**§1. MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN**

**A. TÓM TẮT SÁCH GIÁO KHOA**

1. Định nghĩa:

*Mệnh đề* là một câu khẳng định *Đúng hoặc Sai*.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

2. Mệnh đề phủ định:

Cho mệnh đề  . Mệnh đề *“Không phải ”* gọi là *mệnh đề phủ định* của  .

Kí hiệu là . Nếu  đúng thì  sai, nếu P sai thì  đúng.

3. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo:

Cho hai mệnh đề  và  Mệnh đề *“Nếu  thì ”* được gọi là *mệnh đề kéo theo*.

Kí hiệu là   Khi đó mệnh đề    được gọi là *mệnh đề đảo* của  

4. Mệnh đề tương đương:

Cho hai mệnh đề  và  Mệnh đề *“ nếu và chỉ nếu ”* được gọi là *mệnh đề tương đương*.

Kí hiệu là  

Mệnh đề   đúng khi cả hai mệnh đề   và    cùng đúng.

*Chú ý:* “Tương đương còn được gọi bằng các thuật ngữ khác như “điều kiện cần và đủ”, “khi và chỉ khi”, “nếu và chỉ nếu”.

5. Mệnh đề chứa biến:

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập  nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc  ta được một mệnh đề.

Câu:  “ chia hết cho ” với  là số tự nhiên.

 “ ” với  là số thực.

6. Các kí hiệu  và mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu .

Kí hiệu : đọc là với mọi; : đọc là tồn tại.

Phủ định của mệnh đề “” là mệnh đề “”

Phủ định của mệnh đề “” là mệnh đề “”

**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI:**

**DẠNG TOÁN 1: XÁC ĐỊNH MỆNH ĐỀ VÀ MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN**

Phương pháp: Muốn xác định được một mệnh đề ta áp dụng định nghĩa sau:

1. Mệnh đề:

*Mệnh đề* là một câu khẳng định *Đúng hoặc Sai*.

Một mệnh đề không thể vừa đúng vừa sai.

2. Mệnh đề chứa biến:

Mệnh đề chứa biến là một câu khẳng định chứa biến nhận giá trị trong một tập X nào đó mà với mỗi giá trị của biến thuộc X ta được một mệnh đề.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1**. Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải là mệnh đề?  (1) Đi Picnic là niềm yêu thích của tôi!  (2) Phương trình  có nghiệm  (3)  không phải là số chẵn.  (4) Số  có phải là số nguyên hay không?  (5) Ấn độ là một trong các nước đông dân nhất thế giới.  (6) Tam giác  vuông khi nó có một góc vuông.  (7) Một tứ giác nội tiếp trong một đường tròn khi tổng hai góc đối bằng  **🖎Lời giải tham khảo**  Câu (1) và (4) không là mệnh đề (vì là câu cảm thán, câu hỏi)  Câu (2) là một mệnh đề. Vì đó là một khẳng định có tính đúng.  Câu (3) là một mệnh đề. Vì đó là một khẳng định có tính sai.  Câu (5) là một mệnh đề. Vì đó là một khẳng định có tính đúng.  Câu (6) là một mệnh đề. Vì đó là một khẳng định có tính đúng.  Câu (7) là một mệnh đề. Vì đó là một khẳng định có tính sai. | | **🖎Lưu ý** |
| **Câu** 2. Trong các phát biểu sau, phát biểu nào là mệnh đề chứa biến?  a) . b)  c)  d)  e) 15 là số chính phương. f) chia hết cho 3 (với ).  **🖎Lời giải tham khảo**    Câu (a) không phải là một mệnh đề.  Câu (b) là một mệnh đề và không phải là một mệnh đề chứa biến.  Câu (c) là một mệnh đề chứa biến.  Vì đó là một mệnh đề đúng khi .là một mệnh đề sai khi Câu (d) là một mệnh đề chứa biến. Vì đó là một mệnh đề đúng khi .là một mệnh đề sai khi .  Câu (e) là một mệnh đề và không phải là một mệnh đề chứa biến.  Câu (f) là một mệnh đề chứa biến. Vì đó là một mệnh đề đúng khi .là một mệnh đề sai khi . | |  |
| **1.1** Các câu sau đây, câu nào là mệnh đề, câu nào không phải mệnh đề?  a) Không được đi lối này!  b) Bây giờ là mấy giờ?  c) Chiến tranh thế giới lần thứ hai kết thúc năm 1946.  d) 16 chia 3 dư 1.  e) 2018 không là số nguyên tố.  f)  là số vô tỉ.  g) Hai đường tròn phân biệt có nhiều nhất hai điểm chung  **🖎Lời giải tham khảo**  Câu không phải mệnh đề là a), b).  Câu d), f) là mệnh đề đúng. Câu e) sai. Câu g) đúng. | **1.2** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là mệnh đề chứa biến?  a) Số 11 là số chẵn. b) Huế là một thành phố của Việt Nam. c)  là một số nguyên dương.  d) . e)  f) Phương trình  có nghiệm.  **🖎Lời giải tham khảo**  Câu (a) là một mệnh đề và không phải là một mệnh đề chứa biến.  Câu (b) là một mệnh đề và không phải là một mệnh đề chứa biến.  Câu (c) là một mệnh đề chứa biến.  Câu (d) là một mệnh đề và không phải là một mệnh đề chứa biến.  Câu (e) là một mệnh đề chứa biến.  Câu (f) là một mệnh đề chứa biến. | |

