**BÙI THỊ VÂN ANH - NV 41-BẤT ĐẲNG THỨC – TỰ LUẬN - GV**

**BÀI 1: BẤT ĐẲNG THỨC**

**4.1.1 CÁC CÂU HỎI CHƯA PHÂN DẠNG – DÙNG ĐỊNH NGHĨA**

Để chứng minh bất đẳng thức(BĐT) ****** ta có thể sử dụng các cách sau:

* Ta đi chứng minh . Để chứng minh nó ta thường sử dụng các hằng đẳng thức để phân tích  thành tổng hoặc tích của những biểu thức không âm.
* Xuất phát từ BĐT đúng, biến đổi tương đương về BĐT cần chứng minh.

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Câu 1: Cho các số thực . Chứng minh rằng các bất đẳng thức sau:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có  Đẳng thức. | **🖎Lưu ý:** | | | | |
| 1.1)  **Lời giải:**  Bất đẳng thức tương đương với  (đúng) ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra | 1.2)  **Lời giải:**  BĐT tương đương  (đúng) ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra | | | | |
| 1.3)  **Lời giải:**  BĐT tương đương  (đúng) ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra | 1.4) Cho năm số thực . Chứng minh:  **Lời giải:**  Ta có :    đpcm.  Đẳng thức xảy ra . | | | | |
| Câu 2: Cho . Chứng minh rằng :  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có  (Do . | | | | | **🖎Lưu ý:** |
| Câu 3: Cho số thực . Chứng minh rằng :  **🖎Lời giải tham khảo:**  Bất đẳng thức tương đương với    (đúng với mọi số thực  )  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | **🖎Lưu ý:** | | | |
| 3.1)  **Lời giải:**  Bất đẳng thức tương đương với    Ta có  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  (không xảy ra)  Suy ra  ĐPCM. | | | | | |
| 3.2)  **Lời giải:**  Bất đẳng thức tương đương với  + Với  : Ta có  Vì  nên  do đó .  + Với  : Ta có  Vì  nên  do đó .  Vậy ta có . | | | | | |
| Câu 4: Cho  là các số thực. Chứng minh rằng:    **🖎Lời giải tham khảo:**  BĐT tương đương với  (đúng)  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | **🖎Lưu ý:** | | |
| 4.1)  **Lời giải:**  BĐT tương đương với    (đúng)  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | | | |
| 4.2)  **Lời giải:**  BĐT tương đương với    (đúng)  Đẳng thức không xảy ra. | | | | | |
| Câu 5: Cho hai số thực  thỏa mãn . Chứng minh rằng:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Bất đẳng thức tương đương    (đúng với ) ĐPCM. | | | | **🖎Lưu ý:** | |
| 5.1)  **Lời giải:**  Bất đẳng thức tương đương  Theo trên ta có , do đó ta chỉ cần chứng minh : (\*) Thật vậy, BĐT (\*)    (đúng với ). Đẳng thức không xảy ra. | | | | | |

**4.1.2 CÂU HỎI LÝ THUYẾT**

**Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức:**

\*  và 

\* 

\*  và 

\* Nếu  thì ; Nếu  thì 

\* 

\* 

\*

\* Chú ý hai mệnh đề sau thường dùng

**1) **

**2)**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Câu 1: Cho hai số thực  thỏa mãn .  Chứng minh rằng:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Vì a,b,c là độ dài ba cạnh tam giác nên ta có :  .  Tương tự :  Cộng ba BĐT này lại với nhau ta có đpcm | | **🖎Lưu ý:**  Ở trong bài toán trên ta đã xuất phát từ BĐT đúng đó là tính chất về độ dài ba cạnh của tam giác. Sau đó vì cần xuất hiện bình phương nên ta nhân hai vế của BĐT với c.  Ngoài ra nếu xuất phát từ BĐT  rồi bình phương hai vế ta cũng có được kết quả. |
| Câu 2: Cho . Chứng minh :  **🖎Lời giải tham khảo:**  Vì      Ta có :   nên từ (\*) ta suy ra  đpcm. | **🖎Lưu ý:**  Ta có thể dùng chứng minh tương đương:  BĐT cần chứng minh tương đương với Mà   do đó    Ta chỉ cần chứng minh  Thật vậy: vì  nên theo nhận xét  ta có  vậy BĐT ban đầu được chứng minh | |

