

Bài 1. (4,0 điểm)

a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $x + y + z = 2024$. Chứng minh rằng:
 $(x-1)(y-1)(z-1) = 2023$.

b) Cho a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca = 0$. Tính giá trị của biểu thức:
 $A = (a-1)^{2023} + b^{2024} + (c+1)^{2023}$.

Bài 2. (3,5 điểm)

a) Tìm x biết $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$

b) Chứng minh rằng $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2024} + (x^2 - x + 1)^{2023} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$

Bài 3. (3,5 điểm)

a) Hai đội cờ thi đấu với nhau, mỗi đấu thủ của đội này phải đấu một ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết rằng tổng số ván cờ đã đấu bằng 4 lần tổng số đấu thủ của hai đội và biết rằng số đấu thủ của một trong hai đội là số lẻ, hỏi mỗi đội có bao nhiêu đấu thủ ?

b) Cho p là 1 số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.

Bài 4. (7,0 điểm)

1) Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB, AD lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Từ E kẻ $EM \parallel AD$ (M thuộc DC). Đường thẳng AM cắt BF, BC lần lượt tại H và N .

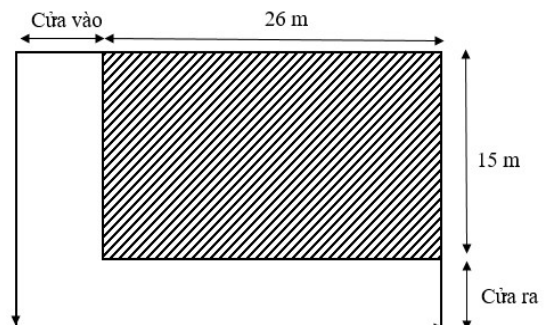
a) Chứng minh $BN \cdot AM = AN \cdot BC$ và $AB^2 = FA \cdot NB$.

b) Gọi G là giao điểm của BM và EC . Chứng minh $BM = 2GH$ và $\widehat{CHE} = 90^\circ$.

c) Trên BC lấy điểm K sao cho $BK = DF$. Từ K kẻ KI vuông góc với DN (I thuộc DN).

DK cắt MN tại O . Chứng minh: $\frac{NC}{CK} \cdot \frac{DI}{IN} = \frac{DO}{OK}$.

2) Một trường THCS xây dựng một sân bóng rổ hình chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Theo thiết kế người ta cũng xây dựng một lối đi có diện tích bằng $86 m^2$ dọc theo hai cạnh của sân bóng rổ. Bạn Minh đi bộ từ cửa vào đến cửa ra và đi dọc hết các cạnh của lối đi (theo hướng mũi tên như hình vẽ). Hãy tính quãng đường Minh đã đi, biết rằng bề rộng của cửa vào và cửa ra bằng nhau và bằng chiều rộng của lối đi.



Bài 5. (2,0 điểm)

- a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:
 $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$.
- b) Chứng minh rằng tồn tại một bội của 2023 có dạng $202420242024 \dots 2024$.

-----Hết-----

Bài	Câu	Nội dung	Điểm
1.	a)	a) Cho các số thực x, y, z thỏa mãn $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ và $x + y + z = 2024$. Chứng minh rằng: $(x-1)(y-1)(z-1) = 2023$.	2 điểm
		Với x, y, z là các số thực, $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ ta có $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1 \Rightarrow \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 1$ $\Rightarrow yz + xz + xy = xyz$	0,5 0,5
		Ta có: $(x-1)(y-1)(z-1)$ $= xyz - xy - xz + x - yz + y + z - 1$ $= xyz - (xy + xz + yz) + (x + y + z) - 1$ $= 2024 - 1 = 2023$	0,25 0,25 0,5
	b)	Cho a, b, c thỏa mãn: $a + b + c = 0$ và $ab + bc + ca = 0$. Tính giá trị của biểu thức: $A = (a-1)^{2023} + b^{2024} + (c+1)^{2023}$	2 điểm
		Có: $a + b + c = 0 \Leftrightarrow (a + b + c)^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) = 0$ $\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0 \text{ (vì } ab + bc + ca = 0)$	0,5 0,5
		Nhận thấy $a^2 + b^2 + c^2 \geq 0 \forall a, b, c$ $\Rightarrow a^2 + b^2 + c^2 = 0$ $\Leftrightarrow a = b = c = 0$	0,5
		Thay vào biểu thức $A = (a-1)^{2023} + b^{2024} + (c+1)^{2023}$ ta được: $A = (0-1)^{2023} + 0^{2024} + (0+1)^{2023} = -1 + 0 + 1 = 0$ Vậy $A = (a-1)^{2023} + b^{2024} + (c+1)^{2023} = 0$	0,5

