BÀI 3. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VÉCTƠ

# Dạng 1. [0H1-3-0] Xác định vectơ

## **1.Phương pháp:**

Để chứng minh một đẳng thức vectơ hoặc phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương, ta thường sử dụng:

– Qui tắc ba điểm để phân tích các vectơ.

– Các hệ thức thường dùng như: hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm tam giác.

– Tính chất của các hình.

## 2. Các ví dụ:

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1**.**:** Cho  và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho:  **🖎Lời giải**  Vẽ d đi qua O và // với giá của  (nếu O ∈ giá của  thì d là giá của )  − Trên d lấy điểm M sao cho OM=3| |, và  cùng hướng khi đó .  − Trên d lấy điểm N sao cho ON= 4||,  và  ngược hướng nên | **🖎Lưu ý** |
| **Ví dụ 2.**  Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho AM=AB. Tìm k trong các đẳng thức sau:    **Lời giải**  **Hướng dẫn giải:**    a) , vì ⇒ k= | b) k= −  c) k= − |
| **Ví dụ 3.**a) Chứng minh:vectơ đối của  là    **Hướng dẫn giải:**  a) | | **2.1** b) Tìm vectơ đối của các véctơ ,  **Lời giải** |

# Dạng toán 2. [0H1-3-1] Đẳng thức véctơ không dùng tính chất trung điểm, trọng tâm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

* Các tính chất phép toán vectơ
* Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ

## 2. Các ví dụ:

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1:**Cho 4 điểm A,B,C,D. M N là trung điểm AB và CD  Chứng minh 2 =  +  **✍ Lời giải**  Ta có thể trình bày theo các cách sau:  *Cách 1*: Ta có phân tích:  =  +  + , (1)  =  +  + . (2)  Cộng theo vế (1) và (2) với lưu ý  +  =  và  +  =  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:  +  = 2, đpcm. (\*)  *Cách 2*: Ta có phân tích:  , (3)  , (4)  Cộng theo vế (3) và (4) với lưu ý  và  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:  2 =  + , đpcm.  . | Chứng minh:  2 =  +  =  + .  Ta có:  +  =  +  +  +  =  + , đpcm. (\*\*)  Từ (\*) và (\*\*) ta được đẳng thức cần chứng minh  A  B  C  D  N  M |
| **Ví dụ 2**: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh: .  **Lời giải:**  Áp dụng qui tắc hình bình hành ta có  ⇒ VT=(đpcm) |  |
| *Ví dụ 3: Cho* O *là tâm của hình bình hành* ABCD. *Chứng minh rằng với điểm* M *bất kì, ta có*:  = ( +  +  + ).  *Giải*  Ta có:  +  +  +  =  +  +  +  +  +  +  +  = 4 + ( + ) + ( + ) = 4  ⇔ ( +  +  + ) = , đpcm. | | **✍ *Chú ý***: Các em học sinh hãy trình bày thêm cách biến đổi VT thành VP. |

# Dạng toán 3. [0H1-3-2] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trung điểm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

* Các tính chất phép toán vectơ
* Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
* Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB

M là trung điểm đoạn thẳng AB(Với O là điểm tuỳ ý)

## 2. Các ví dụ:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tứ giác . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:  a)  ***Lời giải***(Hình 1.16)  a)  Theo hệ thức trung điểm ta có  Mặt khác O là trung điểm IJ nên  Suy ra  đpcm | b)  với M là điểm bất kì  Hình 1.16 14  Giải: Theo câu a ta có  do đó với mọi điểm M thì    đpcm | |
| ***Ví dụ 2****: Cho* ΔABC. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng*:  +  +  = .  **✍** *Giải*  Sử dụng quy tắc trung điểm ta biến đổi:  VT =  +  +  = , đpcm. | |  |
| ***Ví dụ 3****: Cho* ΔABC. *Gọi* M *là trung điểm của* AB *và* N *là một điểm trên cạnh* AC, *sao cho* NC = 2NA. *Gọi* K *là trung điểm của* MN.   * 1. *Chứng minh rằng*  =  + .   **✍** *Giải*   1. Từ giả thiết ta nhận thấy:   ⇔  = 2;  ⇔  = 3.  Vì K là trung điểm MN nên:  = ( + ) = ( + ) =  + , đpcm. | | | *b. Gọi* D *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng*  =  + .  Giải: Vì D là trung điểm BC nên:  = ( + )  từ đó, suy ra:  =  -  = ( + ) - ( + ) =  + , đpcm. |

