**Bài 4. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC**

**Dạng toán 1. Dạng toán áp dụng công thức cộng**



|  |
| --- |
| **Bài 1**. Tính giá trị các biểu thức  a/  b/  c/  d**/**  e/  g/ |
| **Lời giải**  a/  b/  c/  d**/**  e/  g/ |
| **Bài 2.**  a) Cho Tính  b) Cho  và . Tính |
| **Lời giải**  a) Áp dụng công thức cộng, ta có    b) |

**Dạng toán 2. Dạng toán áp dụng công thức nhân đôi, công thức hạ bậc**

**Công thức nhân đôi**



**Công thức hạ bậc**



|  |
| --- |
| **Bài 1.**Tính các giá trị lượng giác của cung 2α trong các trường hợp sau  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Ta có:  Khi đó          b) Ta có:  Khi đó |

**Dạng toán 3. Dạng toán áp dụng công thức nhân ba**



|  |
| --- |
| **Bài 1.** Rút gọn các biểu thức sau:  a)  b) |
| **Lời giải**  a)  b) |

**Dạng toán 4. Dạng toán áp dụng công thức biến đổi tổng thành tích, tích thành tổng**

|  |  |
| --- | --- |
| **Công** **thức biến đổi tích thành tổng** | **Công thức biến đổi tổng thành tích** |

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Biến đổi thành tổng  a) b)  c) d) |
| **Lời giải**  a)  b)  c)  d) |
| **Bài 2**.Biến đổi các biểu thức sau thành tích các nhân tử  a)  b)  c)  d) |
| **Lời giải**  a)  b)  c)  d) |
| **Bài 3.**Rút gọn |
| **Lời giải** |

**Dạng toán 5: Chứng minh đẳng thức, đơn giản biểu thức lượng giác và chứng minh biểu thức lượng giác không phụ thuộc vào biến*.***

**Phương pháp:** Để chứng minh đẳng thức lượng giác ta có các cách biển đổi: vế này thành vế kia, biến đổi tương đương, biến đổi hai vế cùng bằng một đại lương trung gian. Trong quá trình biến đổi ta cần sử dụng linh hoạt các công thức lượng giác.

***Lưu ý*:** Khi biến đổi cần phải *hướng đích* , chẳng hạn biến đổi vế phải, ta cần xem vế trái có đại lượng nào để từ đó liên tưởng đến kiến thức đã có để làm sao xuất hiện các đại lượng ở vế trái. Và ta thường biến đổi vế phức tạp về vế đơn giản hơn.

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Chứng minh rằng với mọi góc lượng giác  làm cho biểu thức xác định thì  a)  b)  c) |
| **Lời giải**  a) Ta có  b) Ta có  c) Ta có |
| **Bài 2.** Chứng minh rằng  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Ta có    b) Ta có  ĐPCM |
| **Bài 3.** Chứng minh biểu thức sau không phụ thuộc vào  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Ta có:      b) Vì và  nên |
| **Bài 4.** Đơn giản biểu thức sau:  a)  b) |
| **Lời giải**  a)  b) Ta có  và  Suy ra . |
| **Bài 5.** Chứng minh rằng  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Ta có    Mặt khác    Từ (1) và (2) suy ra ĐPCM.  b) Theo câu a) ta có  Do đó  Suy ra  ĐPCM. |

**Dạng toán 6: Bất đẳng thức lượng giác, tìm GTLN, GTNN của biểu thức lượng giác**

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Chứng minh rằng với thì  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Bất đẳng thức tương đương với    (đúng) ĐPCM.  b) Bất đẳng thức tương đương với (\*)  Vì  nên  (đúng) ĐPCM. |
| **Bài 2.** Cho . Chứng minh rằng |
| **Lời giải**  Ta có  Vì  nên .  Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có    Suy ra  ĐPCM.  **Bài 3.** Chứng minh rằng với  thì . |
| **Lời giải**  Bất đẳng thức tương đương với        Đặt , vì .  Bất đẳng thức trở thành  (\*)  + Nếu :  đúng vì  và .  + Nếu:  đúng vì .  Vậy bất đẳng thức (\*) đúng suy ra ĐPCM. |
| **Bài 4.** Tìm giá trị nhỏ nhất, lớn nhất của biểu thức sau:  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Ta có  Vì  nên  suy ra .  Khi  thì ,  thì  Do đó  và .  b) Ta có    Vì  nên  suy ra .  Vậy  khi  và  khi . |
| **Bài 5.** Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất hàm số |
| **Lời giải**  Ta có  Ta lại có  Vậy |