Bài 2	a)	Tìm x biết $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$	2,0 điểm
		Ta có: $(x^2 - 1)(x^2 + 4x + 3) = 192$ $\Leftrightarrow (x - 1)(x + 1)(x + 3)(x + 1) = 192$ $\Leftrightarrow (x + 1)^2 (x - 1)(x + 3) = 192$ $\Leftrightarrow (x^2 + 2x + 1)(x^2 + 2x - 3) = 192 (*)$	0,25 0,25 0,25
		Đặt $t = x^2 + 2x + 1$ (ĐK : $t \geq 0$) $\Rightarrow x^2 + 2x - 3 = t - 4$ Thay vào (*) ta được $t(t - 4) = 192 \Leftrightarrow t^2 - 4t - 192 = 0 \Leftrightarrow (t - 16)(t + 12) = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} t = 16(TM) \\ t = -12(KTM) \end{cases}$	0,25 0,25 0,25
		Với $t = 16 \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 16 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = 16 \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 = 4 \\ x + 1 = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -5 \end{cases}$ Vậy $x \in \{3; -5\}$	0,25 0,25
	b)	Chứng minh rằng $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2024} + (x^2 - x + 1)^{2023} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$	1,5 điểm
		+ Chứng tỏ đa thức $g(x) = x^2 - x = x(x - 1)$ có hai nghiệm là $x = 0$ và $x = 1$ Ta có $f(0) = (-1)^{2024} + 1^{2023} - 2 = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm của đa thức $f(x) \Rightarrow f(x)$ chứa thừa số $x \Rightarrow f(x) : x$ Ta có $f(1) = (1^2 + 1 - 1)^{2024} + (1^2 - 1 + 1)^{2023} - 2 = 0$ $\Rightarrow x = 1$ là nghiệm của đa thức $f(x)$ $\Rightarrow f(x)$ chứa thừa số $x - 1 \Rightarrow f(x) : (x - 1)$ mà các thừa số x và $x - 1$ không chứa nhân tử chung, do đó $f(x)$ chia hết cho $x(x - 1)$ Vậy $f(x) = (x^2 + x - 1)^{2024} + (x^2 - x + 1)^{2023} - 2$ chia hết cho $g(x) = x^2 - x$ Cách 2: học sinh làm theo phương pháp xét giá trị riêng cho điểm tương ứng	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 3	a)	Hai đội cờ thi đấu với nhau, mỗi đấu thủ của đội này phải đấu một ván với mỗi đấu thủ của đội kia. Biết rằng tổng số ván cờ đã đấu	

