

HƯỚNG DẪN GIẢI ĐỀ SỐ 20

Câu 1:

- A. 32.

Lời giải

Chọn C

Giả sử $z = x + yi$ với $x, y \in \mathbb{R}$ có điểm biểu diễn là $M(x; y)$ trong mặt phẳng phức.

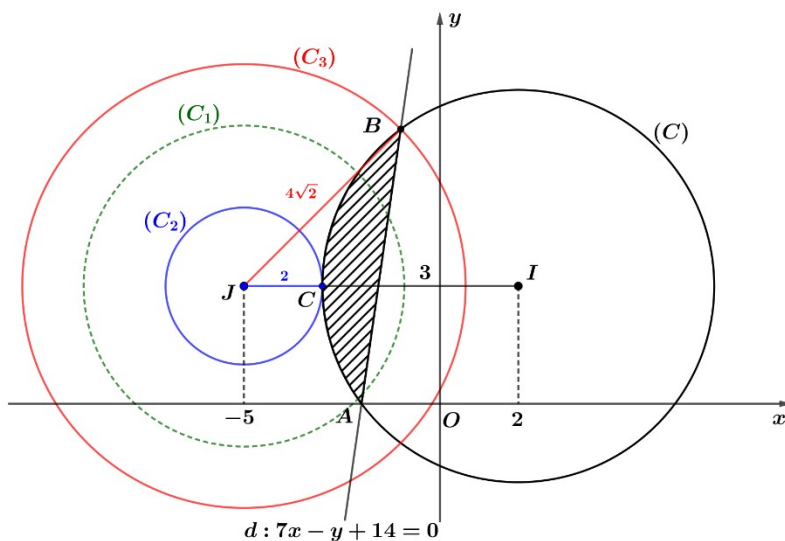
Ta có: $|z - 2 - 3i| \leq 5 \Leftrightarrow |x + yi - 2 - 3i| \leq 5 \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 3)^2 \leq 25. \quad (1)$

$\Rightarrow M$ thuộc hình tròn (C) có tâm $I(2;3)$ và bán kính $R=5$.

Ta lại có: $\left| \frac{z+5-4i}{\bar{z}-2+3i} \right| \leq 1 \Leftrightarrow |z+5-4i| \leq |\bar{z}-2+3i| \Leftrightarrow |x+yi+5-4i| \leq |x-yi-2+3i|$

$$\Leftrightarrow (x+5)^2 + (y-4)^2 \leq (x-2)^2 + (3-y)^2$$

$$\Leftrightarrow 7x - y + 14 \leq 0. \quad (2)$$



Đồ thị của (1) và (2) là phần gạch chéo (D) như hình vẽ trên với $A(-2;0), B(-1;7)$.

Ta biến đổi biểu thức P thành : $x^2 + y^2 + 10x - 6y - P = 0$ với điều kiện $P > -34$ thì đây là phương trình đường tròn (C_1) có tâm $J(-5;3)$ và bán kính $R_1 = \sqrt{P+34}$ (đường nét đứt màu xanh lá).

Hệ
$$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-3)^2 \leq 25 \\ 7x - y + 14 \leq 0 \\ x^2 + y^2 + 10x - 6y - P = 0 \end{cases}$$
 có nghiệm $(x; y) \Leftrightarrow (C_1)$ và (D) có điểm chung

$\Leftrightarrow$ Đường tròn (C_1) nằm giữa hai đường tròn (C_2) và đường tròn (C_3) .

