

Người làm: Trần Thị Huế

Zalo: Hue - số đt zalo: 0982510827

Email: ducminh1212@gmail.com

**CD: TÍNH SỐ ĐO GÓC. CHỨNG MINH GÓC BẰNG NHAU.
CHỨNG MINH ĐOẠN THẲNG BẰNG NHAU.
CHỨNG MINH BA ĐIỂM THẲNG HÀNG.
BẤT ĐẲNG THỨC TAM GIÁC.**

Câu 1. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường THCS TRÀ MY 2018 - 2019)

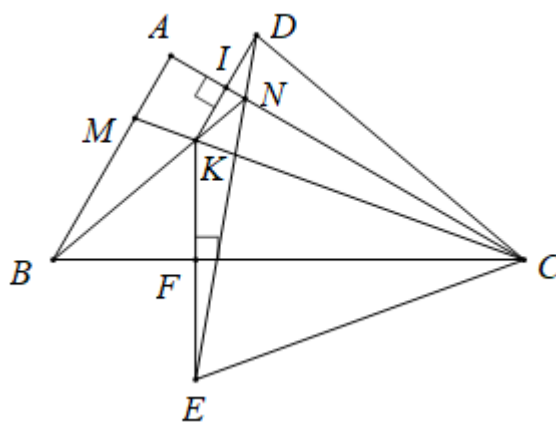
Cho tam giác ABC vuông ở A có góc C bằng 30° . Trên cạnh AB lấy điểm M sao cho góc BCM bằng $\frac{2}{3}$ góc ACB , trên cạnh AC lấy điểm N sao cho góc CBN bằng $\frac{2}{3}$ góc ABC . Gọi giao điểm của CM và BN là K .

1/ Tính góc CKN .

2/ Gọi F và I theo thứ tự là hình chiếu của điểm K trên BC và AC . Trên tia đối của tia IK lấy điểm D sao cho $IK = ID$, trên tia KF lấy điểm E sao cho $KF = FE$ ($E \neq K$). Chứng minh $\triangle DCE$ là tam giác đều.

3/ Chứng minh ba điểm D, N, E thẳng hàng.

Lời giải



$$\hat{B} = 60^\circ \text{ (do } \hat{A} = 90^\circ; \hat{C} = 30^\circ)$$

$$\hat{CBN} = \frac{2}{3} \hat{ABC} = \frac{2}{3} \cdot 60^\circ = 40^\circ$$

$$\hat{BCM} = \frac{2}{3} \hat{ACB} = \frac{2}{3} \cdot 30^\circ = 20^\circ$$

$$\hat{BKC} = 180^\circ - (\hat{CBN} + \hat{BCM}) = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow \hat{CKN} = 180^\circ - 120^\circ = 60^\circ \text{ (hai góc kề bù)}$$

$$1) \triangle KIC = \triangle DIC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CD \text{ và } \hat{DCI} = \hat{ICK} \text{ (1)}$$

$$\triangle KFC = \triangle EFC \text{ (c.g.c)} \Rightarrow CK = CE \text{ và } \hat{KCF} = \hat{ECF} \text{ (2)}$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow CD = CE \Rightarrow \triangle DCE$ cân

Có: $\angle DCE = 2\angle ABC = 60^\circ \Rightarrow \triangle DCE$ đều

2) Xét tam giác vuông $\triangle ANB$ có $\angle ANB = 90^\circ - 20^\circ = 70^\circ \Rightarrow \angle BNC = 110^\circ$

$\triangle CND = \triangle CNK$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle DNC = \angle KNC = 110^\circ \Rightarrow \angle CDN = 60^\circ$ ($\angle NCD = 10^\circ$; $\angle DNC = 110^\circ$)

Có $\triangle CDE$ đều (cmt) $\Rightarrow \angle CDE = 60^\circ$

Do đó $\angle CDN = \angle CDE = 60^\circ$

Suy ra: Tia DN trùng với tia DE hay 3 điểm D, N, E thẳng hàng

Câu 2. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Quế Sơn 2018 - 2019)

Cho tam giác ABC có $\angle B < 90^\circ$ và $\angle B = 2\angle C$. Kẻ đường cao AH . Trên tia đối của tia BA lấy điểm E sao cho $BE = BH$. Đường thẳng HE cắt AC tại D .

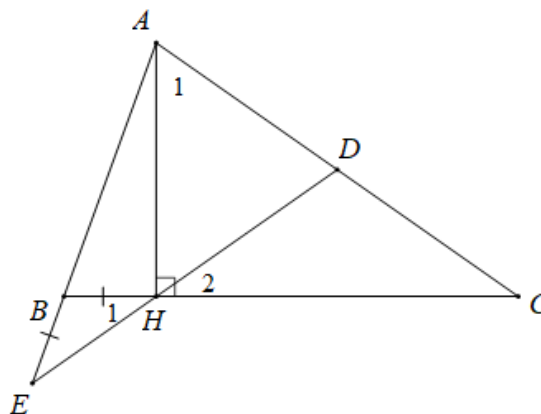
a) Chứng minh $\angle BEH = \angle ACB$

b) Chứng minh $DH = DC = DA$

c) Lấy B' sao cho H là trung điểm của BB' . Chứng minh tam giác $AB'C$ cân

c) Chứng minh $AE = HC$

Lời giải



a) $\triangle BEH$ cân tại B nên $\angle E = \angle H_1$; $\angle ABC = \angle E + \angle H_1 = 2\angle E$;