	bằng 4 lần tổng số đầu thủ của hai đội và biết rằng số đầu thủ của một trong hai đội là số lẻ, hỏi mỗi đội có bao nhiêu đầu thủ ?	2 điểm
	Gọi x, y lần lượt là số đầu thủ của đội 1, đội 2 ($x, y \in \mathbb{N}^*$) Vì tổng số ván cờ đã đấu bằng 4 lần tổng số đầu thủ của hai đội, nên ta có: $xy = 4(x + y)$ Ta có x, y có vai trò như nhau, không mất tính tổng quát ta giả sử $1 \leq x \leq y$ (vì x, y là số nguyên dương) Khi đó ta có $xy = 4(x + y) \Leftrightarrow \frac{4x + 4y}{xy} = 1 \Leftrightarrow \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1$ Lại có $1 \leq x \leq y \Rightarrow \frac{4}{x} \geq \frac{4}{y}$. Do đó $\frac{4}{x} + \frac{4}{x} \geq \frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1 \Rightarrow \frac{8}{x} \geq 1 \Leftrightarrow x \leq 8 \Rightarrow x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ Mà $\frac{4}{x} + \frac{4}{y} = 1 \Rightarrow \frac{4}{x} < 1 \Leftrightarrow x > 4$ Do đó $x \in \{5, 6, 7, 8\}$ Với $x = 5$, ta tìm được $y = 20$ (thỏa mãn) Với $x = 6$, ta tìm được $y = 12$ (không thỏa mãn số đầu thủ của một trong hai đội là số lẻ) Với $x = 7$, ta tìm được $y = \frac{28}{3}$ (không thỏa mãn y nguyên dương) Với $x = 8$, ta tìm được $y = 8$ (không thỏa mãn số đầu thủ của một trong hai đội là số lẻ) Vậy hai đội có số đầu thủ lần lượt là 5 và 20 đầu thủ (Hs có thể giải theo tìm x, y là số tự nhiên khác 0 với $(x - 4)(y - 4) = 16$)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
b.	b) Cho p là 1 số nguyên tố. Tìm p để tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.	1,5 điểm
	Vì p là số nguyên tố nên các ước dương của p^4 là: $1; p; p^2; p^3; p^4$ Đặt $S = 1 + p + p^2 + p^3 + p^4$	0,25
	Theo bài ra ta có $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ là một số chính phương với p là số nguyên tố nên tồn tại $a \in \mathbb{N}^*$, sao cho $1 + p + p^2 + p^3 + p^4 = a^2$ $\Rightarrow 4 + 4p + 4p^2 + 4p^3 + 4p^4 = (2a)^2$ Ta có	0,25

		$4+4p+4p^2+4p^3+4p^4-(2p^2+p)^2=3p^2+4p+4=3\left(p+\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$ $\Rightarrow (2a)^2-(2p^2+p)^2>0 \Leftrightarrow (2a)^2>(2p^2+p)^2 \quad (1)$ Lại có $(2p^2+p+2)^2-(4+4p+4p^2+4p^3+4p^4)=5p^2>0 \quad (\text{với } p \text{ là số nguyên tố})$ $\Rightarrow (2p^2+p+2)^2-(2a)^2>0 \Leftrightarrow (2p^2+p+2)^2>(2a)^2 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta có $(2p^2+p+2)^2>(2a)^2>(2p^2+p)^2 \Rightarrow 2p^2+p<2a<2p^2+p+2$ Với p là số nguyên tố ta có $a \in N^*$ $\Rightarrow 2a=2p^2+p+1$ $\Rightarrow (2p^2+p+1)^2=(2a)^2 \Rightarrow (2p^2+p+1)^2=4+4p+4p^2+4p^3+4p^4$ $\Leftrightarrow p^2-2p-3=0 \Leftrightarrow (p-3)(p+1)=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} p=3 \text{ (tm)} \\ p=-1 \text{ (ktm)} \end{cases}$ Vậy $p=3$ thì tổng các ước nguyên dương của p^4 là một số chính phương.	0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 4		1) Cho hình vuông $ABCD$, trên cạnh AB, AD lấy hai điểm E, F sao cho $AE = AF$. Từ E kẻ $EM \parallel AD$ (M thuộc DC). Đường thẳng AM cắt BF, BC lần lượt tại H và N. a) Chứng minh $BN \cdot AM = AN \cdot BC$ và $AB^2 = FA \cdot NB$. b) Gọi G là giao điểm của BM và EC. Chứng minh $BM = 2GH$ và $\widehat{CHE} = 90^\circ$. c) Trên BC lấy điểm K sao cho $BK = DF$. Từ K kẻ KI vuông góc với DN (I thuộc DN). DK cắt MN tại O. Chứng minh: $\frac{NC}{CK} \cdot \frac{DI}{IN} = \frac{DO}{OK}.$	5 điểm

