**Bài 1. KHÁI NIỆM VECTƠ**

### **A - TÓM TẮT LÝ THUYẾT CHUNG**

***1. Định nghĩa vectơ***:

**

Hình 1.1

Vectơ**là đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút

của đoạn thẳng đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là

điểm cuối.

Vectơ có điểm đầu là , điểm cuối là  ta kí hiệu : .

Vectơ còn được kí hiệu là: 

**Vectơ – không** là vectơ có điểm đầu trùng điểm cuối. Kí hiệu là .

***2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng.***

- Đường thẳng đi qua điểm đầu và điểm cuối của vectơ gọi là **giá của vectơ.**

- Hai vectơ có giá song song hoặc trùng nhau gọi là **hai vectơ cùng phương *.***

**Nhận xét:**

* Vectơ  luôn cùng phương với mọi vectơ.
* Nếu hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác vectơ  thì chúng cùng phương với nhau.

 **cùng phương**  kí hiệu: //

- **Hướng của vectơ**: là hướng từ điểm đầu đến điểm cuối của vectơ.

- Hai vectơ cùng phương thì hoặc cùng hướng hoặc ngược hướng.

**Quy ước:** Vectơ  luôn cùng hướng với mọi vectơ.

**Nhận xét:** Nếu hai vectơ cùng hướng với một vectơ thứ ba khác vectơ  thì chúng cùng hướng với nhau.

 **cùng hướng**  kí hiệu: ↑↑

 **ngược hướng**  kí hiệu: ↑↓



Hình 1.2

*Ví dụ:* Ở hình vẽ trên trên (hình 2) thì hai vectơ  và  cùng hướng còn  và  ngược hướng.

**3. Hai vectơ bằng nhau**

- Độ dài đoạn thẳng  gọi là **độ dài của vectơ** , kí hiệu .

Vậy .

- **Hai vectơ bằng nhau** nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.

Nếu  bằng  thì ta viết =.

= , ||= 0.

**Nhận xét:** Nếu hai vectơ cùng bằng một vectơ thì chúng bằng nhau.

*Ví dụ:* (Hình 1.3) Cho hình bình hành  khi đó .



Hình 1.3

**B- CÁC DẠNG TOÁN CƠ BẢN**

**Dạng toán 1. Xác định một vectơ; phương, hướng của vectơ; độ dài của vectơ:**

*Phương pháp giải*

* Xác định một vectơ và xác định sự cùng phương, cùng hướng của hai vectơ theo định nghĩa.
* Dựa vào các tính chất hình học của các hình đã cho biết để tính độ dài của một vectơ.