**DẠNG TOÁN 2: XÉT TÍNH ĐÚNG-SAI CỦA MỘT MỆNH ĐỀ**

Phương pháp: Một câu khẳng định đúng là mệnh đề đúng, một câu khẳng định sai là mệnh đề sai.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1**. Xét tính Đúng-Sai của các mệnh đề sau:  a) Phương trình bậc nhất luôn luôn có nghiệm.  b) Tiếp tuyến của một đường tròn chỉ có một điểm chung với đường tròn đó.  c)  d)  **🖎Lời giải tham khảo**  a) là mệnh đề đúng.  b) là mệnh đề đúng.  c) là mệnh đề sai. Vì  d) là mệnh đề đúng. | | **🖎Lưu ý** |
| 1.1 Xét tính Đúng-Sai của mệnh đề sau:  **a)**  **b**) Nếu một tam giác có một góc bằng  thì tam giác đó đều.  **c)** Một tứ giác là hình chữ nhật khi và chỉ khi chúng có 3 góc vuông  **d)** Nếu  thì  với mọi  *.*  **🖎Lời giải tham khảo**  **a) Sai.** Vì  **b**) **Sai.** Vì Tam giác đều là tam giác có 3 góc bằng .  **c)** Đúng.  **d)** Đúng. | **1.2** Tìm giá trịđể mệnh đề là mệnh đề đúng.  **🖎Lời giải tham khảo**  Mệnh đề đúng khi | |
| **1.3** Cho ba mệnh đề sau, với n là số tự nhiên  (1)  là số chính phương.  (2) Chữ số tận cùng của n là 4.  (3)  là số chính phương.  Biết rằng có hai mệnh đề đúng và một mệnh đề sai. Hãy xác định mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai  **🖎Lời giải tham khảo**  Ta có số chính phương có các chữ số tận cùng là  Vì vậy  - Nhận thấy giữa mệnh đề (1) và (2) có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử 2 mệnh đề này đồng thời là đúng thì  có chữ số tận cùng là 2 nên không thể là số chính phương. Vậy trong hai mệnh đề này phải có một mệnh đề là đúng và một mệnh đề là sai.  - Tương tự, nhận thấy giữa hai mệnh đề (2) và (3) cũng có mâu thuẫn. Bởi vì, giả sử mệnh đề này đồng thời là đúng thì  có chữ số tận cùng là 3 nên không thể là số chính phương.  Vậy trong ba mệnh đề trên thì mệnh đề (1) và (3) là đúng, còn mệnh đề (2) là sai. |  | |

**DẠNG TOÁN 3: PHỦ ĐỊNH MỘT MỆNH ĐỀ.**

*Các phép toán mệnh đề được sử dụng nhằm mục đích kết nối các mệnh lại với nhau tạo ra một mệnh đề mới. Một số các mệnh đề toán là: Mệnh đề phủ định (phép phủ định), mệnh đề kéo theo (phép kéo theo), mệnh đề ảo, mệnh đề tương đương (phép tương đương).*

1. Mệnh đề phủ định:

Cho mệnh đề *P*. Mệnh đề *“Không phải P”* gọi là *mệnh đề phủ định* của *P*.

Kí hiệu là . Nếu P đúng thì  sai, nếu P sai thì  đúng.

2. Các kí hiệu  và mệnh đề phủ định của mệnh đề có chứa kí hiệu .

Kí hiệu : đọc là với mọi; : đọc là tồn tại.

Phủ định của mệnh đề “” là mệnh đề “”

Phủ định của mệnh đề “” là mệnh đề “”

