd}$ là ba chữ số cuối cùng của A .

- Nếu $A = 10^m a_m + \overline{a_{m-1} \dots a_0} = \overline{a_m \dots a_1 a_0}$ thì $\overline{a_{m-1} \dots a_0}$ là m chữ số cuối cùng của A .

2. Tìm hai chữ số tận cùng

Việc tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên X chính là việc tìm số dư của phép chia X cho 100.

Phương pháp tìm hai chữ số tận cùng của số tự nhiên $X = a^n$:

Trước hết, ta có nhận xét sau:

$$2^{20} \equiv 76 \pmod{100}$$

$$3^{20} \equiv 01 \pmod{100}$$

$$6^5 \equiv 76 \pmod{100}$$

$$7^4 \equiv 01 \pmod{100}$$

Mà: $76^n \equiv 76 \pmod{100}$ với $n \geq 1$,

$$5^n \equiv 25 \pmod{100} \text{ với } n \geq 2.$$

Suy ra kết quả sau với $k \in \mathbb{N}^*$:

$$a^{20k} \equiv 00 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 01 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 25 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10},$$

$$a^{20k} \equiv 76 \pmod{100} \text{ nếu } a \equiv 2, 4, 6, 8 \pmod{100}.$$

Vậy để tìm hai chữ số tận cùng của a^n ta lấy số mũ n chia cho 20.

Một số trường hợp cụ thể về 2 chữ số tận cùng

- Các số có tận cùng bằng 01; 25; 76 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 01; 25; 76
- Các số 3^{20} (hoặc 81^5); 7^4 ; 51^2 ; 99^2 có tận cùng bằng 01.
- Các số 2^{20} ; 6^5 ; 18^4 ; 24^2 ; 68^4 ; 74^2 có tận cùng bằng 76.
- Số 26^n ($n > 1$) có tận cùng bằng 76.
- Các số có chữ số tận cùng là 01; 25; 76 khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì khác 0 thì hai chữ số tận cùng vẫn không thay đổi. (1)
- Các số 3^{20} ; 7^4 ; 9^{10} ; 51^2 ; 81^5 ; 99^2 có chữ số tận cùng là 01. (2)
- Các số 4^{10} ; 6^5 ; 18^4 ; 24^2 ; 68^4 ; 74^2 có chữ số tận cùng là 76. (3)
- Số 26^n ($n > 1$) có chữ số tận cùng là 76. (4)

Như vậy, muốn tìm chữ số tận cùng của số tự nhiên $x = a^m$, trước hết ta xác định chữ số tận cùng của a .

CHÚ Ý:

- 4^{10} có 2 chữ số tận cùng là 76.
- 5^2 có 2 chữ số tận cùng là 25.
- 8^{20} có 2 chữ số tận cùng là 76.
- 9^{10} có 2 chữ số tận cùng là 01.

3. Tìm ba chữ số tận cùng trở lên

Việc tìm ba chữ số tận cùng của số tự nhiên x chính là việc tìm số dư của phép chia x cho 1000.

Giả sử $n = 100k + r$ với $0 \leq r < 100$, khi đó: $a^n = a^{100k+r} = (a^{100})^k a^r$.

Giả sử: $a \equiv x \pmod{10}$, $x \in \{0, 1, 2, \dots, 9\}$

Ta có: $a^{100} = (10k + x)^{100} \equiv x^{100} \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng của a^{100} cũng chính là 3 chữ số tận cùng của x^{100} .

Dùng quy nạp với mọi $n \geq 1$, ta có:

$$625^n \equiv 625 \pmod{1000}$$

$$376^n \equiv 376 \pmod{1000}$$

- Nếu $x = 0$ thì $x^{100} \equiv 000 \pmod{1000}$

- Nếu $x = 5$ thì $x^4 = 5^4 = 625 \Rightarrow x^{100} = (5^4)^{25} \equiv 625 \pmod{10^3}$

- Nếu $x = 1; 3; 7; 9$ ta có tương ứng:

$$x^4 = 1; 81; 2401; 6561 \equiv 1 \pmod{40} \Rightarrow x^{100} = (40k + 1)^{25} \equiv 1 \pmod{10^3}$$

- Nếu $x = 2; 4; 6; 8$ thì $x^{100} \equiv 12^100 \pmod{1000}$

Ta có: $(x, 125) = 1$ nên $x^{100} \equiv 1 \pmod{125}$ (Định lý Euler).

Giả sử 3 chữ số tận cùng của x^{100} là $\overline{abc}$ ta có:

$$x^{100} = 1000k + \overline{abc} \Rightarrow \overline{abc} \equiv 1 \pmod{125} \text{ và } \overline{abc} \equiv 1 \pmod{8}$$

Trong các số $1; 126; 376; 501; 626; 751; 876$ (các số có 3 chữ số chia cho 125 dư 1) chỉ có duy nhất một số

chia hết cho 8 là 376. Vậy $x^{100} \equiv 376 \pmod{1000}$.

Do đó ta có kết quả sau:

$$a^{100k} \equiv 000 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 0 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 001 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 1; 3; 7; 9 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 625 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 5 \pmod{10}$$

$$a^{100k} \equiv 376 \pmod{10^3} \text{ nếu } a \equiv 2; 4; 6; 8 \pmod{10}$$

Vậy để tìm ba chữ số tận cùng của a^n ta tìm 2 chữ số tận cùng của số mũ n .

Một số trường hợp cụ thể về 3 chữ số tận cùng

- Các số có tận cùng bằng $001; 376; 625$ nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng $001; 376; 625$.

- Các số có tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 0625 .

PHẦN II. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Tìm 1 chữ số tận cùng

Ví dụ 1.1: Tìm chữ số tận cùng của 187^{324}

Lời giải:

Ta thấy các số có tận cùng bằng 7 nâng lên lũy thừa bậc 4 thì được số có tận cùng bằng 1.
 Các số có tận cùng bằng 1 nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 1.
 Do đó:

$$187^{324} = (187^4)^{81} = (\overline{\dots 1})^{81} = \overline{\dots 1}$$

Vậy chữ số tận cùng của 187^{324} là 1

Ví dụ 1.2: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 156^7 b) 1061^9 c) $156^7 + 1061^9$ d) $156^7 \cdot 1061^9$

Phân tích:

- Ta biết rằng các số có chữ số tận cùng là $0, 1, 5, 6$ khi nâng lên lũy thừa bậc bất kì thì chữ số tận cùng vẫn không thay đổi.

- Để tìm chữ số tận cùng của mỗi lũy thừa trên ta chỉ cần tìm chữ số tận cùng của hàng đơn vị.

Lời giải

a) 156^7 có chữ số tận cùng là 6

b) 1061^9 có chữ số tận cùng là 1

c) Theo câu a) và b) $\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của lũy thừa : $156^7 + 1061^9$ là 7

d) Theo kết quả câu a) và b) $\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của lũy thừa: $156^7 \cdot 1061^9$ là 6.

Ví dụ 1.3: Tìm chữ số tận cùng của 5^{2020}

Phân tích:

Để tìm được chữ số tận cùng của số trên ta phải đưa về số có tận cùng là 5.