	a)	Chứng minh $BN.AM = AN.BC$ và $AB^2 = FA.NB$ + Có ABCD là hình vuông $\Rightarrow \begin{cases} AB = AD = BC = DC \\ AB // DC; AD // BC \end{cases}$ + $DC // AB \Rightarrow MC // AB \Rightarrow \frac{AN}{AM} = \frac{BN}{BC} (1)$ $\Rightarrow BN.AM = AN.BC$ + $EM // AD; AD // BC \Rightarrow EM // BC \Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{AN}{AM} (2)$ Từ (1), (2) $\Rightarrow \frac{AB}{AE} = \frac{BN}{BC} \Rightarrow AB.BC = AE.BN$ Mà $AB = BC, AE = AF \Rightarrow AB.AB = AF.BN \Rightarrow AB^2 = AF.BN$	2 điểm 0,5 0,25 0,25 0,5 0,25 0,25
	b)	Gọi G là giao điểm của BM và EC. Chứng minh $BM = 2GH$ và $\widehat{CHE} = 90^\circ$. + Chứng minh tứ giác EBCM là hình chữ nhật $\Rightarrow BE = MC$ và $EC = BM$; EC và BM cắt nhau tại trung điểm G của mỗi đoạn Vì $AB = CD \Rightarrow AE = DM$ mà $AE = AF \Rightarrow DM = AF$ + Chứng minh $\triangle ABF = \triangle DAM (c.g.c) \Rightarrow \widehat{FBA} = \widehat{MAD}$ + Có $\widehat{FBA} + \widehat{BFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{DAM} + \widehat{BFA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{FHA} = 90^\circ \Rightarrow \widehat{BHM} = 90^\circ$ + $\triangle BHM$ vuông tại H, HG là đường trung tuyến ứng với cạnh	2 điểm 0,25 0,25 0,5 0,25

		huyền BM $\Rightarrow HG = \frac{1}{2} BM \Rightarrow BM = 2HG$ Mà BM = EC $\Rightarrow HG = \frac{1}{2} EC$ Lại có HG là đường trung tuyến ứng với cạnh EC Suy ra $\triangle EHC$ vuông tại H $\Rightarrow \widehat{CHE} = 90^0$	0,25 0,25 0,25
	c)	Trên BC lấy điểm K sao cho BK = DF. Từ K kẻ KI vuông góc với DN (I thuộc DN). DK cắt MN tại O. Chứng minh: $\frac{NC}{CK} \cdot \frac{DI}{IN} = \frac{DO}{OK}$ + Chứng minh tứ giác DFBK là hình bình hành $\Rightarrow BF // DK$ mà $MA \perp BF$ (vì $\widehat{FHA} = 90^0$) $\Rightarrow AM \perp DK$ Suy ra NO là đường cao của tam giác DKN Chứng minh DC là đường cao của tam giác DKN mà NO cắt DC tại M Suy ra M là trực tâm của tam giác DKN, suy ra KM là đường cao của tam giác KDN $\Rightarrow KM \perp DN$ mà $KI \perp DN \Rightarrow K, M, I$ thẳng hàng Qua N kẻ đường thẳng song song với DK cắt DC tại P, KI tại Q $NP // DK \Rightarrow \frac{NC}{CK} = \frac{NP}{DK}; \frac{NP}{DO} = \frac{MN}{MO}$ $QN // DK \Rightarrow \frac{DI}{IN} = \frac{DK}{QN}; \frac{QN}{OK} = \frac{MN}{MO}$ $\Rightarrow \begin{cases} \frac{NC}{CK} \cdot \frac{DI}{IN} = \frac{NP}{DK} \cdot \frac{DK}{QN} = \frac{NP}{QN} \\ \frac{NP}{DO} = \frac{QN}{OK} \Rightarrow \frac{DO}{OK} = \frac{NP}{QN} \end{cases} \Rightarrow \frac{NC}{CK} \cdot \frac{DI}{IN} = \frac{DO}{OK}$	1 điểm 0,25 0,25 0,25
	2.	2) Một trường THCS xây dựng một sân bóng rổ hình chữ nhật có kích thước như hình vẽ. Theo thiết kế người ta cũng xây dựng một lối đi có diện tích bằng 86 m^2 dọc theo hai cạnh của sân bóng rổ. Bạn Minh đi bộ từ cửa vào đến cửa ra và đi dọc hết các cạnh của lối đi (theo hướng mũi tên như hình vẽ). Hãy tính quãng đường Minh đã đi, biết rằng bề rộng của cửa vào và cửa ra bằng nhau và bằng chiều rộng của lối đi.	2 điểm
		Gọi chiều rộng của lối đi là x (m), ($x > 0$) Chiều dài của hình chữ nhật là: $x + 26$ (m); Chiều rộng của hình chữ nhật là: $x + 15$ (m)	0,25 0,25