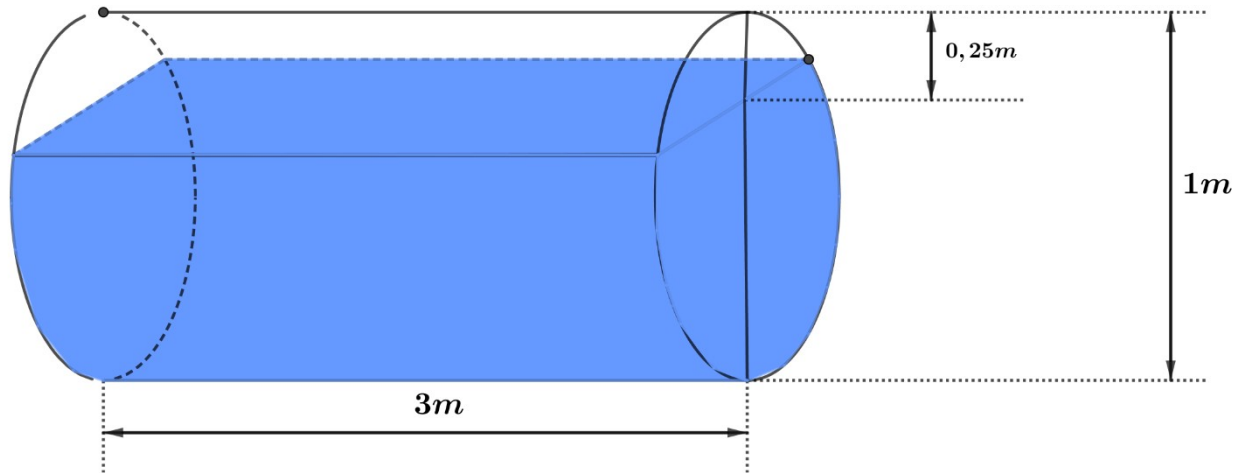
$$\Leftrightarrow 2 \leq R_1 = \sqrt{P+34} \leq 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow -30 \leq P \leq -2$$

$$\Rightarrow M = -2, m = -30.$$

$$\text{Vậy } M + m = -2 - 30 = -32.$$

Câu 2: Một téc nước hình trụ đang chứa nước được đặt nằm ngang, có chiều dài $3m$ và đường kính đáy $1m$. Hiện tại mặt nước trong téc cách phía trên đỉnh của téc nước là $0,25m$ (xem hình vẽ). Tính thể tích của nước trong téc (kết quả làm tròn đến hàng phần nghìn)?



A. $1,896 m^3$

B. $1,895 m^3$

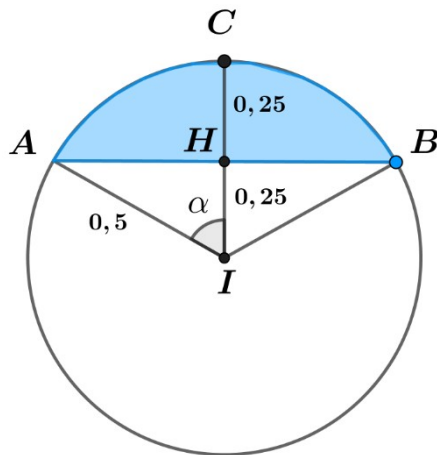
C. $1,167 m^3$

D. $1,768 m^3$

Lời giải

Chọn A

Ta có: $HC = 0,25 \Rightarrow IH = IC - HC = 0,5 - 0,25 = 0,25m$.



Xét tam giác IHA vuông tại H , ta có: $\cos \alpha = \frac{IH}{IA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} \Rightarrow \angle AIB = 2\alpha = \frac{2\pi}{3}$.

Diện tích hình quạt $IACB$ là: $S = \frac{\frac{2\pi}{3}}{2\pi} \pi R^2 = \frac{\pi}{12} m^2$.

Diện tích phần tô đậm là: $S_1 = S - S_{IAB} = \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sin 120^\circ = \frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} m^2$.

$$V_1 = h \cdot S_1 = 3 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16} \right) m^3.$$

Thể tích phần không chứa nước của téc nước hình trụ là:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 3 - 3 \left(\frac{\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{16}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{16} m^3 \approx 1,896 m^3.$$

Thể tích của nước trong tét là :

Câu 3: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho đường thẳng $\Delta: \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1}$ và mặt phẳng $(\alpha): x+2y-2z-1=0$. Biết mặt phẳng (P) chứa (Δ) và tạo với (α) một góc nhỏ nhất có phương trình dạng $7x+by+cx+d=0$. Giá trị $b+c+d$ là:

A. - 23

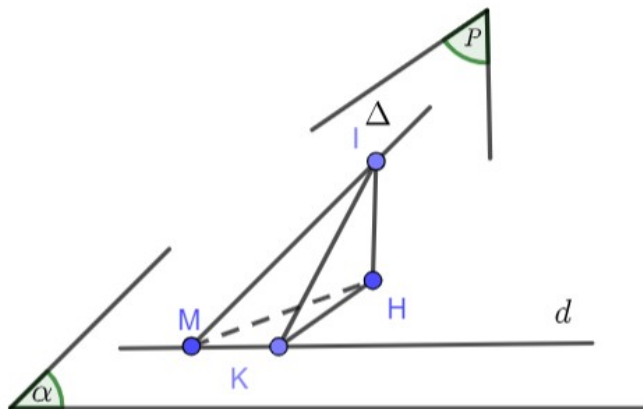
B. 3

C. - 5

D. - 3

Lời giải

Chọn A



Gọi M là giao điểm của Δ và mặt phẳng $(\alpha) \Rightarrow M(3; -4; -3)$.

Trên Δ lấy điểm I bất kì, gọi H là hình chiếu vuông góc của I trên mặt phẳng (α) , K là hình chiếu vuông góc của H trên đường thẳng d . Khi đó $(\vec{P}, (\alpha)) = \angle KH$.

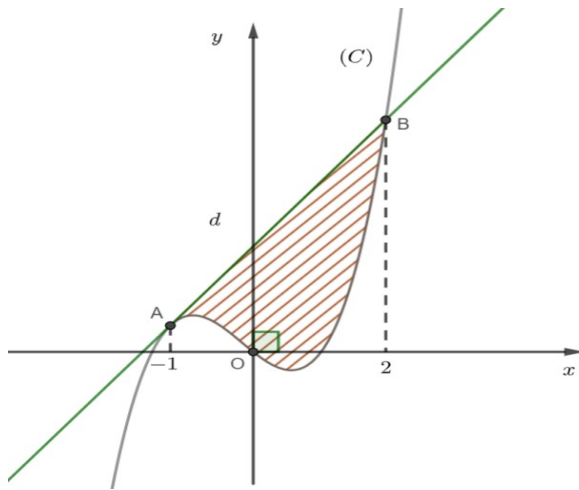
Ta có: $\sin \angle KH = \frac{IH}{IK} \geq \frac{IH}{IM}$ nên $\angle KH$ nhỏ nhất khi K trùng M . Khi K trùng M thì $IM \perp d$.

Nên: $\vec{n}_{(P)} = [\vec{u}_{\Delta}, \vec{u}_d] = [\vec{u}_{\Delta}, [\vec{u}_{\Delta}, \vec{n}_{\alpha}]] = (7; 10; -13)$

Vậy phương trình mặt phẳng: $(P): 7(x-1)+10y-13(z+1)=0$

$(P): 7x+10y-13z-20=0$

Câu 4: Cho hàm số $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ có đồ thị (C) . Biết rằng tiếp tuyến d của (C) tại điểm A có hoành độ bằng -1 cắt (C) tại điểm B có hoành độ bằng 2 (xem hình vẽ). Diện tích hình phẳng giới hạn bởi d và (C) (phần gạch chéo) bằng $\frac{m}{n}$ (với m, n nguyên dương và phân số $\frac{m}{n}$ tối giản). Giá trị $m+n$ bằng:



A. 29.

B. 15.

C. 31.

D. 13.

Lời giải

Chọn C

Giả sử phương trình tiếp tuyến $d: g(x) = mx + n$

Có: $g(x) - f(x) = -x^3 - ax^2 + (m - b)x + n - c$

Dựa vào giả thiết nên: $g(x) - f(x) = -x^3 - ax^2 + (m - b)x + n - c = -(x + 1)^2(x - 2)$

$$- \int_{-1}^2 (x + 1)^2(x - 2) dx = \frac{27}{4}$$

Nên diện tích hình phẳng:

Vậy $m + n = 31$.