Lời giải

Ta thấy $5^4 = 625$, số tận cùng bằng 5 nâng lên bậc lũy thừa nào cũng có chữ số tận cùng bằng 5 nên ta phân tích $5^{2020} = 5^{4 \cdot 505} = 625^{505}$.

Vậy số 5^{2020} có chữ số tận cùng bằng 5.

Ví dụ 1.4: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 7^{2006} b) 87^{32} c) 9^{1991} d) 23^{35} e) 74^{30} f) $7^{4n} - 1$

Lời giải

a) $7^{2006} = 7^{2004} \cdot 7^2 = 7^{4 \cdot 501} \cdot 7^2 = \overline{\dots 1} \cdot 49 = \overline{\dots 9}$

Vậy chữ số tận cùng của 7^{2006} là 9.

b) $87^{32} = 87^{4 \cdot 8} = \overline{\dots 1}$

Vậy chữ số tận cùng của 87^{32} là 1.

c) $9^{1991} = 9^{1988} \cdot 9^3 = 9^{4 \cdot 497} \cdot 9^3 = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 9} = \overline{\dots 9}$

Vậy chữ số tận cùng của 9^{1991} là 9.

d) $23^{35} = 23^{32} \cdot 23^3 = 23^{4 \cdot 8} \cdot 23^3 = \overline{\dots 1} \cdot \overline{\dots 7} = \overline{\dots 7}$

Vậy chữ số tận cùng của 23^{35} là 7.

$$e) 74^{30} = (74^2)^{15} = (\overline{5476})^{15} = \overline{6}$$

Vậy chữ số tận cùng của 74^{30} là: 6.

$$f) 7^{4n} - 1 = \overline{1} - 1 = \overline{0}$$

Vậy chữ số tận cùng của $7^{4n} - 1$ là 0.

Ví dụ 1.5: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

$$a) 7^{35} - 4^{31}$$

$$b) 2^{4n+1} + 2$$

$$c) 2^{1930} \cdot 9^{1945}$$

Lời giải

$$a) \text{ Ta có: } 7^{35} = 7^{32} \cdot 7^3 = 7^{4 \cdot 8} \cdot 7^3 = \overline{1} \cdot 343 = \overline{3}$$

Vậy chữ số tận cùng của $7^{35} - 4^{31}$ là 3.

$$b) \text{ Ta có: } 2^{4n+1} = 2^{4n} \cdot 2 = (2^4)^n \cdot 2 = 16^n \cdot 2 = \overline{2}$$

$$\Rightarrow 2^{4n+1} + 2 = \overline{2} + 2 = \overline{4}$$

Vậy chữ số tận cùng của $2^{4n+1} + 2$ là 4.

$$c) \text{ Ta có: } 2^{1930} = 2^{1928} \cdot 2^2 = 2^{4 \cdot 482} \cdot 4 = \overline{6} \cdot 4 = \overline{4}$$

$$9^{1945} = 9^{1944} \cdot 9^1 = 9^{4 \cdot 486} \cdot 9 = \overline{1} \cdot 9 = \overline{9}$$

$$\Rightarrow 2^{1930} \cdot 9^{1945} = \overline{4} \cdot \overline{9} = \overline{6}$$

Vậy chữ số tận cùng của $2^{1930} \cdot 9^{1945}$ là 6.

Ví dụ 1.6: Tìm chữ số tận cùng của các phép toán sau:

$$a) 11^8 + 12^8 + 13^8 + 14^8 + 15^8 + 16^8$$

$$b) 11^{123} + 13^{124} + 15^{125}$$

$$c) 125^{205} - 237^{15}$$

Lời giải

a) Ta có:

- 1^8 có chữ số tận cùng là 1.

- 2^8 có chữ số tận cùng là 6.

- 3^8 có chữ số tận cùng là 1.

- 4^8 có chữ số tận cùng là 6.

- 5^8 có chữ số tận cùng là 5.

- 6^8 có chữ số tận cùng là 6.

Tổng các chữ số này bằng: $1+6+1+6+5+6=25$.

Vậy $11^8 + 12^8 + 13^8 + 14^8 + 15^8 + 16^8$ có chữ số tận cùng là 5.

b) Ta có:

- 1^{123} có chữ số tận cùng là 1.
- 3^{124} có chữ số tận cùng là 1.
- 5^{125} có chữ số tận cùng là 5.

Tổng các chữ số này bằng: $1+1+5=7$.

Vậy $11^{123} + 13^{124} + 15^{125}$ có chữ số tận cùng là 7.

c) Ta có:

- 5^{205} có chữ số tận cùng là 5.
- 7^{15} có chữ số tận cùng là 3.

Tổng các chữ số này bằng: $5-3=2$.

Vậy $125^{205} - 237^{15}$ có chữ số tận cùng là 2.

Ví dụ 1.7: Tìm chữ số tận cùng của các tổng sau:

$$S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \frac{1}{4} + 2004^{8009}.$$

Phân tích:

Trong dạng bài này ta phải tìm được quy luật của tổng, quy luật ở đây chính là số mũ của các số hạng trong S, các số mũ này đều chia 4 dư 1. Mà ta biết các số khi nâng lên lũy thừa dạng $4n+1$ sẽ có tận cùng không đổi.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+1}$, n thuộc $\{2, 3, 4, \dots; 2004\}$).

Theo tính chất, suy ra mọi lũy thừa trong S và các cơ số tương ứng đều có chữ số tận cùng giống nhau, bằng chữ số tận cùng của tổng:

$$(2 + 3 + \frac{1}{4} + 9) + 199 \cdot (1 + 2 + \frac{1}{4} + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 = 200(1 + 2 + \frac{1}{4} + 9) + 9 = 9009.$$

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là 9.

Tổng quát hóa:

Tìm chữ số tận cùng của tổng sau: $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \frac{1}{4} + n^{4(n-2)+1}$

Ví dụ 1.8: Tìm chữ số tận cùng của tổng $T = 2^3 + 3^7 + 4^{11} + \dots + 2004^{8011}$.

Lời giải:

Nhận xét: Mọi lũy thừa trong T đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 3 (các lũy thừa đều có dạng $n^{4(n-2)+3}$, n thuộc $\{2, 3, 4, \dots; 2004\}$).

Do đó: $7^{1991} = 7^{1988} \cdot 7^3 = (7^4)^{497} \cdot 343 = (\overline{...01})^{497} \cdot 343 = \overline{...01} \cdot 343 = \overline{...43}$.

Vậy 7^{1991} có hai chữ số tận cùng là 43.

Ví dụ 2.3: Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100}

Lời giải

Chú ý rằng: $2^{10} = 1024$ bình phương của số có tận cùng bằng 24 thì tận cùng bằng 76, số có tận cùng bằng 76 thì nâng lên lũy thừa nào (khác 0) cũng tận cùng bằng 76.

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5 = (\overline{...76})^5 = \overline{...76}$$

Do đó

Vậy hai chữ số tận cùng của 2^{100} là 76.

