

Người làm: Nguyễn Thùy Trang

Zalo: Nguyễn Thùy Trang - số đt zalo: 0384714131

Email: thuytrang.hongbang@gmail.com

CD5: SỐ NGUYÊN TỐ, HỢP SỐ

Dạng 1. Sử dụng các tính chất của phép chia số nguyên

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 (LDP) Hưng Hà 2022 - 2023)

Tìm một số có ba chữ số biết rằng số đó chia hết cho 72 , các chữ số của nó sắp xếp theo thứ tự từ nhỏ đến lớn tỷ lệ với $2; 3; 4$

Lời giải

Gọi ba chữ số của số cần tìm là a, b, c . Điều kiện $a, b, c \in \mathbb{N}^*$. $a < b < c \leq 9$.

Theo bài ra: $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}$ và số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 .

Ta có số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 72 nên nó chia hết cho 9 , chia hết cho 8 .

Số có ba chữ số a, b, c chia hết cho 9

$$\Rightarrow (a+b+c):9 \quad \text{mà} \quad 0 < a+b+c < 27 \quad \text{nên} \quad a+b+c \in [9; 18]$$

$$\text{Từ } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4}, \text{ áp dụng tính chất dãy tỉ số bằng nhau ta có: } \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{a+b+c}{2+3+4}$$

$$a+b+c=9 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{9}{9} = 1$$

+) Nếu

$$\Rightarrow a=2; b=3; c=4.$$

Ta được các số $234; 243; 324; 342; 423; 432$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số 432 chia hết cho 72 (1)

$$a+b+c=18 \Rightarrow \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = \frac{18}{9} = 2$$

+) Nếu

$$\Rightarrow a=4; b=6; c=8.$$

Ta được các số $468; 486; 648; 684; 846; 864$. Nhưng số cần tìm phải chia hết cho 8 nên chỉ có số $648; 864$ chia hết cho 72 (2)

(1) (2)
Từ và ta được các số cần tìm là: $432; 648; 864$

Câu 2. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Cho số nguyên n ($n > 1$) thỏa mãn $n^2 + 4$ và $n^2 + 16$ là các số nguyên tố. Chứng minh n chia hết cho 5.

Lời giải

Với mọi số nguyên n thì n^2 chia cho 5 dư 0; 1 hoặc 4.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 1 thì $n^2 = 5k + 1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 4 = 5k + 1 + 4 = 5k + 5 \vdots 5$.

Do đó nên $n^2 + 4$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

+ Nếu n^2 chia 5 dư 4 thì $n^2 = 5k + 4$ ($k \in \mathbb{N}^*$) $\Rightarrow n^2 + 16 = 5k + 20 \vdots 5$.

Do đó $n^2 + 16$ không là số nguyên tố. Loại trừ trường hợp này.

Vậy $n^2 \vdots 5$, suy ra $n \vdots 5$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Cho m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp. Chứng minh rằng: $mn - m - n + 1$ chia hết cho 192 .

Lời giải

Ta có: $192 = 16 \cdot 12$

Do m, n là hai số chính phương lẻ liên tiếp nên ta có: $m = (2k - 1)^2$ và $n = (2k + 1)^2$ ($k \in \mathbb{N}^*$)

Khi đó: $mn - m - n + 1 = (m - 1)(n - 1)$

$$= [(1k - 1)^2 - 1][(2k + 1)^2 - 1] = (4k^2 - 4k)(4k^2 + 4k)$$

$$= 16k^2(k - 1)(k + 1) \vdots 16 \quad (1)$$

Ta có: $k(k - 1)(k + 1) \vdots 3$ và $k(k - 1)k(k + 1) \vdots 4$

Mà $(3, 4) = 1$ nên $k^2(k - 1)(k + 1) \vdots 12$

$$\Rightarrow mn - m - n + 1 = 16k^2(k - 1)(k + 1) \vdots 12 \quad (2)$$

Từ (1) và (2), suy ra: $mn - m - n + 1 \vdots 192$ (đpcm)

Câu 4. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Biết $f(x)$ chia cho $x - 3$ thì dư 7; chia cho $x - 2$ thì dư 5; chia cho $(x - 3)(x - 2)$ được thương là $3x$ và còn dư. Tìm $f(x)$.