$\angle ABC = 2\angle E \Rightarrow \angle BEH = \angle ACB$

b) Chứng tỏ được $\triangle DHC$ cân tại D nên $DC = DH$

$\triangle DAH$ có: $\angle DAH = 90^\circ - \angle C$; $\angle DHA = 90^\circ - \angle H_2 = 90^\circ - \angle C$

$\Rightarrow \triangle DAH$ cân tại D nên $DA = DH$

c) $\triangle ABB'$ cân tại A nên $\angle B = \angle B' = 2\angle C$

$\angle B' = \angle H_1 + \angle C$ nên $2\angle C = \angle H_1 + \angle C \Rightarrow \angle C = \angle H_1 \Rightarrow \triangle AB'C$ cân tại B'

d) $AB = AB' = CB'$; $BE = BH = B'H$

Có: $AE = AB + BE$; $HC = CB' + B'H \Rightarrow AE = HC$

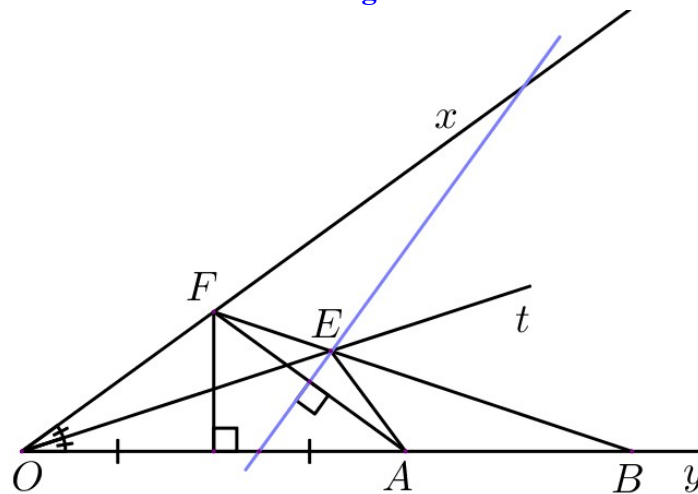
Câu 3. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vị Thanh 2018 - 2019)

Cho góc nhọn $\angle xOy$ và tia phân giác Ot . Trên tia Oy lấy điểm A . Đường trung trực của OA cắt tia Ox tại F . Trên tia Oy lấy điểm B sao cho $AB = AF$, BF cắt Ot tại E .

a) Chứng minh E thuộc đường trung trực của FA

b) So sánh EF và EB

Lời giải



a) F thuộc đường trung trực của $OA \Rightarrow FO = FA \Rightarrow \triangle OFA$ cân tại F
 $\Rightarrow \angle FOA = \angle FAO = 2\angle EOB = 2\angle FOE$

Do $AF = AB \Rightarrow \triangle FAB$ cân tại $A \Rightarrow \angle AFB = \angle ABF \Rightarrow \angle FAO = 2\angle FBA$
 $\Rightarrow \angle EOB = \angle EBO$

Vậy $OE = EB$

$\triangle OFE = \triangle BAE$ ($OF = AB, OE = EB, \angle FOE = \angle EBO$)

$\Rightarrow EF = EA$

$\Rightarrow E$ thuộc đường trung trực của FA .

b) $\angle FOA < 90^\circ \Rightarrow \angle FOE < 45^\circ$

$\triangle OFE$ có $\angle FEO = 180^\circ - 3\angle FOE = 3(60^\circ - \angle FOE) > 3(60^\circ - 45^\circ) = 45^\circ > \angle FOE$

Nên $EF < OE$ mà $OE = EB$

Do đó $EF < EB$

Câu 4. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Châu Đốc 2018 - 2019)

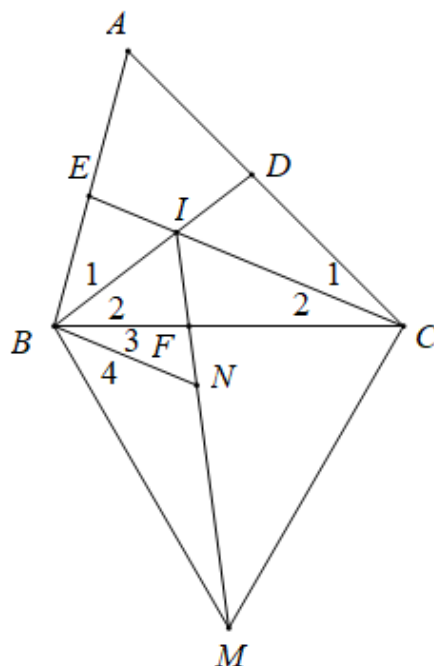
Cho $\triangle ABC$ nhọn có góc A bằng 60° . Phân giác $\angle ABC$ cắt AC tại D , phân giác $\angle ACB$ cắt AB tại E . BD cắt CE tại I .

a) Tính số đo $\angle BIC$

b) Trên cạnh BC lấy điểm F sao cho $BF = BE$. Chứng minh $\triangle CID = \triangle CIF$

c) Trên tia IF lấy điểm M sao cho $IM = IB + IC$. Chứng minh $\triangle BCM$ đều

Lời giải



a) BD là phân giác của $\triangle ABC$ nên $\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2} \angle ABC$