# Dạng 4. [0H1-3-3] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trọng tâm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

* Các tính chất phép toán vectơ
* Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ
* Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB

M là trung điểm đoạn thẳng AB(Với O là điểm tuỳ ý)

* Tính chất trọng tâm:

G là trọng tâm của tam giác ABC++=

G là trọng tâm của tam giác ABC++=(Với O là điểm tuỳ ý)

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Chứng minh rằng nếu G và G’ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A’B’C’ thì .  **Hướng dẫn giải:** | |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G. Gọi  lần lượt là trọng tâm tam giác . Chứng minh rằng  ***Lời giải***  Vì  là trọng tâm tam giác  nên  Tương tự  lần lượt là trọng tâm tam giác  suy ra  và  Công theo vế với vế các đẳng thức trên ta có    Mặt khác hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G nên  và  Suy ra | |  |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng  a)  ***Lời giải***(Hình 1.17)  Hình 1.17  a) Dễ thấy  nếu tam giác  vuông  Nếu tam giác không vuông gọi D là điểm đối xứng của A qua O khi đó  (vì cùng vuông góc với AC)  (vì cùng vuông góc với AB)  Suy ra  là hình bình hành, do đó theo quy tắc hình bình hành thì  (1)  Mặt khác vì O là trung điểm của AD nên  (2)  Từ (1) và (2) suy ra | | b)  c)  b) Theo câu a) ta có    đpcm  c) Vì G là trọng tâm tam giác  nên  Mặt khác theo câu b)  ta có  Suy ra | |

# Dạng 5. [0H1-3-4] Tính độ dài véctơ tổng, hiệu, tích với 1 số

* **Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.**

## 1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựngvectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác đều  cạnh . điểm  là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.  a)  b)  ***Lời giải***(Hình 1.14)  Hình 1.14  a) Do  suy ra theo quy tắc ba điểm ta có    Vậy  b) Vì  nên theo quy tắc trừ ta có  Theo định lí Pitago ta có    Vậy | c)  d)  c) Gọi  là trung điểm ,  là điểm đối xứng của  qua  và  là đỉnh của hình bình hành .  Khi đó ta có  suy ra theo quy tắc hình bình hành ta có  Gọi  là hình chiếu của  lên  Vì  Xét tam giác vuông  ta có    Ta lại có  Áp dụng định lí Pitago trong tam giác  ta có    Vậy  d) Gọi  là điểm nằm trên đoạn  sao cho ,  thuộc tia  sao cho .  Khi đó  Do đó  Ta có ,  Áp dụng định lí Pitago cho tam tam giác vuông  ta có    Vậy | | |
| 1. *Cho* ΔOAB *vuông cân với* OA = OB = a. *Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng*:   A  B  C  O  a. 3 + 4  b. + 2.5,  **✍** *Giải*   1. Để dựng vectơ 3 + 4 ta lần lượt thực hiện:  * + Trên tia OA lấy điểm A1 sao cho OA1 = 3OA.   + Trên tia OB lấy điểm B1 sao cho OB1 = 4OB.   + Dựng hình chữ nhật OA1C1B1.   Từ đó, ta có:  3 + 4 = + =  ⇒ ⏐3 + 4⏐ = ⏐⏐ = OC1 = = 5a.   1. Thực hiện tương tự câu c), ta dựng được vectơ   + 2.5 và  ⏐ + 2.5⏐ = . | | ***Chú ý***: Với các em học sinh chưa nắm vững kiến thức về tổng của hai vectơ thì thường kết luận ngay rằng:  ⏐ + ⏐ = ⏐⏐ + ⏐⏐ = a + a = 2a.  c.  − .  Giải: Thực hiện tương tự câu c), ta dựng được vectơ  −  và  ⏐ − ⏐ = .  A  B  O  A1  B1  C1 | |
| ***Ví dụ 2:*** Cho hình vuông  cạnh .  a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.  b) Tính độ dài vectơ  ***Lời giải***(Hình 1.15)  a) Gọi  là tâm hình vuông.  Theo quy tắc ba điểm ta có    Mà  nên  Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M  b) Lấy điểm  trên tia sao cho  khi đó  do đó  Mặt khác  Suy ra | | | Hình 1.15 |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 3.26.** Cho tam giác đều  cạnh . Gọi điểm ,  lần lượt là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a)  b) 

c)  c) 