|  |  |
| --- | --- |
| Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai?  P: “Hình thoi có hai đường chéo vuông góc với nhau”  Q: “6 là số nguyên tố”  R: “Tổng hai cạnh của một tam giác lớn hơn cạnh còn lại”  S: “5 > -3”  K: “Phương trình  có nghiệm”  H: “” | ***Lời giải***  Ta có các mệnh đề phủ định là  : “Hai đường chéo của hình thoi không vuông góc với nhau”, mệnh đề này sai  : “6 không phải là số nguyên tố”, mệnh đề này đúng.  : “Tổng hai cạnh của một tam giác nhỏ hơn hoặc bằng cạnh còn lại”, mệnh đề này sai  : “5 ≤ -3”, mệnh đề này sai  : “Phương trình  vô nghiệm”, mệnh đề này đúng vì  : “”, mệnh đề này sai. |
| 1. Xét tính đúng (sai) mệnh đề và phủ định các mệnh đề sau:   a)  b)  c) chia hết cho 4  d)  e)  là một số chính phương | ***Lời giải***  a) Mệnh đề  sai, chẳng hạn khi x = -1 ta có  (-1)3 – (-1)2 + 1 = -1 < 0  Mệnh đề phủ định là  b) Mệnh đề  đúng vì    Mệnh đề phủ định là  c) Mệnh đề chia hết cho 4 đúng vì n =1và n2 + 3 = 4 4  Mệnh đề phủ định là “không chia hết cho 4”  d) Mệnh đề sai. Mệnh đề phủ định là  e) Mệnh đề “ là một số chính phương” đúng. Mệnh đề phủ định là “không là một số chính phương”. |
| 1. Dùng các kí hiệu để viết các câu sau và viết mệnh đề phủ định của nó.   a) Tích của ba số tự nhiên liên tiếp chia hết cho 6  b) Với mọi số thực bình phương của một số là một số không âm  c) Có một số nguyên mà bình phương của nó bằng chính nó.  d) Có một số hữu tỉ mà nghịch đảo của nó lớn hơn chính nó. | ***Lời giải***  a) Ta có P: , n(n +1)(n + 2) 6, mệnh đề phủ định là  : , n(n +1)(n + 2)6.  b) Ta có Q: , mệnh đề phủ định là :  c) Ta có R: , mệnh đề phủ định là  d) mệnh đề phủ định là . |
| 1. Xác định tính đúng sai của mệnh đề sau và tìm phủ định của nó:   a) A: “”  b) B: “Tồn tại số tự nhiên đều là số nguyên tố”  c) C: “x chia hết cho x + 1”  d) D: “ là hợp số”  e) E: “Tồn tại hình thang là hình vuông”  f) F: “Tồn tại số thực a sao cho ” | ***Lời giải***  a) Mệnh đề A đúng và :  b) Mệnh đề B đúng và : “Với mọi số tự nhiên đều không phải là số nguyên tố”  c) Mệnh đề C sai và : “”  d) Mệnh đề D sai vì với n = 2 ta có không phải là hợp số  Mệnh đề phủ định là :”là số nguyên tố”  e) Mệnh đề E đúng và : “Với mọi hình thang đều không là hình vuông”  f) Mệnh đề F đúng và mệnh đề phủ định : “Với mọi số thực a thì”. |
| a) Cho mệnh đề P: “Với mọi số thực x, nếu x là số hữu tỉ thì 2x là số hữu tỉ”.  Dùng kí hiệu P, và xác định tính đúng –sai của nó.  b) Phát biểu MĐ đảo của P và chứng tỏ MĐ đó là đúng. Phát biểu mệnh đề dưới dạng tưng đương. | ***Lời giải***  a) Mệnh đề P: “”. MĐ đúng  : “”. MĐ sai  b) MĐ đảo của P là “Với mọi số thực x, xQ khi và chỉ khi 2xQ”. Hay “”. |
| 1. Nêu mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau, cho biết mệnh đề này đúng hay sai:   P: “Trong tam giác tống ba góc bằng 1800”  Q: “là số nguyên”  R: “Việt Nam vô địch Worldcup năm 2020”  S: “”  K: “Bất phương trình x2013 > 2030 vô nghiệm” | ***Lời giải***  Ta có các mệnh đề phủ định là:  : “Trong tam giác tống ba góc không bằng 1800”, mệnh đề này sai.  : “không phải là số nguyên”, mệnh đề này sai.  : “Việt Nam không vô địch Worldcup năm 2020”, mệnh đề này không xác định được đúng hay sai.  : “”, mệnh đề này đúng  : “Bất phương trình x2013 > 2030 có nghiệm”, mệnh đề này đúng. |

**DẠNG TOÁN 4: MỆNH ĐỀ KÉO THEO, MỆNH ĐỀ ĐẢO, MỆNH ĐỀ TƯƠNG ĐƯƠNG.**

1. Mệnh đề kéo theo và mệnh đề đảo:

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề *“Nếu P thì Q”* được gọi là *mệnh đề kéo theo*.

Kí hiệu là PQ. Khi đó mệnh đề Q P được gọi là *mệnh đề đảo* của PQ.

2. Mệnh đề tương đương:

Cho hai mệnh đề P và Q. Mệnh đề *“P nếu và chỉ nếu Q”* được gọi là *mệnh đề tương đương*.

Kí hiệu là PQ.

Mệnh đề P Q đúng khi cả hai mệnh đề PQ và Q P cùng đúng.