CE là phân giác của $\triangle ACB$ nên $\angle BCE = \angle ECB = \frac{1}{2} \angle ACB$

Mà tam giác ABC có $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + \angle ABC + \angle ACB = 180^\circ$
 $\Rightarrow \angle ABC + \angle ACB = 120^\circ \Rightarrow \angle CBD + \angle BCE = 60^\circ \Rightarrow \angle BIC = 120^\circ$

b) $\triangle BIE = \triangle BIF$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle BIE = \angle BIF$

$\angle BIC = 120^\circ \Rightarrow \angle BIE = 60^\circ \Rightarrow \angle BIE = \angle BIF = 60^\circ$

Mà $\angle BIE + \angle BIF + \angle CIF = 180^\circ \Rightarrow \angle CIF = 60^\circ$

$\angle CID = \angle BIE = 60^\circ$ (đối đỉnh) $\Rightarrow \angle CIF = \angle CID = 60^\circ \Rightarrow \triangle CID = \triangle CIF$ (g.c.g)

c) Trên đoạn IM lấy điểm N sao cho $IN = IB \Rightarrow NM = IC$

$\Rightarrow \triangle BIN$ đều $\Rightarrow BN = BI$ và $\angle BNM = 120^\circ \Rightarrow \triangle BNM = \triangle BIC$ (g.c.g)

$\Rightarrow BM = BC$ và $\angle B_2 = \angle B_4 \Rightarrow \triangle BCM$ đều

Câu 5. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Bến Lức 2018 - 2019)

Trùng bài (HSG 7 huyện Than Uyên, tỉnh, trường 2022 - 2023)

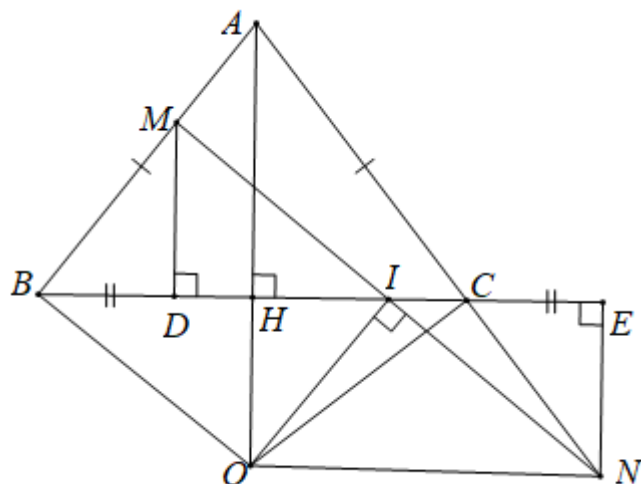
Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

a) $DM = EN$

b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) $\triangle MDB = \triangle NEC$ (g.c.g) $\Rightarrow DM = EN$ (cặp cạnh tương ứng)
 $\Rightarrow MB = NC$ (cặp cạnh tương ứng)

b) Ta có:

$\triangle MDI$ vuông tại D : $\angle DMI + \angle MID = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

$\triangle NEI$ vuông tại E : $\angle ENI + \angle NIE = 90^\circ$ (tổng hai góc nhọn trong tam giác vuông)

Mà $\angle MID = \angle NIE$ (đối đỉnh) nên $\angle DMI = \angle ENI$

$\Rightarrow \triangle MDI = \triangle NEI$ (g.c.g) $\Rightarrow IM = IN$ (cặp cạnh tương ứng)

Vậy BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

c) Gọi H là chân đường vuông góc kẻ từ A xuống BC .

$\triangle AHB = \triangle AHC$ (cạnh huyền – cạnh góc vuông) $\Rightarrow \angle HAB = \angle HAC$ (cặp góc tương ứng)

Gọi O là giao điểm của AH với đường thẳng vuông góc với MN kẻ từ I

$\triangle OAB = \triangle OAC$ (c.g.c) $\Rightarrow \angle OBA = \angle OCA$ (cặp góc tương ứng) (1)

$\Rightarrow OC = OB$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OIM = \triangle OIN$ (c.g.c) $\Rightarrow OM = ON$ (cặp cạnh tương ứng)

$\triangle OBM = \triangle OCN$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle OBM = \angle OCN$ (cặp góc tương ứng) (2)

Từ (1) và (2) suy ra $\angle OCA = \angle OCN = 90^\circ$, do đó $OC \perp AC$

Vậy điểm O cố định

Câu 6. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Nguyễn Trãi 2018 - 2019)

1. Cho tam giác ABC cân tại A , $\angle B = 50^\circ$. Gọi K là điểm trong tam giác sao cho $\angle KBC = 10^\circ, \angle KCB = 30^\circ$.