**Bài 3.27:** Cho hình vuông  cạnh .

a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ 

# Dạng 6 [0H1-3-5] Phân tích 1 véctơ theo hai véctơ không cùng phương

## **1. Phương pháp giải.**

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt . Hãy phân tích các vectơ  theo hai vectơ .  **Hướng dẫn giải:**  Ta có  A | | **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho MB= 2MC. Hãy phân tích vectơ  theo hai vectơ .  **Hướng dẫn giải:**  Ta có  mà  ⇒ | | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác . Đặt .  a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn:  b) Hãy phân tích  qua các véc tơ  và .  c) Gọi I là điểm thỏa: . Chứng minh  thẳng hàng  ***Lời giải*** (hình 1.23)  a) Vì  suy ra M thuộc cạnh AB và ; , suy ra N thuộc tia BC và .  b) Ta có:    .  c) Ta có:  A, I, N thẳng hàng. | | | Hình 1.23 | |
| ***Ví dụ 4:*** Cho tam giác  , trên cạnh BC lấy M sao cho , trên đoạn AM lấy N sao cho . G là trọng tâm tam giác .  a) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  ***Lời giải***(hình 1.24)  Hình 1.24  a) Theo giả thiết ta có:  và  suy ra | b) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  Giải: b) Vì G là trọng tâm tam giác  nên  suy ra  Ta có | | | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho hình bình hành . Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho  và G là trọng tâm tam giác . Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  ***Lời giải***(hình 1.25)  Ta có:    Vì G là trọng tâm tam giác nên  Suy ra | | | | Hình 1.25 |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 3.46:** Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho , *,*

a) Biểu diễn các vectơ  theo các vectơ và

b) Biểu diễn các vectơ, theo các vectơ và

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

**Bài 3.47:** Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi 

a)Tính theo  và **.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác 

**Bài 3.48.** Cho tam giác  có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho  và J là điểm trên BC kéo dài sao cho .

a) Hãy phân tích  theo  và .

b) Hãy phân tích  theo  và .

**Bài 3.49:** Cho hai vectơ  không cùng phương. Tìm x sao cho

a)  và  cùng phương

b)  và  cùng hướng

# Dạng 7 [0H1-3-6] Tìm tập hợp điểm thoả điều kiện cho trước

## 1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu  với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu  với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng .

- Nếu  với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

+ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng  với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng  với 

- Nếu  với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác  a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : .  ***Lời giải***  a) Ta có:  I tồn tại và duy nhất. | b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : .  b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:    và  nên    Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính . | |
| ***Ví dụ 2*:** Cho tam giác  . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :  a)  ***Lời giải*** (hình 1.28)  Hình 1.28  a) Gọi E, F lần lượt là trung điểm của AB, AC suy ra  và  Khi đó    Vậy tập hợp các điểm M là đường trung trực của EF | b)  với k là số thực thay đổi  Giải. Ta có    Với H là điểm thỏa mãn  Suy ra    Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua E và song song với HB | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tứ giác . Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho . Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.  ***Lời giải*** (hình 1.29)  Gọi O, O' lần lượt là trung điểm của AD và BC, ta có  Hình 1.29  và  Suy ra  Tương tự vì O, I lần lượt là trung điểm của AD và MN nên  Do đó  Vậy khi k thay đổi, tập hợp điểm I là đường thẳng OO' | |  |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 3.59**. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a)  b) 

**Bài 3.60.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a)  với k là số thực thay đổi

b) cùng phương với véc tơ 

c)  (HD: dựng hình bình hành ABCD)

**Bài 3.61.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:





**Bài 3.62:** Cho tứ giác .

a)Xác định điểm O sao cho : *.*

b)Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức 

**Bài 3.63:** Cho lục giác đều ABCDEF . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

 nhận giá trị nhỏ nhất

**Bài 3.64:** Trên hai tia  và  của góc  lấy hai điểm M, N sao cho  với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thằng MN

# DẠNG 8: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ

## 1. Phương pháp giải.

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả "  với  là hai vectơ không cùng phương "