*Chú ý:* “Tương đương còn được gọi bằng các thuật ngữ khác như “điều kiện cần và đủ”, “khi và chỉ khi”, “nếu và chỉ nếu”.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Phát biểu mệnh đề PQ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó.   a) P: “Tứ giác ABCD là hình thoi” và Q: “Tứ giác ABCD, AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường”  b) P: “2 > 9” và Q: “4 < 3”  c) P: “Tam giác ABC vuông cân tại A” và Q: “Tam giác ABC có ”  d) P: “Ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam” và Q: “Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ” | ***Lời giải***  a) Mệnh đề PQ là “Nếu tứ giác ABCD là hình thoi thì AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường”, mệnh đề này đúng.  Mệnh đề đảo là QP “Nếu tứ giác ABCD có AC và BD cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường thì ABCD là hình thoi”, mệnh đề này sai.  b) Mệnh đề PQ là “Nếu 2 > 9 thì 4 < 3”, mệnh đề này đúng thì mệnh đề P sai.  Mệnh đề đảo là QP “Nếu 4 < 3 thì 2 < 9”, mệnh đề này đúng thì mệnh đề Q sai.  c) Mệnh đề PQ là “Nếu tam giác ABC vuông cân tại A thì ”, mệnh đề này đúng.  Mệnh đề đảo là QP “Nếu tam giác ABC có  thì nó vuông cân tại A”, mệnh đề này sai.  d) Mệnh đề PQ là “Nếu ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam thì Ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ”  Mệnh đề đảo là QP “Nếu ngày 27 tháng 7 là ngày thương binh liệt sĩ thì ngày 2 tháng 9 là ngày Quốc Khánh của nước Việt Nam”  Hai mệnh đề trên đều đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng. |
| 1. Phát biểu mệnh đề P Q bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó   a) P: “Tứ giác ABCD là hình thoi” và Q: “Tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau”.  b) P: “Bất phương trình ” có nghiệm và Q: “” | ***Lời giải***  a) Ta có mệnh đề P Q đúng vì mệnh đề PQ, QP đều đúng và được phát biểu theo hai cách như sau:  “Tứ giác ABCD là hình thoi khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau” và  “Tứ giác ABCD là hình thoi nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc với nhau”.  b) Ta có mệnh đề P Q đúng vì mệnh đề P, Q đều đúng (do đó mệnh đề PQ, QP đều đúng) và được phát biểu theo hai cách như sau:  “Bất phương trình  có nghiệm khi và chỉ khi ”  Và “Bất phương trình  có nghiệm nếu và chỉ nếu ”. |
| 1. Phát biểu mệnh đề PQ và phát biểu mệnh đề đảo, xét tính đúng sai của nó   a) P: “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật” và Q: “Tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau”.  b) P: “” và Q: “”  c) P: “Hai tam giác ABC có ” và Q: “Tam giác ABC có BC2 = AB2 + AC2”  d) P: “Tố Hữu là nhà Toán học lớn nhất của Việt Nam” và Q: “Évariste và Galois là nhà Thơ lỗi lạc của thế giới”. | ***Lời giải***  a) PQ: “Nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật thì tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau”, mệnh đề này sai  QP: “Nếu tứ giác ABCD có hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau thì tứ giác ABCD là hình chữ nhật”, mệnh đề này sai  b) PQ: “Nếu thì ”, mệnh đề này đúng  QP: “Nếu thì ”, mệnh đề này sai  c) PQ: “Nếu hai tam giác ABC có thì tam giác ABC có BC2 = AB2 + AC2”  QP: “Nếu tam giác ABC có BC2 = AB2 + AC2 thì hai tam giác ABC có ”  Hai mệnh đề trên đều đúng.  d) PQ: “Nếu Tố Hữu là nhà Toán học lớn nhất của Việt Nam thì Évariste và Galois là nhà Thơ lỗi lạc của thế giới”, QP: “Nếu Évariste và Galois là nhà Thơ lỗi lạc của thế giới thì Tố Hữu là nhà Toán học lớn nhất của Việt Nam”. Hai mệnh đề đúng. |
| 1. Phát biểu mệnh đề P Q bằng hai cách và xét tính đúng sai của nó   a) Cho tứ giác ABCD. Xét hai mệnh đề  P: “Tứ giác ABCD là hình vuông”  Q: “Tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau”  b) P: “Bất phương trình  có nghiệm” và Q: “Bất phương trình  vô nghiệm” | ***Lời giải***  a) Ta có mệnh đề P Q đúng vì mệnh đề PQ, QP đều đúng và được phát biểu bằng hai cách như sau:  “Tứ giác ABCD là hình vuông khi và chỉ khi tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau” và  “Tứ giác ABCD là hình vuông nếu và chỉ nếu tứ giác ABCD là hình chữ nhật có hai đường chéo vuông góc với nhau  b) Ta có mệnh đề P Q sai vì mệnh đề P đúng còn Q sai.  Phát biểu mệnh đề P Q bằng hai cách  “Bất phương trình  có nghiệm khi và chỉ khi Bất phương trình  vô nghiệm” và “Bất phương trình  vô nghiệm nếu và chỉ nếu Bất phương trình  có nghiệm”. |
| 1. Cho hai mệnh đề:   A: “Nếu ΔABC đều có cạnh bằng a, đường cao là h thì ”;  B: “Tứ giác có bốn cạnh bằng nhau là hình vuông”;  C: “15 là số nguyên tố”  D: “là một số nguyên”.  a) Hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai:  AB, AD, BC.  b) Hãy cho biết trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng, mệnh đề nào sai:  AB, BC, BD. | ***Lời giải***  Ta có A và D là các mệnh đề đúng, B và C là các mệnh đề sai. Do đó:  a) Mệnh đề AB sai vì A đúng, B sai.  Mệnh đề AD đúng vì A và D đều đúng.  Mệnh đề BC đúng vì B sai.  b) Mệnh đề AB sai vì mệnh đề AB sai (Hoặc A đúng và B sai), Mệnh đề BC đúng vì hai mệnh đề B và C đều sai.  Mệnh đề AD đúng vì hai mệnh đề A và D đều đúng. |
| 1. Hãy phát biểu mệnh đề kéo theo P Q, P và xét tính đúng sai của mệnh đề này.   a) Cho tứ giác ABCD và hai mệnh đề:  P: “Tổng 2 góc đối diện của tứ giác lồi bằng 1800” và Q: “Tứ giác nội tiếp được đường tròn”.  b) P: “” và Q: “” | ***Lời giải***  a) P Q: “Nếu tổng 2 góc đối diện của tứ giác lồi bằng 1800 thì tứ giác nội tiếp được đường tròn”.  P: “Nếu tứ giác không nội tiếp đường tròn thì tổng 2 góc đối diện của tứ giác lồi bằng 1800”  Mệnh đề P Q đúng, mệnh đề P sai.  b) P Q: “Nếu thì ”  P: “Nếu thì ”  Mệnh đề P Q sai vì P đúng, Q sai, mệnh đề P đúng vì P và Q đều đúng. |
| 1. Cho số tự nhiên n, xét hai mệnh đề chưa biến:   A(n): “n là số chẵn” B(n): “n2 là số chẵn”  a) Hãy phát biểu mệnh đề . Cho biết mệnh đề này đúng hay sai?  b) Hãy phát biểu mệnh đề “”.  c) Hãy phát biểu mệnh đề “”. | ***Lời giải***  a) : “Nếu n là số chẵn thì n2 là số chẵn”. Đây là mệnh đề đúng vì khi đó  là số chẵn.  b) “”: Với mọi số tự nhiên n, nếu n2 là số chẵn thì n là số chẵn.  c) “”: Với mọi số tự nhiên n, n là số chẵn khi và chỉ khi n2 là số chẵn. |