a) Chứng minh $BA = BK$

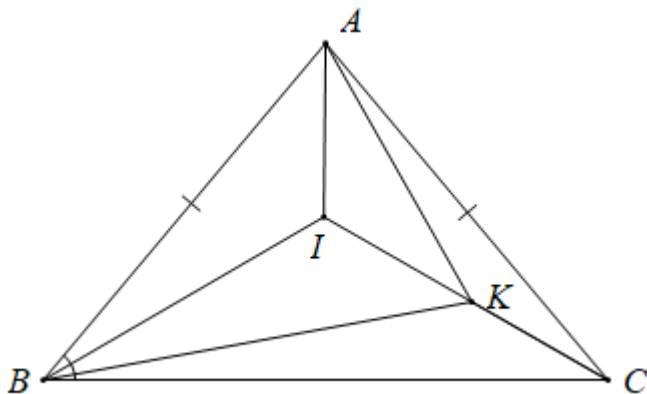
b) Tính số đo $\angle BAK$

2. Cho $\angle xAy = 60^\circ$ có tia phân giác Az . Từ điểm B trên Ax kẻ BH vuông góc với Ay tại H , kẻ BK vuông góc với Az và Bt song song với Ay , Bt cắt Az tại C . Từ C kẻ CM vuông góc với Ay tại M . Chứng minh:

- a) K là trung điểm của AC
 b) $\triangle KMC$ là tam giác đều
 b) Cho $BK = 2$ cm. Tính các cạnh $\triangle AKM$

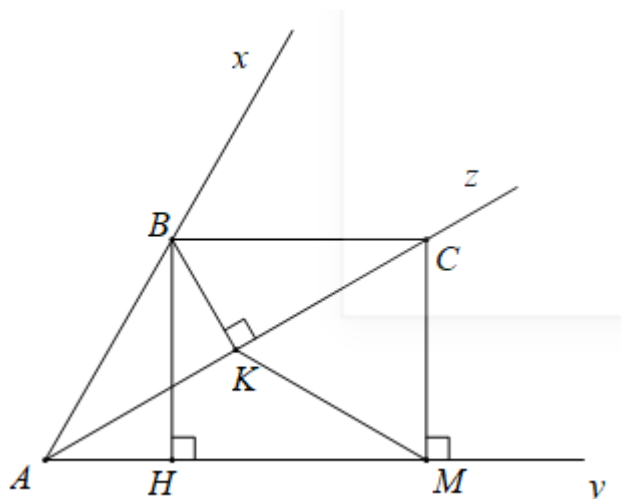
Lời giải

1.



- a) Vẽ tia phân giác $\angle ABK$ cắt CK ở I , ta có: $\triangle ABC$ cân nên $AB = AC$
 $\Rightarrow \triangle BIA = \triangle CIA$ (c.c.c) $\Rightarrow \angle BIA = \angle CIA = 120^\circ$
 do đó $\triangle BIA = \triangle BIK$ (g.c.g) $\Rightarrow BA = BK$
 b) Từ phần a ta tính được $\angle BAK = 70^\circ$.

2)



a) $\triangle ABC$ cân tại B do $\widehat{CAB} = \widehat{ACB} (= \widehat{MAC})$ và BK là đường cao nên BK là đường trung tuyến $\Rightarrow K$ là trung điểm của AC.

b) $\triangle ABH = \triangle BAK$ (cạnh huyền – góc nhọn) $\Rightarrow BH = AK$ mà $AK = \frac{1}{2} AC \Rightarrow BH = \frac{1}{2} AC$

Ta có: $BH = CM$ (tính chất đoạn chắn) mà $CK = BH = \frac{1}{2} AC \Rightarrow CM = CK \Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác cân (1)

Mặt khác: $\widehat{MCB} = 90^\circ$ và $\widehat{ACB} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MCK} = 60^\circ$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \triangle MKC$ là tam giác đều

c) Vì $\triangle ABK$ vuông tại K mà $\widehat{KAB} = 30^\circ \Rightarrow AB = 2BK = 2.2 = 4(\text{cm})$

Vì $\triangle ABK$ vuông tại K nên theo Pytago ta có: $AK = \sqrt{AB^2 - BK^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

Mà $KC = \frac{1}{2} AC \Rightarrow KC = AK = \sqrt{12}$

Theo phần b) $AB = BC = 4; AH = BK = 2; HM = BC$ (HBCM là hình chữ nhật)
 $\Rightarrow AM = AH + HM = 6$

Câu 7. (HSG 7 huyện Phú Lý, trường Lý Tự Trọng 2018 - 2019)

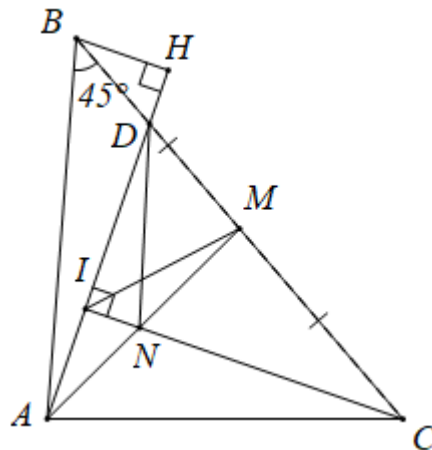
Cho đoạn thẳng BC cố định, M là trung điểm của đoạn thẳng BC . Vẽ góc $\widehat{CBx} = 45^\circ$, trên tia Bx lấy điểm A sao cho độ dài đoạn thẳng BM và BA tỉ lệ với 1 và $\sqrt{2}$. Lấy điểm D bất kỳ thuộc đoạn thẳng BM . Gọi H và I lần lượt là hình chiếu của B và C trên đường thẳng AD . Đường thẳng d cắt CI tại N . Chứng minh rằng:

a) DN vuông góc với AC

b) $BH^2 + CI^2$ có giá trị không đổi khi D di chuyển trên đoạn thẳng BM

- c) Tia phân giác của góc HIC luôn đi qua một điểm cố định.