## 2. Các ví dụ.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác . Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết . Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành.  ***Lời giải***  Ta có:    là hình bình hành. |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn:  Chứng minh rằng  là tam giác đều.  ***Lời giải***  G là trọng tâm tam giác  nên  Suy ra    Vì  và  là hai vecơ không cùng phương, do đó (\*) tương đương với:  hay tam giác  đều. |  |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn . Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác .  ***Lời giải***  Giả sử  Suy ra  và  Mặt khác A' là trung điểm của BC nên  Do đó    hay  Vì  không cùng phương suy ra  do đó B', C' lần lượt là trung điểm của CA, AB  Vậy BB', CC' là các trung tuyến của tam giác . |  |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 3.65:** Cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 3.66:** Cho  có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn . Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 3.67:** Cho có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho  đồng quy và thoả mãn  Chứng minh  là các trung tuyến của tam giác .

**Bài 3.68:** Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn . Chứng minh J là trung điểm của CD.

**Bài 3.69:** Cho tứ giác . Giả sử tồn tại điểm O sao cho  và . Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

**Bài 3.70:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác  . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác .

**Bài 3.71:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác .

**Bài 3.72:** Cho tam giác  và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu  thì M là trọng tâm tam giác .

# Dạng 9. [0H1-3-8] Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

## 1. Phương pháp giải.

* Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ  ta luôn có

+ , dấu bằng xảy ra khi  cùng hướng

+ , dấu bằng xảy ra khi  ngược hướng

* Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của  với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng  khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên .

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn;  đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

## 2. Các ví dụ.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1.*** Cho tam giác  và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất  **Lời giải:**  Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành  thì  Khi đó :    Vậy  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d. |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  và  là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  **Giải:** Vì  và  nên    Do đó:    Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi các vectơ  cùng hướng  Vậy giá trị nhỏ nhất T là |  |
|  |  |

## 3. Bài tập luyên tập.

**Bài 3.73:** Cho tam giác , đường thẳng d và ba số sao cho . Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 3.74:** Cho tam giác . Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác  sao cho 

a) Đạt giá trị lớn nhất

b) Đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 3.75**: Cho tứ giác  và  là các tứ giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng 

**Bài 3.76:** Cho tam giác . M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho . Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

Do đó các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

**Bài 3.77** : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các

đỉnh ta có: 

**Bài 3.78**: Cho tứ giác , M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi  lần lượt là chu vi của các tam giác . Chứng minh rằng .

**Bài 3.79:** Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy  điểm  ở cùng phía với đối với đường kính nào đó. Chứng minh rằng 

# Dạng 10. [0H1-3-9] Bài toán thực tế, liên môn

## 1. Phương pháp giải.

- Sử dụng tính chất hình học phẳng

- Sử dụng tỉ lệ , tỉ số để đưa về hệ thức tích vecto với 1 số

## 2. Các ví dụ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Có hai chiếc cọc cao  và  lần lượt đặt tại hai vị trí  Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng . Người ta chọn một cái chốt ở vị trí  trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giang dây nối đến hai đỉnh  và  của cọc (như hình vẽ). Khi đó  TÌm *k* để dây nối là ngắn nhất?  **Giải:**  Gọi C’ là điểm đối xứng của C qua A, Khi đó    Vậy sợi dậy ngắn nhất khi C’, M, D thẳng hàng hay |  |
| Ví dụ 2: Cho hai vị trí *A*, *B* cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ *A* và từ *B* đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ *A* đến bờ sông để lấy nước mang về *B.* Tìm vị trí M để đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi.  Giải: Gọi A’ là điểm đối xứng của A qua E, Khi đó    Vậy sợi dậy ngắn nhất khi C’, M, D thẳng hàng hay  khi đó M thõa mãn hệ thức |  |

# §3 HƯỚNG DẪN GIẢ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

**Bài 3.26:**



Hình

a) Theo quy tắc ba điểm ta có



Suy ra 

b) Theo quy tắc trừ ta có 



c) Gọi  là điểm đối xứng của  qua , điểm  là là đỉnh của hình bình hành , theo quy tắc hình bình hành ta có 

Gọi  là hình chiếu của  lên .