**DẠNG TOÁN 5: ÁP DỤNG MỆNH ĐỀ VÀO SUY LUẬN TOÁN HỌC**

**A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT**

**1. Định lí và chứng minh định lí:**

* Trong Toán học, định lí là một mệnh đề đúng. Nhiều định lí được phát biểu dưới dạng: , P(x), Q(x) là các mệnh đề chứa biến
* Có 2 cách để chứng minh định lí dưới dạng trên

Cách 1: Chứng minh trực tiếp gồm các bước sau:

- Lấy x X bất kỳ mà P(x) đúng.

- Chứng minh Q(x) đúng bằng suy luận và kiến thức Toán học đã biết.

Cách 2: Chứng minh bằng phản định lí gồm các bước sau:

- Giả sử tồn tại sao cho P(x0) đúng là Q(x0) sai

- Dùng suy luận và các kiến thức toán học để đi đến mâu thuẫn.

**2. Định lí đảo, điều kiện cần, điều kiện đủ, điều kiện cần và đủ:**

* Cho định lí dưới dạng  (1). Khi đó

P(x) là *điều kiện đủ* để có Q(x)

Q(x) là *điều kiện cần* đề có P(x)

* Mệnh đề  đúng thì được gọi là ***định lí đảo*** của định lí dạng (1)

Lúc đó (1) được gọi là ***định lí thuận*** và khi đó có thể gộp lại thành một định lí , ta gọi là P(x) là *điều kiện cần và đủ* để có Q(x).

Ngoài ra còn nói “P(x) nếu và chỉ nếu Q(x)”, “P(x) khi và chỉ khi Q(x)”.