Câu 5:

Có bao nhiêu số thực m để phương trình nghiệm thực phân biệt:

$$4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-m| + 2) \text{ có 3}$$

A. vô số.

B. 3.

C. 2.

D. 4.

Lời giải

Chọn B

$$4^{-|x-m|} \log_{\sqrt{3}}(x^2 - 2x + 3) + 2^{-x^2+x} \log_{\frac{1}{3}}(2|x-m| + 2)$$

Ta có

$$\Leftrightarrow 2.4^{-|x-m|} \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{-x^2+x} \log_3(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{x^2-2x} \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-m|} \log_3(2|x-m| + 2)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-2x+3} \log_3(x^2 - 2x + 3) = 2^{2|x-m|+2} \log_3(2|x-m| + 2) \quad (*)$$

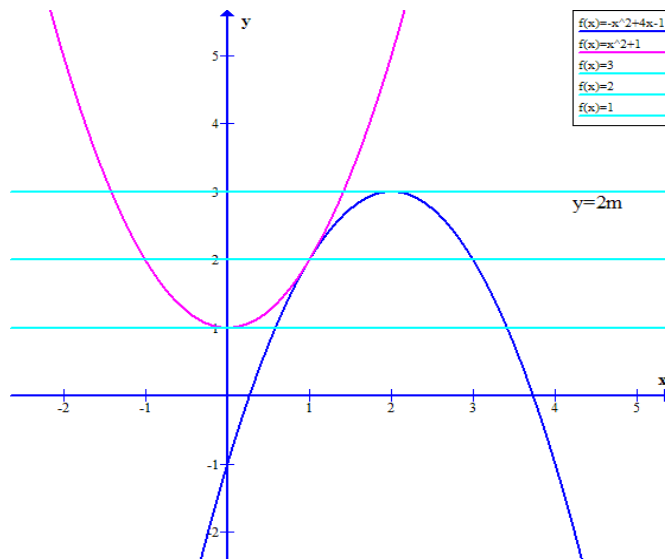
Xét hàm số $f(t) = 2^t \cdot \log_3 t, \forall t > 0$

$$\Rightarrow f'(t) = 2^t \cdot \log_3 t \cdot \ln t + 2^t \cdot \frac{1}{t \ln 3} > 0, \forall t > 0 \Rightarrow \text{hàm số } y = f(t) \text{ đồng biến trên } \mathbf{R}.$$

Suy ra phương trình (*) $\Leftrightarrow f(2|x-m| + 2) = f(x^2 - 2x + 3) \Leftrightarrow 2|x-m| + 2 = x^2 - 2x + 3$

$$\Leftrightarrow 2|x-m| = x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 2m = -x^2 + 4x - 1 \\ 2m = x^2 + 1 \end{cases}$$

Ta vẽ đồ thị của hai hàm số $y = -x^2 + 4x - 1 (C_1); y = x^2 + 1 (C_2)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.



$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m = 3 \\ 2m = 1 \\ 2m = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{3}{2} \\ m = 1 \\ m = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Vậy phương trình có ba nghiệm phân biệt
Suy ra có 3 giá trị của m .

Câu 6: Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i|$ và $(2 - z)(i + \bar{z})$ là số thực:

A. 4

B. 1

C. 3

D. 2

Lời giải

Chọn D

Giả sử số phức $z = x + yi$, $x, y \in \mathbb{R}$. Khi đó

$$2|z - i| = |z - \bar{z} + 2i| \Leftrightarrow 2\sqrt{x^2 + (y - 1)^2} = \sqrt{(2y + 2)^2} \Leftrightarrow 4x^2 - 16y = 0 \quad (1)$$

và $(2 - z)(i + \bar{z}) = (2 - x - yi)(x + (1 - y)i) = (2x + y - x^2 - y^2) + (2 - x - 2y)i$ là số thực nên ta

$$\text{có: } 2 - x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2 - 2y \quad (2)$$

Từ phương trình (1); (2) ta có

$$\begin{cases} x = 2 - 2y \\ 4x^2 - 16y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ y^2 - 3y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - 2y \\ y = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Vậy tồn tại hai số phức thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Câu 7: Biết tích phân $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} = \frac{1}{16} (a \ln 3 + b + c\sqrt{3})$, với a, b, c là các số nguyên. Giá trị $a + b + c$ bằng

A. 1.

B. 4.

C. 3.

D. 11.

Lời giải

Chọn C

Đặt $A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$ và $B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos^2 x dx}{\sin x + \sqrt{3} \cos x}$

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} dx$$

Ta có:

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \cdot 2 \cos^2\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\frac{\pi}{6} d \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}{\tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right)}$$

$$= \frac{1}{2} \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \right| \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{2} \ln \sqrt{3} = \frac{1}{4} \ln 3$$