Ví dụ 2.4: Tìm hai chữ số tận cùng của:

a) 51^{51} ;

b) 99^{999} ;

c) 6^{666} ;

d) $14^{101} \cdot 16^{101}$

Hướng dẫn:

a) $51^{51} = (51^2)^{25} \cdot 51 = (\overline{K\ 01})^{25} \cdot 51 = \overline{K\ 51}$

b) $99^{999} = 99^{2k+1} = (99^2)^k \cdot 99 = (\overline{K\ 01})^k \cdot 99 = (\overline{K\ 99})$

c) $6^{666} = (6^5)^{133} \cdot 6 = (\overline{K\ 76}) \cdot 6 = \overline{K\ 56}$

d) $14^{101} \cdot 16^{101} = (14 \cdot 16)^{101} = 224^{101} = (224^2)^{50} \cdot 224 = (\overline{K\ 76})^{50} \cdot 224$
 $= (\overline{K\ 76}) \cdot 224 = \overline{K\ 24}$

Ví dụ 2.5: Tìm 2 chữ số tận cùng của $1976^{56} \cdot 2015^{77}$

Lời giải

Ta thấy:

Chữ số tận cùng của 1976^{56} cũng là chữ số tận cùng của 76^{56} mà $76^{56} = \overline{...76}$

Chữ số tận cùng của 2015^{77} cũng là chữ số tận cùng của 15^{77}

mà $15^{77} = (3 \cdot 5)^{77} = 3^{77} \cdot 5^{77} = 3^{20 \cdot 3 + 17} \cdot 5^{77} = 3^{17} (\overline{...01}) (\overline{...25}) = (\overline{...63}) (\overline{...25}) = \overline{...75}$

$$1976^{56} \cdot 2015^{77} = (\overline{...76}) (\overline{...75}) = \overline{...00}$$

Suy ra:

Vậy $1976^{56} \cdot 2015^{77}$ có 2 chữ số tận cùng là 00.

Ví dụ 2.6: Tìm hai chữ số tận cùng của số $C = 2^{999}$

Lời giải

Ta có: $2^{10} + 1 = 1024 + 1 = 1025$ suy ra $2^{20} - 1 = (2^{10} + 1)(2^{10} - 1)$

Ta lại có $2^{1000} - 1 = (2^{20})^{50} - 1$ suy ra $2^{1000} - 1$

Do đó 2^{1000} chữ số tận cùng là 26; 51; 76 nhưng 2^{1000}

Suy ra 2^{1000} tận cùng là 76 b 2^{999} tận cùng là 38 hoặc 88 vì 2^{999}

Vậy 2^{999} tận cùng là 88

Vậy $C = 2^{999}$ có hai chữ số tận cùng là 88.

Ví dụ 2.7: Tìm 2 chữ số tận cùng của 51^{2020}

Lời giải

Ta có $2020 = 2 \cdot 1010$ nên $51^{2020} = (51^2)^{1010} = 2601^{1010}$.

Khi đó theo quy tắc (1) chữ số tận cùng của 51^{2020} là 01.

Ví dụ 2.8: Tìm 2 chữ số tận cùng của a) 7^{2015} b) 57^{66}

Lời giải

a) Ta có: $7^4 = 2401$ nên $7^{2015} = 7^{4 \cdot 503 + 3} = (7^4)^{503} \cdot 7^3 = 2401^{503} \cdot 343 = (\dots 01) \cdot 343 = \dots 43$

Chữ số tận cùng của 7^{2015} là 43.

b) Ta có $57^{66} = (57^4)^{16} \cdot 57^2 = (\dots 01)^{16} \cdot 3249 = \dots 49$

Chữ số tận cùng của 57^{66} là 49.

Dạng 3: Tìm ba chữ số tận cùng

Ví dụ 3.1: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{2008}

Lời giải:

$$5^{2008} = 5^{4 \cdot 502} = (5^4)^{502}$$

5^4 có tận cùng là 625

Suy ra $(5^4)^{502}$ có tận cùng là 625

Vậy 5^{2008} có 3 chữ số tận cùng là 625.

Ví dụ 3.2: Tìm ba chữ số tận cùng của 2^{100} .

Lời giải

Ta có: $2^{10} = 1024 \equiv 024 \pmod{1000}$

$$2^{50} = (2^{10})^5 \equiv 24^5 \equiv 624 \pmod{1000}$$

$$2^{100} = (2^{50})^2 \equiv 624^2 \equiv 376 \pmod{1000}$$

Vậy ba chữ số tận cùng của 2^{100} là 376.

Ví dụ 3.3: Tìm ba chữ số tận cùng của 123^{101}

Phân tích:

Nhận thấy rằng $(123, 5) = 1$ nên ta sẽ áp dụng tính chất 4, khi đó chia hết cho 125.

Lời giải:

+ Vì $(123, 5) = 1$ nên áp dụng tính chất ta có $123^{101} - 1$ chia hết cho 125. (1)

+ Ta lại có chia hết cho 8 (2)

Vì $(8, 125) = 1$ và kết hợp (1), (2) ta có chia hết cho 1000

Khi đó

Vậy ba chữ số tận cùng của là 123.

Ví dụ 3.4: Tìm ba chữ số tận cùng của $2^{9^{2003}}$

Lời giải

- Tìm 2 chữ số tận cùng của 9^{2003}

Ta có $9^{2003} = 9^3 \cdot 9^{2000} = 9^3 \cdot (3^{20})^{50} \equiv 29 \pmod{100}$

- Khi đó ta có $2^{9^{2003}} = 2^{100k+29} = 2^{29} \cdot 2^{100k} \equiv 912 \cdot 376 \equiv 912 \pmod{1000}$

Vậy 3 chữ số tận cùng là 912.

Ví dụ 3.5: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$

Lời giải

Ta có $7^{213} \equiv 7^{26 \cdot 8 + 5} \equiv (7^8)^{26} \cdot 7^5 \equiv 1^{26} \cdot 7^5 \equiv 7^5 \equiv 7 \pmod{100}$

Khi đó $3^{7^{213}} = 3^{100k+7} = 3^{100k} \cdot 3^7 \equiv 1 \cdot 3^7 \equiv 187 \pmod{1000}$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{7^{213}}$ là 187.

Ví dụ 3.6: Tìm ba chữ số tận cùng của 5^{1992}

Lời giải

$5^{1992} = (5^4)^{498} = 625^{498} = 0625^{498} = \overline{1/4 0625}$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1992} là 0625

Ví dụ 3.7: Tìm ba chữ số tận cùng của số $T = 5^{946}$

Lời giải

Ta có 5^3 có ba chữ số tận cùng là 125

$$\text{Suy ra } T = 5^{946} = (5^3)^{315} \cdot 5 = (\overline{n125})^{315} \cdot 5 = \overline{m125} \cdot 5 = \overline{t625}$$

(Với $n, m, t \in \mathbb{Z}$)

Vậy $T = 5^{946}$ có ba chữ số tận cùng là 125.

Ví dụ 3.8: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $P = 5^{1994}$

Lời giải

Ta có:

$$\begin{array}{lll} 5^4 = 0625 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^5 \text{ tận cùng là } 3125; & 5^6 \text{ tận cùng là } 5625 \\ 5^7 \text{ tận cùng là } 8125; & 5^8 \text{ tận cùng là } 0625; & 5^9 \text{ tận cùng là } 3125; \\ 5^{10} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{11} \text{ tận cùng là } 8125; & 5^{12} \text{ tận cùng là } 0625 \end{array}$$

Chu kỳ lặp là 4.