**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

**DẠNG TOÁN 5.1: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Chứng minh rằng với mọi số tự nhiên n, n3 chia hết cho 3 thì n chia hết cho 3 | ***Lời giải***  Giả sử n không chia hết cho 3 khi đó n = 3k + 1 hoặc n = 3k + 2, k  Với n = 3k + 1 ta có n3 = (3k +1)3 = 27k3 + 27k2 + 9k + 1 không chia hết cho 3 (mâu thuẫn)  Với n = 3k + 2 ta có n3 = (3k +2)3 = 27k3 + 54k2 + 36k + 4không chia hết cho 3 (mâu thuẫn)  Vậy n chia hết cho 3. |
| 1. Cho tam thức f(x) = ax2 + bx + c, a0. Chứng minh rằng nếu tồn tại số thực sao cho a.f() ≤ 0 thì phương trình f(x) = 0 luôn có nghiệm. | ***Lời giải***  Ta có .  Giả sử phương trình đã cho vô nghiệm, nghĩa là Δ < 0.  Khi đó t có  Suy ra không tồn tại sao cho a.f() ≤ 0, trái với giả thiết.  Vậy điều ta giả sử ở trên là sai, hay phương trình đã cho luôn có nghiệm. |
| 1. Chứng minh rằng một tam giác có đường trung tuyến vừa là phân giác xuất phản từ một đỉnh là tam giác cân tại đỉnh đó. | ***Lời giải***  Giả sử tam giác ABC có AH vừa là đường trung tuyến vừa là đường phân giác và không cân tại A.  4  Không mất tính tổng quát xem như  Trên AC lấy D sao cho AB = AD.  Gọi L là giao điểm của BD và AH.  Khi đó AB = AD,  và AL chung nên ΔABL = ΔADL  Do đó AL = LD hay L là trung điểm của BD  Suy ra LH là đường trung bình của ΔCBD  LH//DC điều này mâu thuẫn vì LH, DC cắt nhau tại A  Vậy tam giác ABC cân tại **A.** |
| 1. Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu phương trình bậc hai:  vô nghiệm thì a và c cùng dấu. | ***Lời giải***  Giả sử phương trình vô nghiệm và a, c trái dấu. Với điều kiện a, c trái dấu ta có a.c < 0 suy ra Δ = b2 – 4ac = b2 + 4(-ac) > 0  Nên phương trình có hai nghiệm phân biệt, điều này mâu thuẫn với giả thiết phương trình vô nghiệm.  Vậy phương trình vô nghiệm thì a, c phải cùng dấu. |
| 1. Chứng minh bằng phương pháp phản chứng: Nếu hai số nguyên dương có tổng bình phương chia hết cho 3 thì cả hai số đó phải chia hết cho 3. | ***Lời giải***  Giả sử trong hai số nguyên dương a và b có ít nhất một số không chia hết cho 3, chẳng hạn a không chia hết cho 3. Thế thì a có dạng a = 3k + 1 hoặc a = 3k + 2. Lúc đó a2 = 3m + 2, nên nếu b chia hết cho 3 hoặc b không chia hết cho 3 thì a2 + b2 cũng có dạng 3n + 1 hoặc 3n + 2, tức là a2 + b2 không chia hết cho 3, trái giả thiết. Vậy nếu a2 + b2 chia hết cho 3 thì cả a và b đều chia hết cho 3. |
| 1. Chứng minh rằng: Nếu độ dài các cạnh của tam giác thỏa mãn bất đẳng thức a2 + b2 > 5c2 thì c là dộ dài cạnh nhỏ nhất của tam giác. | ***Lời giải***  Giả sử c không phải là cạnh nhỏ nhất của tam giác.  Không mất tính tổng quát, giả sử a ≤ c a2 ≤ c2 (1)  Theo bất đẳng thức trong tam giác, ta có, b < a + c b2 < (a +c)2 (2).  Do a ≤ c ( a +c)2 ≤ 4c2 (3)  Từ (2) và (3) suy ra b2 ≤ 4c2 (4)  Cộng vế với vế (1) và (4) ta có a2 + b2 ≤ 5c2 mâu thuẫn với giả thiết  Vậy c là cạnh nhỏ nhất của tam giác. |