Mặt khác ta lại có

$$A - 3B = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\sin^2 x - 3 \cos^2 x}{\sin x + \sqrt{3} \cos x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\sin x - \sqrt{3} \cos x) dx = (-\cos x - \sqrt{3} \sin x) \Big|_0^{\frac{\pi}{6}} = 1 - \sqrt{3}$$

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{4} \ln 3 \\ A - 3B = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3A + 3B = \frac{3}{4} \ln 3 \\ A - 3B = 1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow 4A = \frac{3}{4} \ln 3 + 1 - \sqrt{3}$$

Ta có hệ phương trình

$$\Rightarrow A = \frac{3}{16} \ln 3 + \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{16} (3 \ln 3 + 4 - 4\sqrt{3})$$

Vậy $a = 3; b = 4; c = -4 \Rightarrow a + b + c = 3$

Câu 8: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho mặt phẳng $(P): 2x - 2y + z - 5 = 0$. Viết phương trình mặt phẳng (Q) song song với mặt phẳng (P) , cách (P) một khoảng bằng 3 và cắt trục Ox tại điểm có hoành độ dương.

A. $(Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$

B. $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$

C. $(Q): 2x - 2y + z - 19 = 0$

D. $(Q): 2x - 2y + z - 8 = 0$

Lời giải

Chọn B

(Q) song song (P) nên phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - 2y + z + C = 0$; $C \neq -5$

Ta có,

$$M(0;0;5) \in (P)$$

Chọn

$$d((P);(Q)) = d(M;(Q)) = \frac{|5 + C|}{\sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2}} = 3 \Leftrightarrow \begin{cases} C = 4 \\ C = -14 \end{cases}$$

Ta có

$C = 4 \Rightarrow (Q): 2x - 2y + z + 4 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_1(-2;0;0)$ có hoành độ âm nên trường hợp này (Q) không thỏa đề bài.

$C = -14 \Rightarrow (Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$ khi đó (Q) cắt Ox tại điểm $M_2(7;0;0)$ có hoành độ dương do đó $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$ thỏa đề bài.

Vậy phương trình mặt phẳng $(Q): 2x - 2y + z - 14 = 0$.

Câu 9: Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(3;0;4)$ và mặt cầu (S) :

$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 = 9$. Qua điểm M vẽ ba tia $Mu; Mv; Mw$ đôi một vuông góc với

nhau và cắt mặt cầu (S) lần lượt tại các điểm $A; B; C$. Gọi E là đỉnh đối diện với đỉnh M của hình hộp chữ nhật có ba cạnh là $MA; MB; MC$. Biết điểm E luôn thuộc một mặt cầu cố định khi ba tia $Mu; Mv; Mw$ thay đổi thỏa mãn đề bài. Tính bán kính mặt cầu đó:

A. $2\sqrt{3}$.

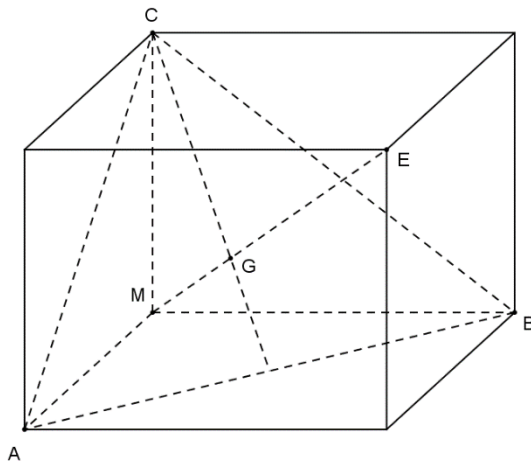
B. $4\sqrt{2}$.

C. $\sqrt{13}$.

D. $\sqrt{11}$!

Lời giải

Chọn D



Mặt cầu (S) có tâm $I(1; -2; 4)$, bán kính $R=3$.