		Theo bài ra ta có phương trình: $(x + 26)(x + 15) = 26.15 + 86$ $\Leftrightarrow x^2 + 41x - 86 = 0$ $\Leftrightarrow (x - 2)(x + 43) = 0$ Suy ra $x = 2$; $x = -43$ Đối chiếu với điều kiện $x > 0$ ta thấy $x = -43$ không thỏa mãn. Vậy chiều rộng của lối đi là $x = 2$ (m) Nên quãng đường bạn Minh đã đi là: $2 + 15 + 2 + 26 = 45$ (m)	0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
Bài 5	a	a) Cho x, y là các số thực thỏa mãn $x + y = 1$. Tìm GTNN của biểu thức : $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$	1 điểm
		Ta có: $C = (x^2 + 4y)(y^2 + 4x) + 8xy$ $= x^2y^2 + 4x^3 + 4y^3 + 16xy + 8xy = x^2y^2 + 4(x^3 + y^3) + 24xy$ + Chứng minh: $x^3 + y^3 = (x + y)^3 - 3xy(x + y) = 1 - 3xy$ (vì $x + y = 1$) thay vào C ta được: $C = x^2y^2 + 4(1 - 3xy) + 24xy = x^2y^2 + 12xy + 4$ $= (x^2y^2 + 2xy.6 + 36) - 32 = (xy + 6)^2 - 32$ + Chứng tỏ $C = (xy + 6)^2 - 32 \geq -32 \forall x, y$ Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$ Vậy GTNN của biểu thức C là - 32 khi $\begin{cases} x = 3 \\ y = -2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases}$	0,25 0,25 0,25 0,25
	b)	Chứng minh rằng tồn tại một bội của 2023 có dạng 202420242024...2024	1 điểm
		Xét 2024 số có dạng 202420242024...2024 là $a_1 = 2024$ $a_2 = 20242024$. . . $a_{2024} = \underbrace{20242024...2024}_{2024 \text{ số } 2024} \text{ (nhóm 2024 có mặt 2024 lần)}$ Xét các trường hợp số dư của một số tự nhiên khi chia cho 2023 có 2023 trường hợp (dư 0, dư 1, dư 2022) Theo nguyên lý Dirichlet thì trong 2024 số khi chia cho 2023 tồn tại hai số có cùng số dư khi chia cho 2023 Giả sử hai số đó là $a_n = 20242024...2024 \text{ (nhóm 2024 có mặt } n \text{ lần)}$	0,25

	$a_m = 20242024...2024$ (nhóm 2024 có mặt m lần) (Với $1 \leq n < m \leq 2024$) Do đó ta có $(a_m - a_n) : 2023 \Rightarrow \left(\underbrace{20242024...2024}_{m \text{ nhóm } 2024} - \underbrace{20242024...2024}_{n \text{ nhóm } 2024} \right) : 2023$ $\Rightarrow \underbrace{20242024...2024}_{m-n \text{ nhóm } 2024} \underbrace{0000...0000}_{4.n \text{ số } 0} : 2023$ $\Rightarrow \left(\underbrace{20242024...2024}_{m-n \text{ nhóm } 2024} \cdot 10^{4n} \right) : 2023$ Lại có $UCLN(10^{4n}, 2023) = 1$ Suy ra $\underbrace{20242024...2024}_{m-n \text{ nhóm } 2024} : 2023$ Vậy luôn tồn tại một bội của 2023 có dạng $202420242024...2024$	0,25
		0,25
		0,25

1)