| 1. Cho a, b, c dương nhỏ hơn 1. Chứng minh rằng ít nhất một trong ba bất đẳng thức sau sai , , | ***Lời giải***  Giả sử cả ba bất đẳng thức đều đúng.  Khi đó, nhân vế theo vế của các bất đẳng thức trên ta được:  hay (\*)  Mặt khác  Do 0 < a < 1  Tương tự thì ,  Nhân vế theo vế ta được  (\*\*)  Bất đẳng thức (\*\*) mâu thuẫn với (\*)  Vậy có ít nhất một trong ba bất đẳng thức đã cho là sai. (đpcm) |
| 1. Nếu a1a1≥2(b1+b2) thì ít nhất một trong hai phương trình x2 + a1x + b1 = 0, x2 + a2x + b2 = 0 có nghiệm. | ***Lời giải***  Giả sử cả hai phương trình trên vô nghiệm  Khi đó D­1 = a12 – 4b1 < 0, D­2 = a22 – 4b2  a12 – 4b1 + a22 – 4b2 < 0  a12 + a22< 4(b1 + b2) (1)  Mà    (2)  Từ (1) và (2) suy ra  hay  trái giả thiết  Vậy phải có ít nhất một trong hai sô  lớn hơn 0 do đó ít nhất 1 trong 2 phương trình   có nghiệm. |
| 1. Chứng minh rằng  là số vô tỉ. | ***Lời giải***  Dễ dàng chứng minh được nếu n2 là số chẵn thì n là số chẵn.  Giả sử  là số hữu tỉ, tức là , trong đó m, n , (m, n) = 1  Từ  m2 = 2n2m2 là số chẵn  m là số chẵn m = 2k, k  Từ m2 = 2n24k2 = 2n2 n2 = 2k2n2 là số chẵn n là số chẵn  Do đó m chẵn, n chẵn mâu thuẫn với (m, n) = 1.  Vậy  là số vô tỉ. |
| 1. Cho các số a, b, c thỏa mãn các điều kiện:   Chứng minh rằng cả ba số a, b, c đều dương. | ***Lời giải***  Giả sử cả ba số a, b, c không đồng thời là số dương. Vậy có ít nhất một số không dương.  Do a, b, c có vai trò bình đẳng nên ta có thể giả sử a: ≤ 0  + Nếu a = 0 mâu thuẫn với (3)  + Nếu a < 0 thì từ (3) suy ra bc < 0  Ta có (2) a(b +c) > -bc a(b +c) > 0  b + c < 0 a + b + c < 0 mâu thuẫn (1).  Vậy cả ba số a, b, c đều dương. |
| 1. Chứng minh bằng phản chứng định lí sau: “Nếu tam giác ABC có các đường phân giác trong BE, CF bằng nhau thì tam giác ABC cân”. | ***Lời giải***  ***5***  Nếu  thì ta dựng hình bình hành BEDF như hình vẽ.  Ta có  (1)  Ngoài ra, BE = CFDF = CE  (2)  Từ (1) và (2) suy ra  .  Xét tam giác BCE và CBF, ta thấy:  BC chung, BE = CF, BF > CE nên . Mâu thuẫn  Trường hợp , chứng minh hoàn toàn tương tự như trên.  Do đó . Vậy tam giác ABC cân tại **A.** |
| 1. Cho 7 đoạn thẳng có độ dài lớn hơn 10 và nhỏ hơn 100. Chứng minh rằng luôn tìm được 3 đoạn để có thể ghép thành một tam giác. | ***Lời giải***  Trước hết sắp xếp các đoạn đã cho theo thứ tự tăng dần của độ dài  và chứng minh rằng trong dãy đã sắp xếp luôn tìm được 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu hớn hơn đoạn cuối (vì điều kiện để 3 đoạn có thể ghép thành một tam giác là tổng của hai đoạn lớn hơn đoạn thứ 3).  Giả sử điều kiện cần chứng minh là không xảy ra, nghĩa là đồng thời xảy ra các bất đẳng thức sau:   …;  Từ giả thiết a1, a2 có giá trị lớn hơn 10, ta nhận được  Từ  và  ta nhận được    và  Điều  là mâu thuẫn với giả thiết các độ dài nhỏ hơn  Có mâu thuẫn này là do giả sử điều cần chứng minh không xảy ra.  Vậy, luôn tồn tại 3 đoạn liên tiếp sao cho tổng của 2 đoạn đầu hớn hơn đoạn cuối. Hay nói cách khác là 3 đoạn này có thể ghép thành một tam giác. |