**Dạng toán 7: Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức trong tam giác**

|  |
| --- |
| **Bài 1.** Chứng minh trong mọi tam giác  ta đều có:  a)  b)  c) |
| **Lời giải**  a)  Mặt khác trong tam giác  ta có  Suy ra  Vậy  ĐPCM.  b)    Vì  nên    ĐPCM.  c)  Vì  nên    ĐPCM.  **Bài 2.** Chứng minh trong mọi tam giác  không vuông ta đều có:  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Đẳng thức tương đương với    Do tam giác  không vuông nên    Suy ra  Đẳng thức cuối đúng vì  ĐPCM.  b) Vì  Theo công thức cộng ta có:    Suy ra  Hay  ĐPCM. |
| **Bài 3.** Chứng minh trong mọi tam giác  ta đều có:  a)  b)  c)  với  là tam giác nhọn. |
| **Lời giải**  a) Ta có  Vì  nên  Mặt khác  do đó        Vì  nên  ĐPCM.  b) Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau:  Nếu  thì  Thật vậy, do  và  nên    Áp dụng bổ đề ta có: ,  Suy ra  Do đó  hay  ĐPCM.  c) Vì  là tam giác nhọn nên .  Áp dụng bất đẳng thức Cauchy ta có  Theo ví dụ 2 ta có  nên    ĐPCM. |
| **Bài 4.** Chứng minh trong mọi tam giác  ta đều có:  a)  b)  c)  Với tam giác  không vuông.  **Lời giải**  a) Vì  và  nên  Hoàn toàn tương tự ta có  Cộng vế với vế các bất đẳng thức trên và rút gọn ta được  ĐPCM.  b) +TH1: Nếu tam giác  tù: không mất tính tổng quát giả sử  suy ra  . Mà  do đó bất đẳng thức luôn đúng.  + TH2: Nếu tam giác  nhọn: .  Vì  và  nên .  Chứng minh tương tự ta có .  Do các vế đều không âm nên nhân vế với vế các bất đẳng thức trên ta được    ĐPCM.  c) Ta có  Mà nên    Tương tự ta có  Công vế với vế và rút gọn ta được  ĐPCM. |
| **Bài 5.** Chứng minh trong mọi tam giác  ta đều có:  a)  b) |
| **Lời giải**  a) Áp dụng bất đẳng thức  với mọi  không âm ta có    Tương tự ta có  Công vế với vế ta được  Mà  Suy ra  Hay  ĐPCM.  b) Ta có .  Áp dụng bất đẳng thức  với mọi  dương ta có    Do đó  Mặt khác  Nên  (1)  Tương tự ta có  (2)  Nhân vế với vế của (1) và (2) ta được    Ta lại có  Suy ra  Hay  ĐPCM. |
| **Bài 6.** Cho tam giác  thỏa mãn . Chứng minh rằng . |
| **Lời giải**  Từ giả thiết ta có      (1)  Vì ,  và  nên  Áp dụng bất đẳng thức  suy ra  Do đó ĐPCM. |
| **Bài 7.** Chứng minh rằng trong tam giác  ta luôn có |
| **Lời giải**  Do  bình đẳng nên không mất tính tổng quát giả sử  Suy ra        Do đó  Mà  (1)  Áp dụng bất đẳng thức côsi ta có:  Suy ra  Hay  (2)  Từ (1) và (2) ta có ĐPCM. |