Lời giải

Theo bài ra, ta có: $f(x) = (x - 3).A(x) + 7 \quad (1)$

$$f(x) = (x - 2).B(x) + 5 \quad (2)$$

$$f(x) = 3x(x - 3)(x - 2) + ax + b \quad (3)$$

Các đẳng thức trên đúng với mọi x nên:

+) Thay $x = 2$ vào (2); (3) được: $2a + b = 5 \quad (4)$

+) Thay $x=3$ vào (1) (3) được: $3a+b=7$ (5)

Từ (4) và (5), suy ra: $a=2; b=1$

Do đó dư là $2x+1$

Vậy $f(x)=3x(x-3)(x-2)+2x+1=3x^3-15x^2-20x+1$

Dạng 2. Áp dụng định lý Fermat

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Cẩm Thủy – Thanh Hóa 2022 - 2023)

Cho $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ thỏa mãn $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3)$. Chứng minh $a+b+c+d$ chia hết cho 3

Lời giải

Ta có $a^3 + b^3 = 2(c^3 - 8d^3) \Leftrightarrow a^3 + b^3 + c^3 + d^3 = 3c^3 - 15d^3$

Mà $3c^3 - 15d^3 \div 3$ nên $a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \div 3$ (1)

Dư trong phép chia a cho 3 là $\{0; \pm 1\}$ suy ra dư trong phép chia a^3 cho 3 cũng là $\{0; \pm 1\}$ hay $a \equiv a^3 \pmod{3}$

Tương tự ta có $b \equiv b^3 \pmod{3}; c \equiv c^3 \pmod{3}; d \equiv d^3 \pmod{3}$

$a+b+c+d \equiv a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \pmod{3}$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a+b+c+d$ chia hết cho 3.

Dạng 3. Phương pháp phân tích

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 Olympic Mỹ Đức, Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn điều kiện: $3xy + 2x - 5y = 6$

Lời giải

Ta có:

$$3xy + 2x - 5y = 6$$

$$\Rightarrow x(3y + 2) - 5y = 6$$

$$\Rightarrow 3x(3y + 2) - 15y = 18$$

$$\Rightarrow 3x(3y + 2) - 15y - 10 = 18 - 10$$

$$\Rightarrow 3x(3y + 2) - 5(3y + 2) = 8$$

$$\Rightarrow (3x - 5)(3y + 2) = 8$$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow (3x - 5) \in \mathbb{Z}; (3y + 2) \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow (3y + 2) \in U(8) = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$$

Mà $3y + 2$ là số chia cho 3 dư 2 $\Rightarrow 3y + 2 \in \{-1; 2; -4; 8\}$.

Ta có bảng sau:

$3y + 2$	- 4	- 1	2	8
$3x - 5$	- 2	- 8	4	1
y	- 2	- 1	0	2
x	1	- 1	3	2

$$(x; y) \in \{(1; - 2), (- 1; - 1), (3; 0), (2; 2)\}$$

Vậy

Câu 2. (HSG 7 huyện Cẩm Khê 2022 - 2023)

Tìm các số a, b, c nguyên dương thỏa mãn $a^3 + 3a^2 + 5 = 5^b$ và $a + 3 = 5^c$

Lời giải

Ta có:

$$a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow 5^b = a^3 + 3a^2 + 5 > a + 3 = 5^c$$

$$\Rightarrow 5^b > 5^c \Rightarrow b > c$$

$$\Rightarrow 5^b : 5^c$$

$$\Rightarrow (a^3 + 3a^2 + 5) : (a + 3)$$

$$\Rightarrow a^2(a + 3) + 5 : (a + 3)$$

$$\text{Vì } a^2(a + 3) : a + 3 \Rightarrow 5 : a + 3 \Rightarrow a + 3 \in U(5)$$

$$\Rightarrow a + 3 \in \{\pm 1; \pm 5\} \quad (1)$$

$$\text{Do } a \in \mathbb{Z}^+ \Rightarrow a + 3 \geq 4 \quad (2)$$

$$\text{Từ (1) và (2) } \Rightarrow a + 3 = 5 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 5 = 5^5$$

$$25 = 5^b \Rightarrow b = 2$$

$$2 + 3 = 5^c \Rightarrow c = 1$$

$$\text{Vậy } a = 2; b = 2; c = 1$$

Câu 3. (HSG 7 Đồng Nai, trường THCS - THPT Tri Thức 2022 - 2023)

Tìm n nguyên dương thỏa mãn $\frac{1}{27} \cdot 9^n = 3^n$

Lời giải

$$\frac{1}{27} \cdot 9^n = 3^n$$

$$\frac{1}{3^3} \cdot 3^{2n} = 3^n$$

$$3^{2n-3} = 3^n$$

$$2n - 3 = n$$

$$n = 3$$

Vậy $n = 3$

Câu 4. (HSG 7 huyện Nông Cống 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương a, b, c biết $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc$ và $a^2 = 2(b+c)$

Lời giải

Vì $a^2 = 2(b+c)$ nên a là số chẵn. Mà $a^3 - b^3 - c^3 = 3abc \Rightarrow a > b; a > c$.