Suy ra:

$$\begin{array}{ll} 5^{4m} \text{ tận cùng là } 0625; & 5^{4m+1} \text{ tận cùng là } 3125 \\ 5^{4m+2} \text{ tận cùng là } 5625; & 5^{4m+3} \text{ tận cùng là } 8125 \end{array}$$

Mà 1994 có dạng $4m + 2$, do đó $P = 5^{1994}$ có 4 chữ số tận cùng là 5625.

Ví dụ 3.9: Tìm ba chữ số tận cùng của số: $R = 123^{101}$

Lời giải

Do $(123, 5) = 1 \nmid 123^{100} - 1$ chia hết cho 125 (1).

Mặt khác: $123^{100} - 1 = (123^{25} - 1)(123^{25} + 1)(123^{50} + 1) \nmid 123^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $123^{100} - 1$ chỉ hết cho 1000

$$\nmid 123^{101} = 123(123^{100} - 1) + 123 = 1000k + 123 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy 123^{101} có ba chữ số tận cùng là 123.

Ví dụ 3.10: Tìm ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$

Lời giải

Do $(9, 5) = 1 \nmid 9^{100} - 1$ chỉ hết cho 125 (1).

Ta có $9^{100} - 1$ chia hết cho 8 (2).

Vì $(8, 125) = 1$, từ (1) và (2) suy ra: $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000

$$3^{399 \dots 98} = 9^{199 \dots 9} = 9^{100p+99} = 9^{99}(9^{100p} - 1) + 9^{99} = 1000q + 9^{99} (p, q \in \mathbb{Z})$$

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ cũng chính là ba chữ số tận cùng của 9^{99} .

Lại vì $9^{100} - 1$ chia hết cho 1000 nên ba chữ số tận cùng của 9^{100} là 001 mà $9^{99} = 9^{100} : 9$

ba chữ số tận cùng của 9^{99} là 889 (để kiểm tra chữ số tận cùng của 9^{99} là 9, sau đó dựa vào phép nhân $9 \cdot 9 = \dots 001$ để xác định $9 \cdot 9 = 889$).

Vậy ba chữ số tận cùng của $3^{399 \dots 98}$ là 889.

Ví dụ 3.11: Tìm ba chữ số tận cùng của 2004^{200}

Lời giải

Do $(2004, 5) = 1$

$\Rightarrow 2004^{100}$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200} = (2004^{100})^2$ chia cho 125 dư 1

$\Rightarrow 2004^{200}$ chỉ có thể tận cùng là 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876.

Do 2004^{200} chia hết cho 8 nên chỉ có thể tận cùng là 376.

Ví dụ 3.12: Tìm ba chữ số tận cùng của tổng $S = 2^1 + 3^5 + 4^9 + \frac{1}{4} + 2004^{8009}$.

Lời giải

Nhận thấy: lũy thừa trong S đều có số mũ khi chia cho 4 thì dư 1

(các lũy thừa đều có dạng $n^{4(k-2)+1}$, k thuộc $\{2, 3, \frac{1}{4}, 2004\}$).

Mọi lũy thừa trong S đều có chữ số tận cùng là chữ số tận cùng của cơ số tương ứng:

$\Rightarrow$ Chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng:

$$\begin{aligned} & (2 + 3 + \frac{1}{4} + 9) + 199(0 + 1 + 2 + \frac{1}{4} + 9) + 1 + 2 + 3 + 4 \\ & = 200(1 + 2 + \frac{1}{4} + 9) + 9 = 9009 \end{aligned}$$

Vậy ba chữ số tận cùng sẽ là 009

Dạng 4: Vận dụng chứng minh chia hết, chia có dư.

* **Chú ý:**

a. Dấu hiệu chia hết cho 2:

Một số chia hết cho 2 khi và chỉ khi chữ số tận cùng của số đó là số chẵn.

b. Dấu hiệu chia hết cho 3 (hoặc 9):

Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) khi và chỉ khi tổng các chữ số của số đó chia hết cho 3 (hoặc 9).

Chú ý: Một số chia hết cho 3 (hoặc 9) dư bao nhiêu thì tổng các chữ số của nó chia cho 3 (hoặc 9) cũng dư bấy nhiêu và ngược lại.

c. Dấu hiệu chia hết cho 5 :

Một số chia hết cho 5 khi và chỉ khi chữ số của số đó có tận cùng bằng 0 hoặc bằng 5 .

d. Dấu hiệu chia hết cho 4 (hoặc 25):

Một số chia hết cho 4 (hoặc 25) khi và chỉ khi hai chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 4 (hoặc 25).

e. Dấu hiệu chia hết cho 8 (hoặc 125):

Một số chia hết cho 8 (hoặc 125) khi và chỉ khi ba chữ số tận cùng của số đó chia hết cho 8 (hoặc 125).

f. Dấu hiệu chia hết cho 11 :

Một số chia hết cho 11 khi và chỉ khi hiệu giữa tổng các chữ số hàng lẻ và tổng các chữ số hàng chẵn (từ trái sang phải) chia hết cho 11 .

Ví dụ 4.1: Cho $999993^{1999} - 555557^{1997}$. Chứng minh rằng A chia hết cho 5 .

Lời giải:

Để chứng minh $A \vdots 5$, ta xét chữ số tận cùng của A bằng việc xét chữ số tận cùng của từng số hạng.

Ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra: 3^{1999} có chữ số tận cùng là 7 .

$7^{1997} = (7^4)^{499} \cdot 7 = 2041^{499} \cdot 7$

Suy ra: 7^{1997} có chữ số tận cùng là 7 .

Vậy A có chữ số tận cùng bằng 0 .

Do đó: $A \vdots 5$.

Ví dụ 4.2: Cho $n \in \mathbb{N}$, chứng minh rằng $n^2 + n + 1$ không chia hết cho 4 và không chia hết cho 5 .

Lời giải:

Ta có: $n^2 + n + 1 = n(n+1) + 1$

$n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên chia hết cho 2 . Suy ra $n(n+1)+1$ là một số lẻ nên không chia hết cho 4 .

$n(n+1)$ là tích của hai số tự nhiên liên tiếp nên không có tận cùng là 4 hoặc 9 nên $n(n+1)+1$ không có tận cùng là 5 hoặc 0 . Do đó $n(n+1)+1$ không chia hết cho 5 .

Ví dụ 4.3: Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2 .

Lời giải:

Ta có: 10^{2003} có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $10^{2003} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2

Ví dụ 4.4: Chứng minh $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Lời giải:

Để $2113^{2000} - 2011^{2000}$ vừa chia hết cho cả 2 và 5 thì số phải có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra: Cần chứng minh số bị trừ và số trừ đều có chữ số tận cùng là 1.

Chú ý: Số tự nhiên a có chữ số tận cùng là 1 thì a^n cũng có chữ số tận cùng là 1.

Ta có: $2113^{2000} = (2113^4)^{500} = \overline{\dots 1}^{500}$. Suy ra: 2113^{2000} có chữ số tận cùng là 1.