Lời giải



- a) Từ M kẻ tia My vuông góc với BC và cắt tia Bx tại A'

Tam giác BMA' vuông cân tại M nên $MB : BA' = 1 : \sqrt{2}$

Suy ra $A \equiv A'$ nên $AM \perp BC$

Tam giác ADC có AM và CI là đường cao nên N là trực tâm của tam giác ADC . Suy ra $DN \perp AC$

vuông góc với AC

- b) Ta có $\triangle AMB = \triangle AMC$ (c.g.c) nên $AB = AC$ và góc $\angle ACB = 45^\circ$

Tam giác ABC vuông cân tại A và có $\angle BAH = \angle ACI = 90^\circ - \angle CAH$

H, I là hình chiếu của B và C trên AD nên $\angle H = \angle I = 90^\circ$

$$\triangle AIC = \triangle BHA \Rightarrow BH = AI$$

Suy ra (cạnh huyền - góc nhọn)

$$BH^2 + CI^2 = BH^2 + AH^2 = AB^2$$

(không đổi)

- c) $\triangle BHM = \triangle AIM \Rightarrow HM = MI$ và $\angle BMH + \angle BMI = 90^\circ \Rightarrow \triangle HMI$ vuông cân $\Rightarrow \angle HMI = 45^\circ$

Mà $\angle HIC = 90^\circ \Rightarrow \angle HIM = \angle MIC = 45^\circ \Rightarrow IM$ là tia phân giác HIC

Vậy tia phân giác của HIC luôn đi qua điểm M cố định

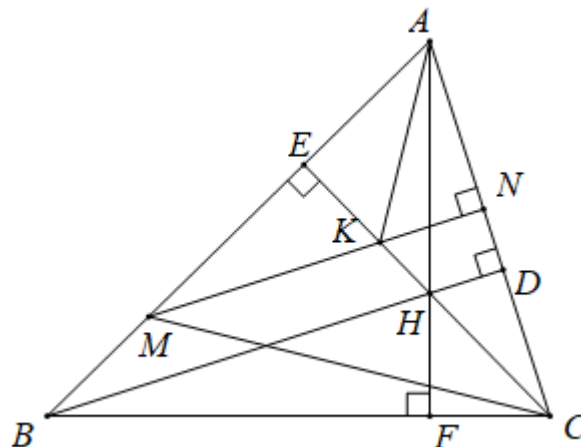
Câu 8. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Vạn Long 2018 - 2019)

Cho tam giác nhọn ABC có $AB > AC$, ba đường cao BD, CE và AF cắt nhau tại H . Lấy điểm M trên cạnh AB sao cho $AM = AC$. Gọi N là hình chiếu của M trên AC ; K là giao điểm của MN và CE và

a) Chứng minh hai góc KAH và MCB bằng nhau

b) Chứng minh $AB + CE > AC + BD$

Lời giải



a) Nêu được $AK \perp MC \Rightarrow KAH = MCB$

b) Chứng minh $CE = MN$

Viết được $AB - AC > BD - CE \Rightarrow BM > BD - MN$

$MI \perp BD \Rightarrow BM > BI$

Vậy $AB + CE > AC + BD$

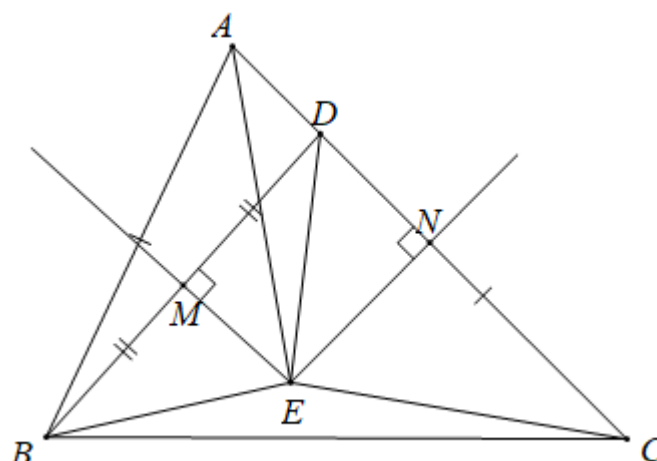
Câu 9. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Hưng Vũ 2022 - 2023)

Cho $\triangle ABC$ có $AB < AC$. Trên cạnh AC lấy điểm D sao cho $CD = AB$. Hai đường trung trực của BD, AC cắt nhau tại E . Chứng minh rằng:

a) $\triangle AEB = \triangle CED$

b) AE là tia phân giác trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$.