*Chú ý: Với hai điểm phân biệt A, B ta có hai vectơ khác vectơ  là .*

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1:** Cho  điểm . Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không có điểm đầu và điểm cuối là các điểm đó.  **🖎Lời giải tham khảo**  Có 10 cặp điểm khác nhau . Do đó có  vectơ khác  cần tìm. | **🖎Lưu ý:**  **Với hai điểm  phân biệt, ta luôn xác định được hai vectơ khác  là:  và**  **Với một điểm  .** |
| **Bài 1.1:** Cho . Có thể xác định được bao nhiêu vectơ khác có điểm đầu điểm cuối là các đỉnh ?  **🖎Lời giải**  Có  cặp điểm khác nhau . Do đó có  vectơ khác .  **Bài 1.3:** Có thể kể tên bao nhiêu vectơ- không có điểm đầu và điểm cuối là những điểm có tên trong hình vẽ dưới đây ?    **🖎Lời giải**  Vectơ  ,,,,,. Vậy có  vectơ-không. | **Bài 1.2:** Cho tứ giác ,  là giao điểm của hai đường chéo.  Có bao nhiêu vectơ kháccó điểm đầu điểm cuối là các đỉnh ?  **🖎Lời giải**  Có  cặp điểm khác nhau . Do đó ó  vectơ khác . |
| **Bài 2:** Cho ba điểm A, B, C phân biệt thẳng hàng.  a) Khi nào thì hai vectơ  và  cùng hướng ?  b) Khi nào thì hai vectơ  và  ngược hướng ?  **🖎Lời giải**  a) Hai vectơ  và  cùng hướng khi  nằm ngoài đoạn .  b) Hai vectơ  và  ngược hướng khi  nằm trong đoạn . | **🖎Lưu ý:**  **-Hai vectơ cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.**  **-Hai vectơ cùng khi phương thì chúng cùng hướng hoặc ngược hướng.** |
| **Bài 2.1:**Chứng minh rằng ba điểm  phân biệt thẳng hàng khi và chỉ khi  cùng phương.  **🖎Lời giải tham khảo**  Nếu  thẳng hàng suy ra giá của  đều là đường thẳng đi qua ba điểm  nên  cùng phương.  Ngược lại nếu  cùng phương khi đó đường thẳng  và  song song hoặc trùng nhau. Nhưng hai đường thẳng này cùng đi qua điểm  nên hai đường thẳng  và  trùng nhau hay ba điểm  thẳng hàng.  **Bài 2.3:**Cho bốn điểm  phân biệt.  a) Nếu  thì có nhận xét gì về ba điểm .  b) Nếu  thì có nhận xét gì về bốn điểm .  ***Lời giải:***  a)  là trung điểm của .  b)  thẳng hàng hoặc  là hình bình hành.  **Bài 2.4:** Cho hình thoi  có tâm  . Hãy cho biết khẳng định nào đúng ?  a) .  b) .  c) .  d) .  e) .  f) .  ***Lời giải:***  a) Sai.  b) Đúng.  c) Đúng.  d) Sai.  e) Đúng.  f) Sai.  **Bài 2.6:** Cho hình vuông  tâm  cạnh . Gọi là trung điểm của ,  là điểm đối xứng với  qua .  a. Hãy tính độ dài của vectơ sau .  b. Qua N kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại . Tính độ dài .  **🖎Lời giải tham khảo**    a. Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông  ta có    Suy ra .  b. Qua N kẻ đường thẳng song song với  cắt  tại .  Khi đó tứ giác  là hình vuông và .  Áp dụng định lý Pitago trong tam giác vuông  ta có     |  |  | | --- | --- | | Suy ra .  **Bài 2.8:** Cho hình bình hành  có tâm là . Tìm các vectơ từ  điểm  có độ dài bằng .  **🖎Lời giải tham khảo**  . |  | | **Bài 2.2:**Cho tam giác . Gọi  lần lượt là trung điểm của .  a) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không cùng phương với  có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.  b) Có bao nhiêu vectơ khác vectơ - không cùng hướng với  có điểm đầu và điểm cuối lấy trong điểm đã cho.  ***🖎Lời giải tham khảo:***  Hình 1.4  a. Các vectơ khác vectơ-không cùng phương với  là  b. Các vectơ khác vectơ - không cùng hướng với  là .  **Bài 2.5:** Cho lục giác đều  tâm . Hãy tìm các vectơ khác vectơ-không có điểm đầu, điểm cuối là đỉnh của lục giác và tâm O sao cho  a) Bằng với .  b) Ngược hướng với .  ***Lời giải:***  a) .  b) .  **Bài 2.7:** Cho tam giác  đều cạnh  và  là trọng tâm. Gọi  là trung điểm của .  Tính độ dài của các vectơ .   |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:***    Ta có  Gọi  là trung điểm của  Ta có |  | |  |  | |