Nên $2a > b+c \Rightarrow 4a > 2(b+c) \Rightarrow 4a > a^2 \Rightarrow a < 4$.

Mà a là số chẵn nguyên dương nên $a = 2b+c = 2$. Do b, c nguyên dương nên $b=c=1$.

Vậy $a=2, b=c=1$.

Câu 5. (HSG 7 huyện Thị Xã Kỳ Anh 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên dương n mà khi thay vào $A = \frac{3n+2}{n-1}$ thì A nhận được giá trị nguyên. Tổng tất cả các giá trị nguyên dương của n vừa tìm được bằng bao nhiêu?

Lời giải

$$A = \frac{3n+2}{n-1} = 3 + \frac{5}{n-1}$$

Để A nguyên dương thì $n-1 \in U(5)$

$$n-1 \in \{1; -1; 5; -5\}$$

$$n \in \{2; 0; 6; -4\}$$

Mà n nguyên dương $\Rightarrow n=6; n=2$

Câu 6. (HSG 7 huyện Yên Bái – Yên Bình 2022 - 2023)

Cho p là số nguyên tố lớn hơn 3. Biết $p+2$ cũng là số nguyên tố. Chứng tỏ rằng $p+1$ chia hết cho 6.

Lời giải

Vì p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên p lẻ, do đó $p+1$ chẵn
 $\Rightarrow p+1 \vdots 2$ (1)

Cũng do p là số nguyên tố lớn hơn 3 nên $p=3k+1$ hoặc $p=3k+2, (k \in \mathbb{N})$

Nếu $p=3k+1$ thì $p+2=3k+3=3(k+1) \vdots 3$

$\Rightarrow p+2$ không là số nguyên tố nên $p=3k+1$ không xảy ra.

Do đó $p=3k+2 \Rightarrow p+1=3k+3=3(k+1) \vdots 3$ (2)

Vì $(2,3)=1$ nên từ (1) và (2) ta có $(p+1) \vdots 6$

Dạng 4. Giải phương trình nghiệm nguyên dựa vào tính chất số nguyên tố

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Quan Sơn 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên (x, y) thỏa mãn $10^x + 6y = 2023$.

Lời giải

Ta có $10^x + 6y = 2023 \Rightarrow 10^x = 2023 - 6y$ là số nguyên.

Suy ra 10^x là số nguyên, từ đó $x \in \mathbb{N}$.

Khi đó $10^x = 2023 - 6y$ là một số lẻ, suy ra $x = 0$.

Từ đó tìm được $y = 337$.

Vậy $(x; y) = (0; 337)$.

Câu 2. (HSG 7 huyện Thường Xuân 2022 - 2023)

Tìm các số nguyên x, y thỏa mãn: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot y} + 1$

Lời giải

+) Trường hợp $y < 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là số nguyên

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ không là số nguyên (vì $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ với $a \neq 0, n \in \mathbb{N}^*$)

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

+) Trường hợp $y = 0$, ta có: $x^2 + x = 3^{2020 \cdot 0} + 1$

$$\Rightarrow x(x+1) = 2 = 1 \cdot 2 = (-2) \cdot (-1)$$

Vì $x \in \mathbb{Z}$ nên $x < x+1 \Rightarrow x = 1$ hoặc $x = -2$

Khi đó: $x = 1$ thì $y = 0$; $x = -2$ thì $y = 0$

+) Trường hợp $y > 0$, ta có:

$VP = x^2 + x = x(x+1)$ là tích hai số nguyên liên tiếp nên $x^2 + x$ chia hết cho 3 hoặc chia cho 3 dư 2

$VT = 3^{2020 \cdot y} + 1$ chia cho 3 dư 1.

$\Rightarrow$ Trường hợp này loại.

Vậy: Cặp số nguyên $(x; y)$ cần tìm là: $(1; 0); (-2; 0)$.

Câu 3. (HSG 7 huyện Sóc Sơn – Hà Nội 2022 - 2023)

Tìm các cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn: $x + 5y + xy = 2$

Lời giải

Ta có $x + 5y + xy = 2$

$$\Rightarrow (x + xy) + (5y + 5) = 7$$

$$\Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 7$$

$$\Rightarrow (x + 5)(y + 1) = 1 \cdot 7 = 7 \cdot 1 = (-1) \cdot (-7) = (-7) \cdot (-1)$$

$x + 5$	1	7	- 1	- 7
x	- 4	2	- 6	- 12

$y+1$	7	1	- 7	- 1
y	6	0	- 8	- 2

Kết luận: Vậy có 4 cặp số nguyên $(x; y)$ thỏa mãn $x+5y+xy=2$ là:
 $(-4; 6); (2; 0); (-6; -8); (-12; -2)$