Lời giải



a) Xét $\triangle BEM$ và $\triangle DEM$ có: $BM = DM$ (gt) ME cạnh chung

$\Rightarrow \triangle BEM = \triangle DEM$ (c.g.c) $\Rightarrow BE = DE$ (1)

Xét $\triangle AEN$ và $\triangle CEN$ có: $AN = CN$ (gt); NE chung $\Rightarrow \triangle AEN = \triangle CEN$ (c.g.c) $\Rightarrow AE = CE$ (2) và $AB = CD$ (gt) (3)

Từ (1), (2), (3) $\Rightarrow \triangle AEB = \triangle CED$ (c.c.c)

b) Vì $\angle EAN = \angle ECN$

Mà $\angle BAE = \angle ECN$ do $(\triangle AEB = \triangle CED)$ nên $\angle BAE = \angle EAN$

Mặt khác: AE nằm giữa hai tia AB, AN nên AE là tia phân giác của góc trong tại đỉnh A của $\triangle ABC$

Câu 10. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường 2017 - 2018)

1) Cho tam giác ABC vuông cân tại A . Gọi M là trung điểm BC , D là điểm thuộc đoạn BM (D khác B và M). Kẻ các đường thẳng BH, CI lần lượt vuông góc với đường thẳng AD tại H và I . Chứng minh rằng:

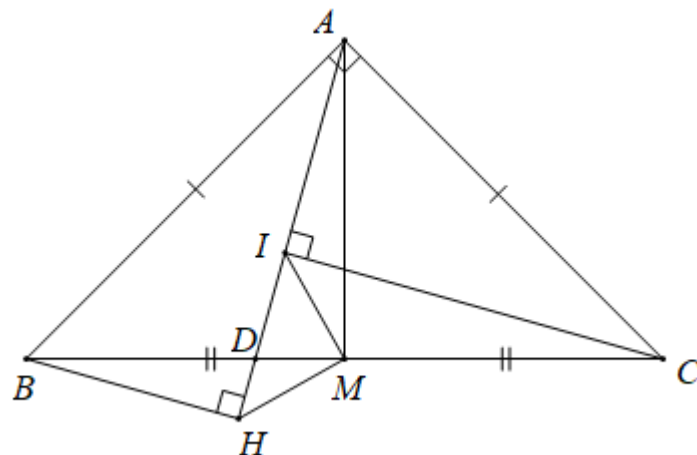
a) $\angle BAM = \angle ACM$ và $BH = AI$

b) Tam giác MHI vuông cân

2) Cho tam giác ABC có $\angle A = 90^\circ$. Kẻ $AH \perp BC$ ($H \in BC$). Tia phân giác của $\angle BAC$ cắt cạnh BC ở điểm D và tia phân giác của $\angle HAB$ cắt cạnh BC ở E . Chứng minh rằng $AB + AC = ED + BC$

Lời giải

1)



a) Chứng minh : $\angle BAM = \angle ACM$

Chứng minh được: .

Lập luận $\angle BAM = \angle CAM = 45^\circ$

Tính ra được $\angle ACM = 45^\circ \Rightarrow \angle BAM = \angle ACM$

Chứng minh : $BH = AI$

Chỉ ra $\angle BAH = \angle ACI$ (cùng phụ $\angle DAC$)

Chứng minh được $\triangle AIC = \triangle BHC$ (ch - gn) $\Rightarrow BH = AI$ (2 cạnh tương ứng)

b) Tam giác MHI vuông cân

+ Chứng minh được $AM \perp BC$

Chứng minh được $AM = MC$

Chứng minh được $\widehat{HAM} = \widehat{ICM}$

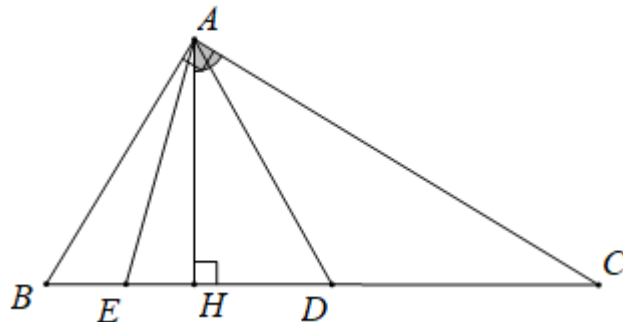
Chứng minh được $\triangle HAM = \triangle ICM (c.g.c) \Rightarrow HM = MI (*)$

Do $\triangle HAM = \triangle ICM \Rightarrow \widehat{HMA} = \widehat{IMC} \Rightarrow \widehat{HMB} = \widehat{IMA}$ (do $\widehat{AMB} = \widehat{AMC} = 90^\circ$)

Lập luận được: $\widehat{HMI} = 90^\circ (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow \triangle MHI$ vuông cân.

2)



+ Chứng minh được:

$$\widehat{AEC} = \widehat{ABC} + \widehat{BAE} = \widehat{HAD} + \widehat{DAC} + \widehat{BAE} = \widehat{EAH} + \widehat{HAD} + \widehat{DAC} = \widehat{EAC}$$

(Vì $\widehat{B}$ và $\widehat{HAC}$ cùng phụ với $\widehat{BAH}$)

Suy ra tam giác AEC cân tại $C \Rightarrow AC = CE (*)$

Tương tự chứng minh được: $AB = BD (**)$

Từ (*) và (**) $\Rightarrow AB + AC = BD + EC = ED + BC$

Câu 11. (HSG 7 huyện, Thanh Oai tỉnh, trường Hồng Dương 2017 - 2018)