Gọi $G(x; y; z)$ là trọng tâm tam giác ABC .

$$\Rightarrow \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{ME}; \quad \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = 3\overrightarrow{IG}$$

$$\Rightarrow 9MG^2 = 9MG^2 = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2 = MA^2 + MB^2 + MC^2 + 2(\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MA}) \\ = MA^2 + MB^2 + MC^2$$

$$\text{Lại có: } 9IG^2 = 9IG^2 = (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC})^2 = IA^2 + IB^2 + IC^2 + 2(\overrightarrow{IA} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IC} + \overrightarrow{IC} \cdot \overrightarrow{IA}) =$$

$$= 3(IA^2 + IB^2 + IC^2) - (\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB})^2 - (\overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC})^2 - (\overrightarrow{IC} - \overrightarrow{IA})^2 =$$

$$= 3(IA^2 + IB^2 + IC^2) - (AB^2 + BC^2 + CA^2) = 3(IA^2 + IB^2 + IC^2) - 2(MA^2 + MB^2 + MC^2)$$

$$\Rightarrow 9IG^2 = 9R^2 - 18MG^2 \Leftrightarrow IG^2 + 2MG^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-4)^2 + 2[(x-3)^2 + y^2 + (z-4)^2] = 9$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{7}{3}\right)^2 + \left(y + \frac{2}{3}\right)^2 + (z-4)^2 = \frac{11}{9}$$

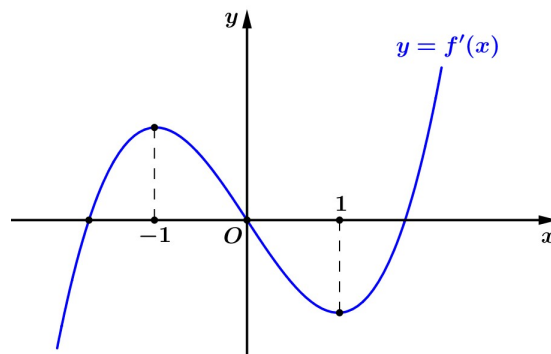
$\Rightarrow$ Điểm G thuộc mặt cầu tâm $I_1\left(\frac{7}{3}; -\frac{2}{3}; 4\right)$, bán kính $R_1 = \frac{\sqrt{11}}{3}$.

Mà $\overrightarrow{MI_1} = \left(-\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; 0\right)$; $\overline{ME} = 3\overline{MG} \Rightarrow \overline{MI} = 3\overline{MI_1}$.

$\Rightarrow I; E$ lần lượt là ảnh của $I_1; G$ qua phép vị tự tâm M , tỷ số $k=3$.

Vậy điểm E luôn thuộc mặt cầu tâm I , bán kính $R_2 = \sqrt{11}$.

Câu 10: Cho hàm số $f(x)$ có đạo hàm trên $\mathbb{R}$ và $f(1)=1$. Đồ thị hàm số $y=f'(x)$ như hình bên. Có bao nhiêu số nguyên dương a để hàm số $y=|4f(\sin x)+\cos 2x-a|$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$?



A. 2.

B. 3.

C. Vô số.

D. 5.

Lời giải

Chọn B

Đặt $g(x) = |4f(\sin x) + \cos 2x - a| \Rightarrow g(x) = \sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}$.

$$\Rightarrow g'(x) = \frac{[4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x][4f(\sin x) + \cos 2x - a]}{\sqrt{[4f(\sin x) + \cos 2x - a]^2}}$$

Ta có $4\cos x \cdot f'(\sin x) - 2\sin 2x = 4\cos x[f'(\sin x) - \sin x]$.

Với $x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ thì $\cos x > 0, \sin x \in (0; 1) \Rightarrow f'(\sin x) - \sin x < 0$.

Hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ khi $4f(\sin x) + \cos 2x - a \geq 0, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow 4f(\sin x) + 1 - 2\sin^2 x \geq a, \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$$

Đặt $t = \sin x$ được $4f(t) + 1 - 2t^2 \geq a, \forall t \in (0; 1)$ (*).

Xét $h(t) = 4f(t) + 1 - 2t^2 \Rightarrow h'(t) = 4f'(t) - 4t = 4[f'(t) - 1]$.

Với $t \in (0;1)$ thì $h'(t) < 0 \Rightarrow h(t)$ nghịch biến trên $(0;1)$.

Do đó (*) $\Leftrightarrow a \leq h(1) = 4f(1) + 1 - 2 \cdot 1^2 = 3$. Vậy có 3 giá trị nguyên dương của a thỏa mãn.