2011^{2000} luôn có chữ số tận cùng là 1.

Suy ra: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy: $2113^{2000} - 2011^{2000}$ chia hết cho cả 2 và 5.

Ví dụ 4.5: Cho 1 số có 4 chữ số: $\overline{*26*}$. Điền các chữ số thích hợp vào dấu (*) để được số có bốn chữ số khác nhau chia hết cho tất cả bốn số: 2; 3; 5; 9.

Lời giải:

Số $\overline{*26*}$ đảm bảo chia hết cho 2 nên số đó là số chẵn.

Số $\overline{*26*}$ chia hết cho 5 nên số đó phải có chữ số tận cùng là số 0 hoặc 5.

Số $\overline{*26*}$ vừa chia hết cho 3 và 9 nên số đó phải có tổng các chữ số chia hết cho 9.

Suy ra: Chữ số tận cùng của số $\overline{*26*}$ là 0.

Do đó ta có số $\overline{*260} \Rightarrow$. Chữ số đầu là số 1

Vậy: số đã cho là 1260.

Ví dụ 4.6: Chứng tỏ rằng hiệu $1983^{1983} - 1917^{1917}$ chia hết cho 10.

Lời giải:

Ta có: $1983^{1983} = (1983^4)^{495} \cdot 1983^3$

Số 1983^4 có chữ số tận cùng bằng 1

Suy ra $(1983^4)^{495}$ có tận cùng bằng 1

Số 1983^3 có tận cùng bằng 7

Do đó: 1983^{1983} có tận cùng bằng 7

Phân tích tương tự, 1917^{1917} có tận cùng bằng 7

Do đó: $1983^{1983} - 1917^{1917}$ có tận cùng bằng 0

Vậy: $1983^{1983} - 1917^{1917}$ chia hết cho 10.

Ví dụ 4.7: Chứng tỏ rằng: $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$ chia hết cho 10.

Lời giải:

Ta có: $7^5 = 7^4 \cdot 7 = 2401 \cdot 7$ tận cùng bằng chữ số 7 nên số 2007^5 cũng tận cùng bằng chữ số 7.

$4^4 = 256$ tận cùng bằng chữ số 6 nên 2014^4 cũng tận cùng bằng chữ số 6.

$3^{13} = (3^4)^3 \cdot 3 = 81^3 \cdot 3$ tận cùng bằng chữ số 3 nên số 2013^{13} cũng tận cùng bằng chữ số 3.

Suy ra: $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$ tận cùng bằng chữ số 0.

Vậy: số $2007^5 + 2014^4 - 2013^{13}$ chia hết cho 10.

Ví dụ 4.8: Tìm bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} khi viết trong hệ thập phân.

Lời giải:

Cách 1: $5^4 = 625$

Ta thấy số tận cùng bằng 0625 nâng lên lũy thừa nguyên dương bất kì vẫn tận cùng bằng 0625.

Do đó: $5^{1994} = 5^{4k+2} = 25(5^4)^k = 25(0625)^k = 25(\overline{...0625}) = \overline{...5625}$

Cách 2: Tìm số dư khi chia 5^{1994} cho $10000 = 2^4 \cdot 5^4$

Nhận xét: $5^{4k} - 1$ chia hết cho $5^4 - 1 = (5^2 - 1)(5^2 + 1)$ nên chia hết cho 16.

Ta có: $5^{1994} = 5^6 (5^{1988} - 1) + 5^6$

Do 5^6 chia hết cho 5^4 còn $5^{1988} - 1$ chia hết cho 16 (theo nhận xét trên)

Nên: $5^6 (5^{1988} - 1)$ chia hết cho 10000

Tính $5^6 = 15625$

Vậy bốn chữ số tận cùng của 5^{1994} là 5625.

Ví dụ 4.9: Chứng minh rằng $33^{66} + 77^{55} - 2$ chia hết cho 5

Lời giải:

Ta chứng minh $33^{66} + 77^{55} - 2$ có tận cùng là 0 sau đó vận dụng dấu hiệu chia hết cho 5

Thật vậy, 33^{66} có cùng chữ số tận cùng với 33^{66} , mà $3^{66} = 9^{33} = 9 \cdot 9^{2 \cdot 16}$ suy ra 33^{66} có tận cùng là 9, 77^{55} có cùng chữ số tận cùng với 77^{55} , vì $7^{55} = 7^3 \cdot 7^{4 \cdot 13}$ nên 77^{55} có tận cùng là 3. Do đó 33^{66} , 77^{55} có chữ số tận cùng lần lượt là 9, 3 suy ra $33^{66} + 77^{55} - 2$ tận cùng là 0 (đpcm)

Dạng 5: Vận dụng chữ số tận cùng vào bài toán chính phương.

*** Chú ý:**

- Số chính phương chỉ có chữ số tận cùng là: $0; 1; 4; 5; 6; 9$
- Khi phân tích ra thừa số nguyên tố, số chính phương chỉ chứa các thừa số nguyên tố với lũy thừa chẵn
- Số chính phương thì chia hết cho 4 hoặc chia cho 4 dư 1
- Số chính phương thì chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 1
- Số chính phương chia hết cho 1 thì sẽ chia hết cho 4
- Số chính phương chia hết cho 3 thì chia hết cho 9
- Số chính phương chia hết cho 5 thì chia hết cho 25
- Số chính phương chia hết cho 8 thì chia hết cho 16
- Số chính phương tận cùng là 1 hoặc 4 hoặc 9 thì chữ số hàng chục là số chẵn
- Số chính phương tận cùng là 5 thì chữ số hàng chục là 2
- Số chính phương tận cùng là 6 thì chữ số hàng chục là số lẻ.
- Số tự nhiên A không phải là số chính phương nếu:
 - + A có chữ số tận cùng là $2; 3; 7; 8$.
 - + A có chữ số tận cùng là 6 mà chữ số hàng chục là chữ số chẵn.
 - + A có chữ số hàng đơn vị khác 6 mà chữ số hàng chục là lẻ.
 - + A có chữ số hàng đơn vị là 5 mà chữ số hàng chục khác 2.
 - + A có hai chữ số tận cùng là lẻ.

Ví dụ 5.1: Các số sau có phải là số chính phương không? Vì sao?

a) $10^{2019} + 8$;

b) $1.2.3.4...2019 + 7$

Lời giải:

a) Ta có: 10^{2019} có chữ số tận cùng là 0

Suy ra: $10^{2019} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Do đó: $10^{2019} + 8$ không là số chính phương.

b) Ta có: $1.2.3.4...2019$ có chữ số tận cùng là 0.

Suy ra: $1.2.3.4...2019 + 7$ có chữ số tận cùng là 7.

Do đó: $1.2.3.4...2019 + 7$ không là số chính phương.

Ví dụ 5.2: Cho $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2020}$. Chứng minh rằng $A + 4$ không là số chính phương.