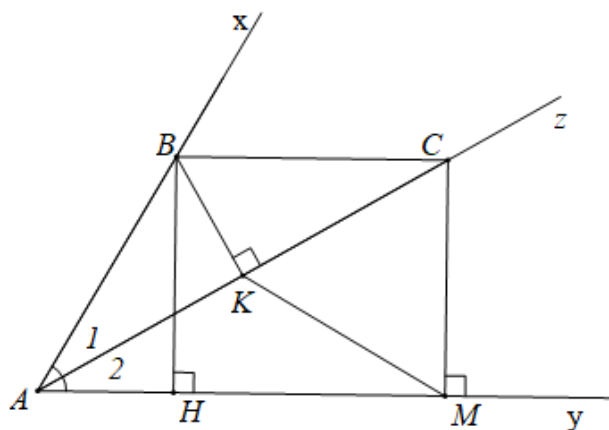
Cho góc $\widehat{xAy} = 60^\circ$ vẽ tia phân giác Az của góc đó. Từ một điểm B trên Ax vẽ đường thẳng song song với Ay cắt Az tại C . Vẽ $BH \perp Ay, CM \perp Ay, BK \perp AC$. Chứng minh rằng:

a) K là trung điểm của AC

b) $BH = \frac{AC}{2}$

c) $\triangle KMC$ đều

Lời giải



- a) $\triangle ABC$ có $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ (Az là tia phân giác của $\widehat{H}$); $\widehat{A_1} = \widehat{A_2}$ ($Ay \parallel BC$, so le trong)
 $\Rightarrow \widehat{A_2} = \widehat{C_1} \Rightarrow \triangle ABC$ cân tại B

Mà $BK \perp AC \Rightarrow BK$ là đường cao vừa là đường trung tuyến của $\triangle ABC$ cân
 Hay K là trung điểm của AC

- b) Xét $\triangle$ vuông ABH và $\triangle$ vuông BAK có: AB là cạnh huyền;

$$\widehat{A_2} = \widehat{B_1} (=30^\circ) \text{ do } \begin{cases} \widehat{A_2} = \frac{\widehat{H}}{2} = 30^\circ \\ \widehat{B_1} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \triangle ABH = \triangle BAK \Rightarrow BH = AK \text{ mà } AK = \frac{AC}{2} \Rightarrow BH = \frac{AC}{2}$$

- c) $\triangle AMC$ vuông tại M có $AK = KC = \frac{AC}{2} (1) \Rightarrow MK$ là trung tuyến thuộc cạnh huyền

$$\Rightarrow KM = \frac{AC}{2} (2)$$

Từ (1) và (2) $\Rightarrow KM = KC \Rightarrow \triangle KMC$ cân

Mặt khác $\triangle AMC$ có $\widehat{M} = 90^\circ$; $\widehat{H} = 30^\circ \Rightarrow \widehat{MKC} = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle AMC$ đều.

Câu 12. (HSG 7 huyện Than Uyên, tỉnh, trường 2022 - 2023)

Trùng bài với (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Bến Lức 2018 - 2019)

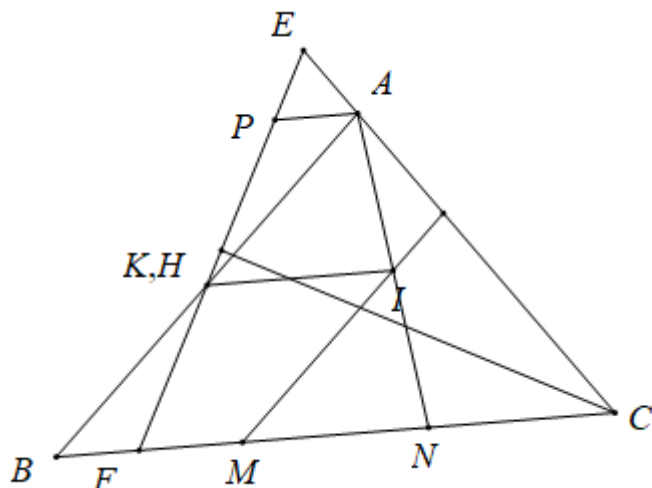
Cho tam giác cân ABC , $AB = AC$. Trên cạnh BC lấy điểm D , trên tia đối của CB lấy điểm E sao cho $BD = CE$. Các đường thẳng vuông góc với BC kẻ từ D và E cắt AB, AC lần lượt ở M, N . Chứng minh rằng:

- a) $DM = EN$

- b) Đường thẳng BC cắt MN tại điểm I là trung điểm của MN

- c) Đường thẳng vuông góc với MN tại I luôn luôn đi qua một điểm cố định khi D thay đổi trên cạnh BC .

Lời giải



a) Từ I kẻ đường thẳng song song với BC cắt AB tại H . Nối MH

Ta có: $\triangle BHM = \triangle IMH$ vì: $\angle BHM = \angle IMH$ (so le trong);

$\angle BMH = \angle IHM$ (so le trong); cạnh HM chung $\Rightarrow BM = IH = MN$

$\triangle AHI = \triangle IMN$ vì: $IH = MN$ (cmt); $\angle AHI = \angle IMN (= \angle ABC)$; $\angle AIH = \angle INM$ (đồng vị)
 $\Rightarrow AI = IN$ (dpcm)

b) Từ A kẻ đường thẳng song song với BC cắt EF tại P . $\triangle PKA = \triangle FKB$ vì:

$\angle PKA = \angle FKB$ (đối đỉnh); $\angle APK = \angle BFK$ (so le trong); $AK = KB$ (gt) $\Rightarrow AP = BF$ (1)