**DẠNG TOÁN 5.2: SỬ DỤNG THUẬT TOÁN ĐIỀU KIỆN CẦN, ĐIỀU KIỆN ĐỦ, ĐIỀU KIỆN CẦN VÀ ĐỦ**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. Cho định lí: “Cho số tự nhiên  nếu  chia hết cho 5 thì n chia hết cho 5”. Định lí này được viết theo dạng   a) Hãy xác định các mệnh đề P và Q.  b) Phát biểu định lí trên bằng cách dung thuật ngữ “điều kiện cần”.  c) Phát biểu định lí trên bằng cách dung thuật ngữ “điều kiện đủ”.  d) Hãy phát biểu định lí đảo (nếu có) của định lí trên rồi dung các thuật ngữ “điều kiện cần và đủ” để gộp cả hai định lí thuận và đảo. | ***Lời giải***  a) P: “ là số tự nhiên,  chia hết cho  ”,  “ chia hết cho  ”.  b) Với  là số tự nhiên,  chia hết cho  là điều kiện cần đề  chia hết cho  ; hoặc phát biểu các khác: Với n là số tự nhiên, điều kiện cần đề n5 chia hết cho 5 là n chia hết cho 5.  c) Với n là số tự nhiên,  chia hết cho 5 là điều kiện đủ để  chia hết cho  d) Định lí đảo: “Cho số tự nhiên n, nếu n chia hết cho 5 thì  chia hết cho 5”.  e) Thật vậy nếu  thì  : số này chia hết cho 5.  *Điều kiện cần và đủ* để n chia hết cho 5 là  chia hết cho 5. |
| 1. Phát biểu các mệnh đề sau với thuật ngữ “Điều kiện cần”, “Điều kiện đủ”   a) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có diện tích bằng nhau  b) Nếu số nguyên dương chia hết cho 6 thì chia hết cho 3  c) Nếu hình thang có hai đường chéo bằng nhau thì nó là hình thang cân  d) Nếu tam giác ABC vuông tại  và  là đường cao thì | ***Lời giải***  a) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có diện tích bằng nhau  Hai tam giác có diện tích bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.  b) Số nguyên dương chia hết cho 6 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 3  Số nguyên dương chia hết cho 3 là điều kiện cần để nó chia hết cho 6  c) Hình thang có hai đường chéo bằng nhau là điều kiện đủ để nó là hình thang cân  Hình thang cân là điều kiện cần để nó có hai đường chéo bằng nhau  d) Tam giác ABC vuông tại A và AH là đường cao là điều kiện đủ để  Tam giác ABC có  là điều kiện cần để nó vuông tại  và  là đường cao. |
| 1. Phát biểu các định lí sau đây bằng cách sử dụng khái niệm “Điều kiện cần” và “Điều kiện đủ”   a) Nếu trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 thì hai đường thẳng đó song song với nhau.  b) Nếu số nguyên dương có chữ số tận cùng là 5 thì chia hết cho 5.  c) Nếu tứ giác là hình thoi thì hai đường chéo vuông góc với nhau.  d) Nếu hai tam giác bằng nhau thì chúng có các góc tương ứng bằng nhau.  e) Nếu số nguyên dương a chia hết cho 24 thì chia hết cho 4 và 6. | ***Lời giải***  a) Trong mặt phẳng, hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3 là điều kiện đủ để hai đường thẳng đó song song với nhau  Trong mặt phẳng, hai đường thẳng song song với nhau là điều kiện cần để hai đường thẳng đó cùng vuông góc với đường thẳng thứ 3.  b) Số nguyên dương có chữ số tận cùng là 5 là điều kiện đủ để chia hết cho 5.  Số nguyên dương chia hết cho 5 là điều kiện cần để có chữ số tận cùng là 5.  c) Tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để hai đường chéo vuông góc với nhau.  Tứ giác có hai đường chéo vuông góc với nhau là điều kiện cần để nó là hình thoi.  d) Hai tam giác bằng nhau là điều kiện đủ để chúng có các góc tương ứng bằng nhau.  Hai tam giác có các góc tương ứng bằng nhau là điều kiện cần để chúng bằng nhau.  e) Số nguyên dương a chia hết cho 24 là điều kiện đủ để nó chia hết cho 4 và 6.  Số nguyên dương a chia hết cho 4 và 6 là điều kiện cần để nó chia hết cho 24. |
| 1. Dùng thuật ngữ điều kiện cần và đủ để phát biểu các thuật ngữ sau   a) Một tam giác là tam giác cân, nếu và chỉ nếu nó có hai góc bằng nhau  b) Tứ giác là hình bình hành khi và chỉ khi tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.  c)  d) Tứ giác MNPQ là hình bình hành khi và chỉ khi . | ***Lời giải***  a) Một tam giác là tam giác cân là điều kiện cần và đủ để nó có hai góc bằng nhau  b) Tứ giác là hình bình hành là điều kiện cần và đủ để tứ giác có hai đường chéo cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường.  c) là điều kiện cần và đủ để  d) Điều kiện cần và đủ để tứ giác MNPQ là hình bình hành là . |
| 1. Sử dụng thuật ngữ “điều kiện cần”, “điều kiện đủ” để phát biểu định lí sau:   a) “Nếu một tứ giác là hình vuông thì nó có bốn cạnh bằng nhau”.  Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao?  b) “Nếu một tứ giác là hình thoi thì nó có hai đường chéo vuông góc”  Có định lí đảo của định lí trên không, vì sao? | ***Lời giải***  a) Một tứ giác là hình vuông là điều kiện đủ để nó có 4 cạnh bằng nhau.  Một tứ giác có 4 cạnh bằng nhau là điều kiện cần để nó là hình vuông.  Không có định lí đảo vì tứ giác có 4 cạnh bằng nhau có thể là hình thoi.  b) Một tứ giác là hình thoi là điều kiện đủ để nó có hai đường chéo vuông góc  Một tứ giác có hai đường chéo vuông góc là điều kiện cần để nó là hình thoi.  Không có định lí đảo vì một tứ giác có hai đường chéo vuông góc có thể là hình vuông hoặc một đa giác bất kì có hai đường chéo vuông góc. |