Lời giải:

Ta có: $A = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{2020}$

$$2A = 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots + 2^{2021}$$

$$\text{Suy ra: } 2A - A = 2^{2021} - 4$$

$$\text{Suy ra: } A + 4 = 2^{2021} - 4 + 4 = 2^{2021}$$

$$= (2^4)^{505} \cdot 2$$

$$= 16^{505} \cdot 2$$

Ta có: 16^{505} có chữ số tận cùng là 6.

Suy ra: $16^{505} \cdot 2$ có chữ số tận cùng là 2.

Do đó: $A + 4$ có chữ số tận cùng là 2.

Vậy $A + 4$ không phải là số chính phương.

Ví dụ 5.3: Cho $a \in \mathbb{N}$ và $n - 1$ không chia hết cho 4. Chứng minh rằng $7^n + 2$ không thể là số chính phương.

Lời giải:

Do $n - 1$ không chia hết cho 4 nên $n = 4k + r (r \in \{0, 2, 3\})$.

Ta có $7^4 - 1 = 2400:10$. Ta viết $7^n + 2 = 7^{4k+r} + 2 = 7^r (7^{4k} - 1) + 7^r + 2$.

Vậy hai chữ số tận cùng của $7^n + 2$ cũng chính là hai chữ số tận cùng của $7^r + 2 (r = 0; 2; 3)$ nên chỉ có thể là 03; 51; 45. Theo tính chất trên thì rõ ràng $7^n + 2$ không thể là số chính phương khi n không chia hết cho 4.

Ví dụ 5.4: Cho $S = 1 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{30}$. Tìm chữ số tận cùng của S, từ đó suy ra S không phải là số chính phương.

Lời giải:

Tổng có 31 số hạng, nhóm các số hạng từ trái sang phải, mỗi nhóm 4 hạng, còn thừa ba số hạng cuối là $3^{28} + 3^{29} + 3^{30}$. Trong mỗi nhóm, chữ số tận cùng của tổng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của tổng S là chữ số tận cùng của tổng $3^{28} + 3^{29} + 3^{30}$.

$$\text{Ta có: } 3^{29} = 3^{28} \cdot 3 = \overline{...1} \cdot 3 = \overline{...3}$$

$$3^{30} = 3^{28} \cdot 3^2 = \overline{...1} \cdot 9 = \overline{...9}$$

$$\text{Tổng S có chữ số tận cùng } 1 + 3 + 9 = \overline{...3}$$

Số chính phương không có tận cùng bằng 3 . Suy ra S không phải là số chính phương.

Ví dụ 5.5: Cho tổng $S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011$

a) Tính S

b) Chứng tỏ S là một số chính phương.

Lời giải:

a) Ta có:
$$S = 1 + 3 + 5 + \dots + 2009 + 2011 = \left(\frac{2011+1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2011-1}{2} + 1 \right) = 1006^2 = 1012036$$

b) $S = 2^2 \cdot 503^2 = 1006^2$ có chữ số tận cùng là 6 nên S là số chính phương.

Ví dụ 5.6: Tìm số chính phương có bốn chữ số, được viết với các chữ số $3; 6; 8; 8$.

Lời giải:

Gọi n^2 là số chính phương cần tìm.

Số chính phương không tận cùng bằng 3 và 8 nên n^2 phải tận cùng bằng 6 .

Số tận cùng bằng 86 thì chia hết cho 2 , không chia hết cho 4 nên không là số chính phương.

Vậy n^2 phải tận cùng bằng 36

Suy ra số chính phương cần tìm là: $8836 = 94^2$

BÀI TẬP

Bài 1: Chứng tỏ rằng $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2 .

Lời giải:

Cách 1: $10^{2003} = 10 \cdot 10^{2002} = 2 \cdot 5 \cdot 10^{2002}$ chia hết cho 2 và 8 chia hết cho 2 .

Do đó: $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2 .

Cách 2: 10^{2003} có chữ số tận cùng là 0 . Do đó: $10^{2003} + 8$ có chữ số tận cùng là 8 .

Vậy: $10^{2003} + 8$ chia hết cho 2 .

Bài 2: Tìm chữ số tận cùng của các số sau:

a) 234^{567} ; b) 579^{675}

Lời giải:

a) Số 243 có tận cùng là 4 , nâng lên lũy thừa lẻ nên có chữ số tận cùng là 4 .

b) Số 579 có tận cùng là 9 , nâng lên lũy thừa chẵn nên có tận cùng là 1 .

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của các số sau: 6^{1995} ; 9^{1995} ; 3^{1995} ; 2^{1995}

Lời giải:

Ta có: 6^{1995} có số tận cùng là 6

9^{1995} có số tận cùng là 9

3^{1995} có số tận cùng là 7 ($1995=4.498+3$)

2^{1995} có số tận cùng là 8

Bài 4: Tìm chữ số cuối cùng của số 7^{9^9} .

Lời giải:

Ta có: 7^{4k} có chữ số cuối cùng là 7.

Mà: $9^9=(2.4+1)^9$

Do đó: chữ số cuối cùng của số 7^{9^9} là 7.

Bài 5: Tích các số lẻ liên tiếp có tận cùng là 7. Hỏi tích đó có bao nhiêu thừa số?

Lời giải:

Nếu tích có 5 thừa số lẻ liên tiếp trở lên thì ít nhất cũng có một thừa số có chữ số tận cùng là 5. Do đó tích phải tận cùng là 5 nên trái đề bài. Vậy số thừa số của tích nhỏ nhất phải lớn hơn 5.

Nếu tích có 4 thừa số lẻ liên tiếp thì hoặc tích có tận cùng bằng 5, hoặc tận cùng bằng 9 nên trái đề bài.

Nếu tích có 2 thừa số lẻ liên tiếp thì tích có tận cùng là 3 hoặc 5 hoặc 9 nên trái đề bài.

Vậy tích đó chỉ có 3 thừa số.

Bài 6: Tích $A=2.2^2.2^3...2^{10}.5^2.5^4.5^6...5^{14}$ tận cùng bằng bao nhiêu chữ số 0.

Lời giải:

Ta có: $2.2^2.2^3...2^{10}=2^{1+2+3+...+10}=2^{55}$

$5^2.5^4.5^6...5^{14}=5^{2+4+6+...+14}=5^{56}$

Do đó: $A=2^{55}.5^{56}=2^{55}.5^{55}.5=10^{55}.5$

Vậy A có tận cùng bằng 55 chữ số 0.

Bài 7: Tìm số tự nhiên có 5 chữ số biết rằng số gồm năm chữ số đó viết theo thứ tự ngược lại bằng bốn lần số phải tìm.

Lời giải:

Gọi số phải tìm là $\overline{abcde}$ ($a, b, c, d, e \in \mathbb{N}; 1 < a, e \leq 9; 0 \leq b, c, d \leq 9$)

Theo đầu bài ta có: $\overline{4.abcde} = \overline{edcba}$ (*)

Vì $\overline{4.abcde}$ bằng một số có năm chữ số nên $a \leq 2$, a lại chẵn nên $a=2$.

Tích $4e$ là một số tận cùng bằng 2, do đó $e=3$ hoặc $e=8$.

Vì e là chữ số đầu của số tận cùng bằng b nên b phải là số lẻ, do đó $b=1$.

Xét tích $4d$. Đó là một số cộng với 3 được một số tận cùng bằng 1 nên $4.d$ tận cùng bằng 8.