$\angle EPA = \angle KFC$ (đồng vị); $\angle CEF = \angle KFC$ ($\triangle CFE$ cân)

$\Rightarrow \angle EPA = \angle CEF \Rightarrow \triangle APE$ cân $\Rightarrow AP = AE$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow AE = BF$ (dpcm)

Câu 14. (HSG 7 huyện Thanh Oai, tỉnh, trường 2022 - 2023)

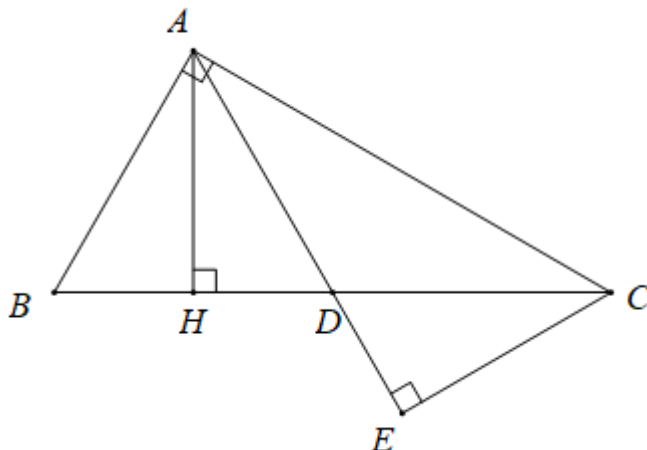
Cho tam giác ABC vuông ở A , có $\angle B = 30^\circ$, đường cao AH . Trên đoạn HC lấy điểm D sao cho $HD = HB$. Từ C kẻ $CE \perp AD$. Chứng minh:

a) Tam giác ABD là tam giác đều

b) $AH = CE$

c) EH song song với AC .

Lời giải



a) Tam giác ABD có AH vừa là đường cao vừa là đường trung tuyến nên tam giác ABD cân ở A

Lại có: $\angle B = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$ là tam giác đều

b) $\angle EAC = \angle BAC - \angle BAD = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ = \angle ACH$

$\triangle AHC = \triangle CEA$ (ch - gn) $\Rightarrow AH = CE$

c) $\triangle AHC = \triangle CEA$ (cmt) $\Rightarrow HC = EA$

$\triangle ADC$ cân ở D vì có $\angle ADC = \angle DCA (= 30^\circ) \Rightarrow DA = DC \Rightarrow DE = DH \Rightarrow \triangle DEH$ cân ở D

Hai tam giác cân ADC và DEH có:

$\angle ADC = \angle EDH$ (hai góc đối đỉnh), do đó: $\angle ACD = \angle DHE$, mà hai góc ở vị trí so le trong $\Rightarrow EH \parallel AC$

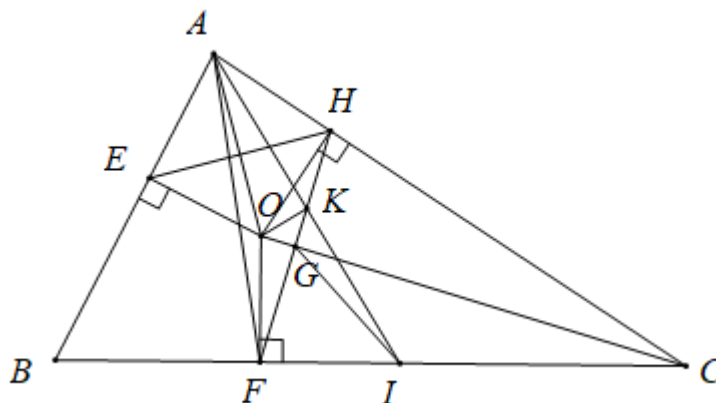
Câu 15. (HSG 7 huyện, tỉnh, trường Phú Trường 2017 - 2018)

Cho tam giác ABC có ba góc nhọn, $AB < AC < BC$. Các tia phân giác của $\angle B$ và $\angle C$ cắt nhau tại O . Gọi F là hình chiếu của O trên BC ; H là hình chiếu của O trên AC . Lấy điểm I trên đoạn FC sao cho $FI = AH$. Gọi K là giao điểm của FH và AI

a) Chứng minh tam giác FCH cân và $AK = KI$

b) Chứng minh ba điểm B, O, K thẳng hàng.

Lời giải



a) Chứng minh $\triangle CHO = \triangle CFO$ (ch - gn) $\Rightarrow CH = CF \Rightarrow \triangle FCH$ cân tại C

b) Vẽ IG song song với AC ($G \in FH$). Chứng minh $\triangle FIG$ cân tại I

Suy ra $AH = IG, \angle IGK = \angle HKG \Rightarrow \triangle AHK = \triangle IGK$ (g.c.g) $\Rightarrow AK = KI$

c) Vẽ $OE \perp AB$ tại E . Tương tự câu a, ta có: $\triangle AEH, \triangle BEF$ thứ tự cân tại A, B , suy ra $BE = BF$ và $AE = AH$.

$BA = BE + EA = BF + AH = BF + FI = BI \Rightarrow \triangle ABI$ cân tại B .

Mà BO là phân giác của $\angle B, BK$ là đường trung tuyến của $\triangle ABI$ nên B, O, K là ba điểm thẳng hàng.