Vì 





Áp dụng định lí Pitago ta có



Suy ra .

d) Lấy các điểm  sao cho 

Suy ra 

Do đó 

**Bài 3.27:** Gọi  là tâm hình vuông.

Theo quy tắc ba điểm ta có



Mà  nên 

Suy ra  không phụ thuộc vào vị trí điểm M

b) 

**Bài 3.28:**  (hình 1.49)



Hình 1.49

a) 

b) 



**Bài 3.29:** a) Ta có 



b) 

**Bài 3.30:** Ta có 



**Bài 3.31:** Ta có:



**Bài 3.15:** (hình 1.50)



Hình 1.50

Qua M kẻ các đường thẳng song song với các cạnh Δ ABC, các đường thẳng này lần lượt cắt tại các điểm như hình vẽ. Dễ thấy ta có các tam giác đều  và các hình bình hành .

Ta có: , , .

Cộng từng vế 3 đẳng thức và nhóm ta được: 

**Bài 3.32:** Ta gọi M là trung điểm AB và M' là hình chiếu của M lên d. Khi đó, ta có:   
Gọi N là trung điểm của GC (ta cũng có G là trung điểm MN) và N' là hình chiếu của nó lên d thì:  
, .  
Từ ba đẳng thức trên ta có đpcm.   
[RIGHT][I][B]Nguồn: MathScope.ORG[/B][/I][/RIGHT]

**Bài 3.33:** Đặt 

Vì ngũ giác đều nên vectơ  cùng phương với  nên  cùng phương với .

Tương tự  cùng phương với  suy ra .

**Bài 3.34:** Giả sử n vectơ là . Đặt 

Vì tổng của  vectơ bất kì trong n vectơ trên cùng phương với vectơ còn lại do đó  cùng phương với hai vectơ  nên .

**Bài 3.35:** (hình 1.51)



Hình 1.51

a) Gọi  là bán kính đường tròn nội tiếp  ta có



Theo ví dụ 5 ta có 



b) Ta có 

Theo câu a) ta có 

Suy ra 

c) Ta có

Kết hợp ví dụ 5 suy ra



d) 

 với  là nửa chu vi.

Tương tự ta có :





**Bài 3.36:** (hình 1.52)



Hình 1.52

Gọi A' là giao điểm AM với BC ta có  (\*)

Mặt khác 

Và  (1)

Mặt khác  (2)

Thay (1) và (2) vào (\*) ta được điều phải chứng minh.

**Bài 3.37:** (hình 1.53)



Hình 1.53

Ta chứng minh bằng quy nạp

Với  đẳng thức trở thành 

(đúng vì đẳng thức này tương đương với đẳng thức ở bài 11)

Giả sử đúng với 

Gọi  là vectơ đơn vị vuông góc với  và hướng ra ngoài tam giác 

Theo giả thiết quy nạp ta có

 (1)

Mặt khác xét tam giác ta có  (2)

Từ (1) và (2) suy ra điều phải chứng minh.

**Bài 3.38:** (hình 1.54)



Hình 1.54

Gọi  là các tiếp điểm đường tròn nội tiếp với cạnh 

Xét tứ giác  có  và 

Suy ra . Mặt khác  dó đó 

Tương tự ta có 

Xét đa giác lồi  theo định lý con nhím ta có





Mà  suy ra đpcm.

**Bài 3.39:**  Ta có ,

Suy ra 

Mà  và  nên suy ra 

Hay .

**Bài 3.40:** O nằm trong đoạn IK sao cho 

**Bài 3.41:** a) I là điểm đối xứng của A qua B.

b)  c)  d) 

**Bài 3.42:** a) Cho 

Với J là trung điểm của AB, suy ra I là trung điểm của JC



b) 

c) 

**Bài 3.43:**  trùng với tâm đường tròn nội tiếp tam giác

**Bài 3.44:**  a) Vì 

Không mất tính tổng quát giả sử 

Suy ra 

Do đó tồn tại duy nhất điểm M

b) Giả sử tồn tại điểm N và 

Ta có  (mâu thuẫn với  là tam giác)

**Bài 3.45:** O là điểm tùy ý, ta có:





Suy ra G xác định duy nhất

**Bài 3.46:** a) 

b) 

M, N, P thẳng hàng

**Bài 3.47:** a) 

b)  suy ra IJ đi qua trọng tâm G của tam giác ABC.