Vậy $d=2$ hoặc $d=7$.

Bằng cách thử trực tiếp, ta được $d=7$, do đó $c=9$.

Vậy số phải tìm là 21978.

Bài 8: Hãy thay vào a, b, c, d các chữ số thích hợp, biết rằng:

a) $\overline{abc} \cdot 5 = \overline{dad}$; b) $\overline{abc} + \overline{ba} = \overline{dcca}$; c) $\overline{acc} = \overline{cca} = \overline{aa}$

Lời giải:

a) Tích $\overline{abc} \cdot 5$ là một số có ba chữ số, nên $a=1.c \cdot 5$ là một số tận cùng bằng 0 hoặc 5 (tức là $d=0$ hoặc $d=5$) nhưng $d \neq 0$ nên $d=5$, suy ra $\overline{dad}=515$.

Vậy: $\overline{abc}=515:5=103$. Ta có phép tính $103 \cdot 5=515$.

b) Ta viết lại phép tính như sau:

$$\begin{array}{r} \text{ba} \\ + \text{abc} \\ \hline \text{dcca} \end{array}$$

Ta có: $a+c=a$ (vì $a+c \neq 10+a$) nên $c=0$. Tổng là một số có bốn chữ số chỉ trong trường hợp $a=9$. Khi đó $d=1$; $b+b$ là một số tận cùng bằng 0, hơn nữa $b+b$ phải khác 0 vì nếu không ta phải có $b=0$, trái với đầu bài. Do đó: $b+b=10$ và $b=5$.

Ta có phép tính: $950+59=1009$

c) Ta viết lại phép tính bằng:

$$\begin{array}{r} \text{aa} \\ + \text{cca} \\ \hline \text{acc} \end{array}$$

Nếu $a+c < 10$ thì $a+c=0$ suy ra $a=0$, điều này vô lý vì rõ ràng a phải khác 0.

Do đó: $a+a=10+c$ và $a+c+1=10+c(a+c+1 \neq c)$.

Từ đó $a=9$ nhưng $a+a=10+c$, nghĩa là $10+c=18$ nên $c=8$.

Ta có phép tính: $988-889=99$.

Bài 9: Nếu $a \in \mathbb{N}$ và $(a;5)=1$ thì $a^{100}-1$ chia hết cho 125.

Lời giải:

Do $a^{20} - 1$ chia hết cho 25 nên $a^{20}; a^{40}; a^{60}; a^{80}$ khi chia cho 25 có cùng số dư là 1.

Suy ra: $a^{20} + a^{40} + a^{60} + a^{80} + 1$ chia hết cho 5.

Vậy $a^{100} - 1 = (a^{20} - 1)(a^{80} + a^{60} + a^{40} + a^{20} + 1)$ chia hết cho 125.

Bài 10: Chứng minh rằng: Trong 11 số nguyên bất kì thế nào cũng có hai số có cùng chữ số tận cùng.

Lời giải:

Một số nguyên chỉ có thể tận cùng bằng 1 trong 10 chữ số $0; 1; 2; \dots; 9$

Lập 11 số nguyên, theo nguyên tắc Dirichlet phải có hai số có cùng chữ số tận cùng.

PHẦN III. BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP TRONG ĐỀ HSG.

Bài 1: Tìm một số tự nhiên có 6 chữ số tận cùng là chữ số 4. Biết rằng khi chuyển chữ số 4 đó lên đầu còn các chữ số khác giữ nguyên thì ta được số mới gấp 4 lần số cũ. (**Đề thi HSG Gia Lai năm 2018 - 2019**)

Lời giải:

Gọi số cần tìm là $\overline{abcde4}$, ta có: $\overline{abcde4} \cdot 4 = \overline{4abcde}$

Đặt $\overline{abcde} = x \Rightarrow \overline{abcde4} = \overline{x4}$

Ta có: $\overline{x4} \cdot 4 = 400\,000 + x$

$$(10x + 4) \cdot 4 = 400\,000 + x$$

$$40x + 16 = 400\,000 + x$$

$$39x = 399\,984$$

$$x = 10\,256$$

Vậy số cần tìm là 10256.

Bài 2: Cho $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$. Chứng tỏ rằng $A : 2018$. Tìm chữ số tận cùng của A. (**Đề HSG Trục Ninh năm 2017 - 2018**)

Lời giải:

Ta có $A = 2017 + 2017^2 + 2017^3 + \dots + 2017^{18}$ (tổng A có 2018 số hạng, $2018 : 2$)

$$A = (2017 + 2017^2) + (2017^3 + 2017^4) + \dots + (2017^{2017} + 2017^{2018})$$

$$= 2017 \cdot (1 + 2017) + 2017^3 \cdot (1 + 2017) + \dots + 2017^{2017} (1 + 2017)$$

$$= 2018 \cdot (2017 + 2017^3 + \dots + 2017^{2017}) : 2018$$

$$= 2017 + 2017^2 + (2017^3 + 2017^4 + 2017^5 + 2017^6) + \dots + (2017^{2015} + 2017^{2016} + 2017^{2017} + 2017^{2018})$$

$$\begin{aligned}
 &= (\overline{\dots 6}) + 2017^3 \cdot (\overline{\dots 0}) + \dots + 2017^{2015} \cdot (\overline{\dots 0}) \\
 &= (\overline{\dots 6})
 \end{aligned}$$

Vậy chữ số tận cùng của A là 6.

Bài 3: Tìm chữ số tận cùng của số $P = 14^{14^{14}} + 9^{9^9} + 2^{3^4}$ (Đề HSG Lý Nhân năm 2018 - 2019).

Lời giải:

Chữ số tận cùng của $14^{14^{14}}$ là 6.

Chữ số tận cùng của 9^{9^9} là 9.

Chữ số tận cùng của 2^{3^4} là 2.

Chữ số tận cùng của P là chữ số tận cùng của tổng $(6+9+2)$ là 7.

Bài 4: Cho $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$ (Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

a) Chứng tỏ rằng $M : 5$.

b) Tìm chữ số tận cùng của M.

Lời giải:

a) Ta có: $M = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{20}$

$$\begin{aligned}
 &= (2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \dots + (2^{17} + 2^{18} + 2^{19} + 2^{20}) \\
 &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3) + \dots + 2^{17}(1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\
 &= 15(2 + \dots + 2^{17}) \\
 &= 5 \cdot 3 \cdot (2 + \dots + 2^{17}) : 5
 \end{aligned}$$

b) Dễ thấy $M : 2 ; M : 5 \Rightarrow M : 10$

Do đó: M có chữ số tận cùng bằng 0.

Bài 5: Cho $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$. Không làm phép tính, hãy rút gọn biểu thức rồi tìm số tận cùng của A. (Đề HSG Bắc Ninh năm 2016 - 2017)

Lời giải:

Ta có: $A = 3(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$

$$\begin{aligned}
 &= (2^2 - 1)(2^2 + 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1) \\
 &= (2^4 - 1)(2^4 + 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)
 \end{aligned}$$

$$=(2^8 - 1)(2^8 + 1)(2^{16} + 1)$$

$$=(2^{16} - 1)(2^{16} + 1)$$

$$=2^{32} - 1$$

Vì 2^{32} có chữ số tận cùng là 2 nên $A = 2^{32} - 1$ có chữ số tận cùng là 1.