Câu 4. (HSG 7 huyện Hà Đông, trường Lê Quý Đôn 2022 - 2023)

Tìm $x, y \in \mathbb{Z}$ biết: $xy+2x-y=5$

Lời giải

Ta có: $xy+2x-y=5 \Leftrightarrow x(y+2)-(y+2)=3 \Leftrightarrow (x-1)(y+2)=3$ (*)

Vì $x, y \in \mathbb{Z}$ là các số nguyên nên $x-1, y+2 \in \mathbb{Z}$. Do đó từ (*) ta có bảng sau:

$y+2$	3	1	- 1	- 3
$x-1$	1	3	- 3	- 1
x	2	4	- 2	0
y	1	- 1	- 3	- 5

Vậy $(x; y) \in \{(2; 1); (4; -1); (-2; -3); (0; -5)\}$

Dạng 5. Các bài toán về hai số nguyên tố cùng nhau

A. Trắc nghiệm (nếu có)

B. Tự luận

Câu 1. (HSG 7 huyện Nga Sơn -Thanh Hóa 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố p sao cho $p+2, p+6, p+8, p+14$ cũng là số nguyên tố.

Lời giải

Giả sử với $p=2$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=4; 2$ là hợp số $\Rightarrow p=2$ (loại).

+ Với $p=3$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+6=9; 3$ là hợp số $\Rightarrow p=3$ (loại).

+ Với $p=5$ là số nguyên tố $\Rightarrow p+2=7, p+6=11, p+8=13, p+14=19$ đều là số nguyên tố.

+ Với $p>5 \Rightarrow p=5k+1, p=5k+2, p=5k+3, p=5k+4, (k \in \mathbb{N})$

- Nếu $p=5k+1 \Rightarrow p+14=5k+1+14=5k+15; 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+14$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+1$ (loại).

- Nếu $p=5k+2 \Rightarrow p+8=5k+10=5(k+2); 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+8$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+2$ (loại).

- Nếu $p=5k+3 \Rightarrow p+2=5k+5; 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+2$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+3$ (loại).

- Nếu $p=5k+4 \Rightarrow p+6=5k+4+6=5k+10; 5$ và lớn hơn 5 $\Rightarrow p+6$ là hợp số $\Rightarrow p=5k+4$ (loại).

Vậy $p=5$ là số nguyên tố cần tìm.

Câu 2. (HSG 7 huyện Sông Lô – Vĩnh Phúc 2022 - 2023)

Tìm số nguyên tố P sao cho $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ đều là số nguyên tố.

Lời giải

Với $p = 2 \Rightarrow p^2 + 4 = 8; p^2 - 4 = 0 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là hợp số.

Vậy $p = 2$ (không thỏa mãn)

Với $p = 3 \Rightarrow p^2 + 4 = 13; p^2 - 4 = 5 \Rightarrow p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ là số nguyên tố.

Vậy $p = 3$ (thỏa mãn).

Với p là số nguyên tố và $p > 3 \Rightarrow p$ chia 3 dư 1 hoặc 2 $\Rightarrow p^2$ chia 3 dư 1 $\Rightarrow p^2 - 4 : 3$

Mà $p^2 - 4 > 3 \Rightarrow p^2 - 4$ là hợp số (không thỏa mãn).

Vậy $p = 3$ thì $p^2 + 4$ và $p^2 - 4$ cũng là các số nguyên tố.

Câu 3. (HSG 7 huyện Yên Thế - BG 2022 - 2023)

Cho P là số nguyên tố thỏa mãn $p - 2$ và $p + 2$ đều là số nguyên tố. Hỏi $3p + 2$ là số nguyên tố hay hợp số.

Lời giải

Xét $p = 2$ thì $p - 2 = 0$ và $p + 2 = 4$ không phải là số nguyên tố (KTM);

Xét $p = 3$ thì $p - 2 = 1$ không phải là số nguyên tố (KTM).

Xét $p = 5$ thì $p - 3 = 3$ và $p + 2 = 7$ là các số nguyên tố (TM)

Khi đó $3p + 2 = 17$ là số nguyên tố.

Xét $p > 5$ thì p có dạng $3k + 1$ hoặc $3k + 2$ ($k \in \mathbb{N}, k \geq 2$).

+) Với $p = 3k + 1$ thì $p + 2 = 3k + 3 = 3(k + 1) : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

+) Với $p = 3k + 2$ thì $p - 2 = 3k : 3$, mà $p > 5 \Rightarrow p$ là hợp số (KTM).

Vậy khi $p; p - 2; p + 2$ đều là số nguyên tố thì $3p + 2$ cũng là số nguyên tố. Tài liệu được chia sẻ bởi Website VnTeach.Com

<https://www.vnteach.com>