**Bài 3.48:**  a) Ta có:



b) Gọi M là trung điểm BC, ta có:





**Bài 3.49:**  a)  cùng phương với  có số thực k sao cho 



b)  cùng phương với  có số thực k dương sao cho 



**Bài 3.50:** Ta có ****



Suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác có cùng trọng tâm là 

**Bài 3.51:** G là trọng tâm  

Ta có 



Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 3.52:** Tam giác  và  có cùng trọng tâm

 (đúng)

**Bài 3.53:** G là trọng tâm  

Ta có 

Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 3.54:** G là trọng tâm  

Ta có 



 (1)

Tương tự ta có Cộng vế với vế lại ta được

Suy ra 

Do đó G là trọng tâm 

**Bài 3.55:** Vì và có cùng trọng tâm G suy ra 

Vì là trọng tâm các tam giác  nên 



Suy ra  do đó G là trọng tâm 

**Bài 3.56:** G là trọng tâm tứ giác  (\*)

Vì  là trong tâm , tương tự ta có

, , 

Do đó (\*) (đúng) đpcm

**Bài 3.57:** Gọi D, E, F tương ứng là giao điểm của  với các cạnh BC, CA, AB. O là trọng tâm đều 

Ta có 

Mặt khác theo bài tập 6 (dạng 2) thì 

Suy ra  do đó O là trọng tâm tam giác 

**Bài 3.58:** Ta có 

 (Theo định lý con nhím)

Do đó O là trọng tâm tam giác 

**Bài 3.59:** a) Tập hợp điểm M là đường tròn tâm I bán kính  với I là trung điểm của AB

b) Gọi K là điểm thoả mãn: 

L là điểm thoả mãn: 

Ta có:

Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

**Bài 3.60:**  a) Ta có:



Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng đi qua A và song song với cạnh BC của ΔABC.

b) Gọi J là trung là điểm AB, I là trung điểm JC ta có 



Do đó  cùng phương với  M thuộc đường thẳng đi qua I và song song với BC.

**Bài 3.61:** a) Gọi K là điểm thoả mãn: 

L là điểm thoả mãn: 

Ta có:

⇒ Tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn thẳng KL.

b) Với I là trung điểm của BC. Gọi J là điểm thoả mãn: 

Ta có:





Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm J bán kính .

**Bài 3.62:** a) ** với I là trung điểm BD

b) 

Vậy tập hợp điểm M là đường trung trực của đoạn OA.

**Bài 3.63:** Gọi P là trọng tâm của , Q là trọng tâm của 

 +  =



Dấu " = " xảy ra khi và chỉ khi M thuộc đoạn PQ

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là mọi điểm thuộc đoạn PQ

**Bài 3.64:** Gọi hai điểm  lần lượt thuộc tia  và  sao cho . Giả sử  khi đó ta có . Do đó tập hợp điểm I là đoạn 

**Bài 3.65:** Đặt 

Suy ra 

Do đó  nên tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 3.66:** Ta có 



AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 3.67:** Giả sử 



Tương tự ta có , 



Suy ra .

Mặt khác theo định lí Xêva ta có  nên 

Vậy  là các trung tuyến của tam giác 

**Bài 3.68:**  

Gọi K là trung điểm DC suy ra  do đó  hay J là trung điểm của CD.

**Bài 3.69:** (hình 1.55)



Hình 1.55

Gọi M, N, P, Q là trung điểm của AB, BC, CD, DA từ phương trình thứ hai ta được:

  thẳng hàng và O là trung điểm MP

  thẳng hàng và O là trung điểm NQ.

Ta có  cân tại O nên ,  cân tại O nên  suy ra .

Tương tự  suy ra  là hình bình hành

Mà N, Q là trung điểm của BC, AD nên 

Suy ra  là hình chữ nhật.

**Bài 3.70:** G là trọng tâm tam giác  nên 

Do đó 

Suy ra G là trực tâm tam giác 

**Bài 3.71:** H là trực tâm tam giác  suy ra 

Do đó  hay H là trọng tâm tam giác .

**Bài 3.72:** Trước tiên ta chứng minh bổ đề sau

Cho ba véc tơ  đôi một không cùng phương và thỏa mãn điều kiện : 

Chứng minh rằng : . Thật vậy :

Dễ thấy  thì suy ra ngay n, n’, p, p’ cũng phải khác không.