Bài 6: Cho $A = \frac{1}{2}(7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}})$. Chứng minh A là số tự nhiên chia hết cho 5. (**Đề HSG Hoàng Hoá năm 2018 - 2019**)

Lời giải:

Vì $2012; 92$ đều là bội của 4 nên 2012^{2015} và 92^{94} cũng là bội của 4.

Suy ra: $2012^{2015} = 4m (m \in \mathbb{N}^*)$

$$92^{94} = 4n (n \in \mathbb{N}^*)$$

Khi đó: $7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}} = 7^{4m} - 3^{4n} = (\overline{\dots 1}) - (\overline{\dots 1}) = 0$

Vậy A có tận cùng là 0 nên chia hết cho 10 nên $A = \frac{1}{2}(7^{2012^{2015}} - 3^{92^{94}}) : 5$.

Bài 7: Cho $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$. Chứng minh rằng A không phải là số chính phương. (**Đề HSG Buôn Mê Thuật năm 2018 - 2019**)

Lời giải:

Ta có các số $10^{2012}; 10^{2011}; 10^{2010}; 10^{2009}$ đều có chữ số tận cùng là 0.

Do đó: $A = 10^{2012} + 10^{2011} + 10^{2010} + 10^{2009} + 8$ có chữ số tận cùng là 8.

Vậy A không phải là số chính phương.

Bài 8: Tìm chữ số tận cùng của các số sau: (**Đề HSG Tân Uyên 2018 - 2019**)

a) 57^{2011}

b) 93^{1999}

Lời giải:

a) Xét 7^{2011} , ta có: $7^{2011} = (7^4)^{502} \cdot 7^3 = 2401^{502} \cdot 343$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 3

Vậy số 57^{2011} có chữ số tận cùng là 3

b) Xét 3^{1999} ta có: $3^{1999} = (3^4)^{499} \cdot 3^3 = 81^{499} \cdot 27$

Suy ra chữ số tận cùng bằng 7

Vậy số 93^{1999} có chữ số tận cùng là 7

Bài 9: (Đề HSG Yên Lạc 2018 - 2019)

a) Tìm chữ số tận cùng của các số sau: $49^{31}; 32^{2000}$

b) Chứng tỏ rằng: $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72

Lời giải:

a) Do 49 có chữ số tận cùng là 9 , khi đó nâng lên lũy bậc lẻ có chữ số tận cùng là 9

Vậy 49^{31} có chữ số tận cùng là 9

Ta có $32^{2000} = 32^{4 \cdot 500}$ có chữ số tận cùng là 0 nên khi nâng lên lũy thừa $4n$ có tận cùng là chữ số 0 .

Vậy 32^{2000} có chữ số tận cùng là 0

b) Vì $10^{2011} + 8$ có tổng các chữ số chia hết cho 9 nên tổng chia hết cho 9

Lại có $10^{2011} + 8$ có 3 chữ số tận cùng là 008 nên chia hết cho 8

Vậy $10^{2011} + 8$ chia hết cho 72 .

Bài 10: Cho $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$. Tìm chữ số tận cùng của A. (Đề HSG 2017 - 2018)**Lời giải:**

Ta có: $A = 5 + 5^2 + \dots + 5^{96}$

$$5A = 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{96} + 5^{97}$$

Do đó: $5A - A = 5^{97} - 5$

Suy ra:
$$A = \frac{5^{97} - 5}{4}$$

Ta có: 5^{97} có chữ số tận cùng là 5

Suy ra $5^{97} - 5$ có chữ số tận cùng là 0

Vậy chữ số tận cùng của A là 0 .

Bài 11: Chứng minh rằng: $10^{2002} + 8$ chia hết cho cả 9 và 2 . (Đề HSG Cao Lộc 2020 - 2021)**Lời giải:**

a) Ta có: $10^{2002} + 8 = 10 \dots 000 + 8$ (2002 số 0) $= 10 \dots 008$ (2001 số 0) có 8 tận cùng nên chia hết cho 2 và tổng các chữ số của nó là: $1 + 0 + \dots + 0 + 0 + 8 = 9$ nên chia hết cho 9

Vậy $10^{2002} + 8$ chia hết cho 9 và 2.

Bài 12: Cho $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{40}$. Tìm chữ số tận cùng của B. (Đề HSG Lục Ngạn 2020 - 2021)**Lời giải:**

Ta có: $B = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{40}$

$$2B = 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots + 2^{41}$$

Do đó: $2B - B = 2^{41} - 2$

Suy ra:
$$B = \frac{2^{41} - 2}{1}$$

Ta có: 2^{41} có chữ số tận cùng là 2.

Suy ra: $2^{41} - 2$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của B là 0.

Bài 13: Tìm chữ số tận cùng của dãy phép tính sau: $P = 2001.2002.2003.2004 + 2005.2006.2007.2008.2009$.

(Đề HSG Cao Lộc năm 2020 2021)

Lời giải:

Ta gọi $2001.2002.2003.2004$ là vế A. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế A lại với nhau ta được: $1.2.3.4 = 24$ nên vế A có chữ số tận cùng là 4.

Gọi $2005.2006.2007.2008.2009$ là vế B. Ta sẽ nhân chữ số tận cùng của các thừa số ở vế B lại với nhau ta được: $5.6.7.8.9 = 15120$ nên vế B có chữ số tận cùng là 0.

Vậy chữ số tận cùng của $P = 2001.2002.2003.2004 + 2005.2006.2007.2008.2009$ là $4 + 0 = 4$.

Bài 14: Tìm một chữ số tận cùng của: $A = 3^{n+2} + 2^{n+2} + 3^n + 2^n \ (n \in \mathbb{N})$. **(Đề HSG Kon Tum năm 2020 - 2021)**

Lời giải:

Ta có:
$$\begin{aligned} A &= 3^{n+2} + 2^{n+2} + 3^n + 2^n \\ &= 3^n \cdot 3^2 + 2^n \cdot 2^2 + 3^n + 2^n \\ &= 3^n (3^2 + 1) + 2^n (2^2 + 1) \\ &= 3^n \cdot 10 + 2^n \cdot 5 \end{aligned}$$

Ta có: $3^n \cdot 10$ có chữ số tận cùng là 0.

$2^n \cdot 5$ có chữ số tận cùng là 0.

Vậy A có chữ số tận cùng là 0

Bài 15: Tìm hai chữ số tận cùng của 2^{100} . **(Đề HSG năm 2016 - 2017)**

Lời giải:

Ta có: $2^{10} = 1024$

$$2^{100} = (2^{10})^{10} = 1024^{10} = (1024^2)^5$$

Mà 1024^2 có hai chữ số tận cùng là 76

Suy ra: $(1024^2)^0$ có hai chữ số tận cùng là 76

Vậy 2^{100} có hai chữ số tận cùng là 76.

Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>

Hướng dẫn tìm và tải các tài liệu ở đây

<https://forms.gle/LzVNwfMpYB9qH4JU6>