**Dạng toán 2. Chứng minh hai vectơ bằng nhau.**

*Ta có thể dùng một trong các cách sau:*

*+ Sử dụng định nghĩa: .*

*****+*** *Sử dụng tính chất của các hình . Nếu  là hình bình hành thì*

*******,…*

*(hoặc viết ngược lại)*

*+ Nếu *

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3:** Cho tam giác  có  lần lượt là trung điểm của .  Chứng minh: .  **🖎Lời giải tham khảo**    *Cách 1*:  là đường trung bình của  nên ,  (1)  cùng hướng  (2)  Từ (1),(2) ⇒ .  *Cách 2*: Chứng minh EFDC là hình bình hành  vàlà hình bình hành  ***.*** | **🖎Lưu ý** |
| **Bài 3.1:** Cho hình bình hành . Hai điểm  và  lần lượt là trung điểm của  và . Điểm  là giao điểm của  và  ,  là giao điểm của  và  .  Chứng minh: .  **🖎Lời giải**    Ta có  và  là hình bình hành  ⇒  Tương tự  là hình bình hành nên  là trung điểm của  ⇒ =.  Tứ giác  là hình bình hành.  Suy ra =⇒.  **Bài 3.3:** Cho tam giác  có  là trực tâm và  là tâm đường tròn ngoại tiếp. Gọi  là điểm đối xứng của  qua . Chứng minh: .  **Giải**    Vì  là đường kính đường tròn ngoại tiếp  nên . Do đó  và . Suy ra tứ giác  là hình bình hành. Vậy  .  **Bài 3.5:** Cho tam giác  có trọng tâm . Gọi  là trung điểm của . Dựng điểm  sao cho . Chứng minh:  a) **.**  b) Gọi  là trung điểm của . Chứng minh .   |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:***    a) Vì  là trung điểm của  nên  và  cùng hướng với  do đó hai vectơ , bằng nhau hay . |  |   b) Ta có  suy ra  và .  Do đó  cùng hướng (1).  Vì  là trọng tâm tam giác  nên ,  là trung điểm  suy ra  Vì vậy  (2)  Từ (1) và (2) ta có .  **Bài 3.6:**  Cho hình bình hành . Trên các đoạn thẳng theo thứ tự lấy các điểm  sao cho . Gọi  là giao điểm của  và  là giao điểm của . Chứng minh .   |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:***    Ta có , mặt khác  song song với  do đó tứ giác  là hình bình hành  Suy ra . |  |   Xét tam giác  và  ta có  (giả thiết),  (so le trong).  Mặt khác  (đối đỉnh) và  (hai góc đồng vị) suy ra  Nên .  Do đó  (g.c.g) suy ra  Dễ thấy  cùng hướng vì vậy **.**     |  |  | | --- | --- | |  |  |   **Bài 3.8:** Cho hình thang  có hai đáy là  và  với . Từ C vẽ . Chứng minh:  a) .  b) .     |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:*** |  |  1. Ta có  suy ra tứ giác  là hình bình hành.   Suy ra  và  nên  Mà  và  do đó  và 3 điểm *A, I, B* thẳng hàng nên  là trung điểm .  Ta có  và tứ giác  là hình bình hành.  Suy ra .  b)  là trung điểm của  và tứ giác  là hình bình hành suy ra . | **Bài 3.2:** Chứng minh rằng hai vectơ bằng nhau có chung điểm đầu (hoặc điểm cuối) thì chúng có chung điểm cuối (hoặc điểm đầu).  **🖎Lời giải**  Giả sử . Khi đó , ba điểm  thẳng hàng và  thuôc nửa đường thẳng gốc  .  (trường hợp điểm cuối trùng nhau chứng minh tương tự).  **Bài 3.4:** Cho tứ giác . Gọi  lần lượt là trung điểm . Chứng minh .   |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:***  Do  lần lượt là trung điểm của  và  nên  là đường trung bình của tam giác  suy ra  và  (1). |  |   Tương tự  là đường trung bình của tam giác  suy ra  và  (2).  Từ (1) và (2) suy ra  và  do đó tứ giác  là hình bình hành.  Vậy ta có .  **Bài 3.7:** Cho hình bình hành . Gọi  lần lượt là trung điểm của ;  là giao điểm của  và  là giao điểm của . Chứng minh: .   |  |  | | --- | --- | | ***Lời giải:***    Ta có tứ giác  là hình  bình hành vì  .  Suy ra .  Xét tam giác  có  là  trung điểm của  và  do đó  là trung điểm của .  Tương tự xét tam giác  suy ra được  là trung điểm  của  Vì vậy  từ  đó suy ra . |  | |

**Dạng toán 3. Dựng điểm dựa vào đẳng thức vectơ.**

* *Để xác định một điểm M ta cần phải chỉ rõ vị trí của điểm đó đối với hình vẽ. Thông thường ta biến đổi đẳng thức vectơ đã cho về dạng , trong đó  và   đã được xác định. Ta thường sử dụng các tính chất về:* *Trung điểm của một đoạn thẳng, điểm chia đoạn thẳng theo tỉ số k, hình bình hành, trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm tam giác, …*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Bài 4.**Cho điểm  và vectơ  . Dựng điểm  sao cho:  a) =;  b)  **cùng phương**  và có độ dài bằng ||.  **🖎Lời giải**    Giả sử*l* là giá của . Vẽ đường thẳng  đi qua  và  (nếu  thuộc *l* thì  trùng *l*). Khi đó có hai điểm  và  thuộc  sao cho:  .  Khi đó ta có:  a) =.  b) = cùng phương với  và | | **🖎Lưu ý** |
| **Bài 4.1:**Cho tam giác . Gọi  lần lượt là trung điểm của .  Vẽ các vectơ bằng vectơ  mà có điểm đầu .  **🖎Lời giải**    Trên tia  lấy điểm  sao cho .  Khi đó ta có  là vectơ có điểm đầu là  và bằng vectơ .  Qua  dựng đường thẳng song song với đường thẳng . Trên đường thẳng đó lấy điểm  sao cho  cùng hướng với  và .  Khi đó ta có  là vectơ có điểm đầu là  và bằng vectơ . | **Bài 4.2:**Cho trước hai điểm  phân biệt . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn .  ***Lời giải:***  Tập hợp điểm  là đường trung trực của đoạn thẳng . | |