Từ giả thiết ta có :

vì một véc tơ chỉ phân tích được một cách duy nhất qua hai véc tơ không cùng phương nên 

Trở lại bài toán

Ta có 

Mặt khác , tương tự  và 

(với )

Do đó ta có 

Mặt khác ta cũng có 

Áp dụng bổ đề suy ra  hay M trùng trọng tâm tam giác 

**Bài 3.73:** Do  nên tồn tại duy nhất điểm I sao cho .

Ta có 



Do đó 

Suy ra  nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d

**Bài 3.74:** G là trọng tâm tam giác  ta có 

a) M là giao điểm của tia GO với (C)

b) M là giao điểm của tia OG với (C)

**Bài 3.75:** ĐS: 

**Bài 3.76:**  Ta có 

Suy ra 

Vì  và  không cùng phương nên không thể xảy ra dấu bằng do đó

. Tương tự ta có 

**Bài 3.77:** 

Hay 

**Bài 3.78:** Ta có: 

và 

Từ đó suy ra



Hay 

**Bài 3.79:** Ta chứng minh bằng quy nạp

+ Với : hiển nhiên

+ Giả sử BĐT đúng với  ta đi chứng minh đúng với  hay 

Trong  vectơ ta chọn hai vectơ có góc lớn nhất, giả sử .

Đặt , .

Suy ra điểm A, B nằm trong góc  do đó 



Mặt khác theo giả thiết quy nạp ta có 

Suy ra 

Contents

[Dạng toán 1. [0H1-3-0] Xác định vectơ  1](#_Toc521014808)

[1.Phương pháp: 1](#_Toc521014809)

[2. Các ví dụ: 1](#_Toc521014810)

[Dạng toán 2. [0H1-3-1] Đẳng thức véctơ không dùng tính chất trung điểm, trọng tâm 2](#_Toc521014811)

[1. Phương pháp giải. 2](#_Toc521014812)

[2. Các ví dụ: 2](#_Toc521014813)

[Dạng toán 3. [0H1-3-2] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trung điểm 4](#_Toc521014814)

[1. Phương pháp giải. 4](#_Toc521014815)

[2. Các ví dụ: 4](#_Toc521014816)

[Dạng 4. [0H1-3-3] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trọng tâm 6](#_Toc521014817)

[1. Phương pháp giải. 6](#_Toc521014818)

[2. Các ví dụ. 6](#_Toc521014819)

[Dạng 5. [0H1-3-4] Tính độ dài véctơ tổng, hiệu, tích với 1 số 8](#_Toc521014820)

[1. Phương pháp giải. 8](#_Toc521014821)

[2. Các ví dụ. 8](#_Toc521014822)

[3. Bài tập luyện tập. 10](#_Toc521014823)

[Dạng 6 [0H1-3-5] Phân tích 1 véctơ theo hai véctơ không cùng phương 11](#_Toc521014824)

[1. Phương pháp giải. 11](#_Toc521014825)

[2. Các ví dụ. 11](#_Toc521014826)

[3. Bài tập luyện tập. 13](#_Toc521014827)

[Dạng 7 [0H1-3-6] Tìm tập hợp điểm thoả điều kiện cho trước 14](#_Toc521014828)

[1. Phương pháp giải. 14](#_Toc521014829)

[2. Các ví dụ. 14](#_Toc521014830)

[3. Bài tập luyện tập. 15](#_Toc521014831)

[DẠNG 8: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ 16](#_Toc521014832)

[1. Phương pháp giải. 16](#_Toc521014833)

[2. Các ví dụ. 16](#_Toc521014834)

[3. Bài tập luyện tập. 17](#_Toc521014835)

[Dạng 9. [0H1-3-8] Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất 19](#_Toc521014836)

[1. Phương pháp giải. 19](#_Toc521014837)

[2. Các ví dụ. 19](#_Toc521014838)

[3. Bài tập luyên tập. 20](#_Toc521014839)

[Dạng 10. [0H1-3-9] Bài toán thực tế, liên môn 21](#_Toc521014840)

[1. Phương pháp giải. 21](#_Toc521014841)

[2. Các ví dụ. 21](#_Toc521014842)

[§3 HƯỚNG DẪN GIẢ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 22](#_Toc521014843)