**4.1.3 BÀI TẬP ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY**

***Định lý:*** *Với hai số không âm* a, b*, ta có*:

 ≥  (*thường được viết* a + b ≥ 2),

*dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* a = b.

***Mở rộng***

1. *Với các số a, b, c không âm, ta luôn có*: ≥ 

*thường được viết*: a + b + c ≥ 3 *hoặc* (a + b + c)3 ≥ 27abc.

*Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* a = b = c.

1. *Với* n *số* ai, i =  *không âm, ta luôn có*: ≥ n.

*dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi* a1 = a2 = ... = an.

***Một số chú ý khi sử dụng bất đẳng thức côsi:***

\* Khi áp dụng bđt côsi thì các số phải là những số không âm

\* BĐT côsi thường được áp dụng khi trong BĐT cần chứng minh có tổng và tích

\* Điều kiện xảy ra dấu ‘=’ là các số bằng nhau

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Câu 1:** Cho  là số dương thỏa mãn .  Chứng minh:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng BĐT côsi ta có    Suy ra  (1)  Mặt khác ta có  (1)  Từ (1) và (2) suy ra  ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | **🖎Lưu ý:** | | |
| **Lời giải:**  Ta có  Áp dụng BĐT côsi ta có  và  Suy ra  Do đó  ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi | | | | |
| **Câu 2:** Cho  là số dương. Chứng minh rằng:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng BĐT côsi ta có:  Suy ra  ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | **🖎Lưu ý:** | |
| **2.1)**  **Lời giải:**  Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có:,  tương tự ta có  Suy ra  Mặt khác, áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có    Suy ra . ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | | |
| **2.2)**  **Lời giải:**  Ta có  Áp dụng BĐT côsi cho ba số dương ta có  và  Suy ra  ĐPCM  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | | |
| **2.3)**  **Lời giải:**  Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có    Suy ra  (1)  Mặt khác theo BĐT côsi cho ba số dương ta có      Suy ra  (2)  Từ (1) và (2) suy ra  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | | |
| **Câu 3:** Cho  là số dương thỏa mãn .  Chứng minh rằng:  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có  (1)  Áp dụng BĐT côsi ta có  Cộng vế với vế lại ta được  (2)  Từ (1) và (2) ta có  (3)  Áp dụng BĐT côsi ta có  , tương tự ta có  Cộng vế với vế ta được  (4)  Từ giả thiết và (3), (4) suy ra  ĐPCM  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | **🖎Lưu ý:** | | | |
| **3.1)**  **Lời giải:**  Áp dụng BĐT côsi ta có    Tương tự ta có  Cộng vế với vế ta được  ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi . | | | |

**4.1.4 BÀI TẬP ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC CAUCHY – SCHWARS (BUNHIACOPXKI)**

***Định lí***: *Cho* a1, a2, b1, b2 *là những số thực, ta có*: (a1b1 + a2b2)2 ≤ ( + )( + )

D*ấu đẳng thức xảy ra khi*  = .

***Mở rộng***

1) Với các số thực a1, a2, a3, b1, b2, b3, ta luôn có:(a1b1 + a2b2 + a3b3)2 ≤ ( +  + )( +  + ),

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  =  = .

2) Với hai bộ n số ai, bi, i = , ta luôn có ≤.,

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  =  = ... = .

3) Với a1, a2, ..., an là n số tuỳ ý, ta luôn có: ≤ .

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| Câu 1: Chứng minh rằng với mọi số thực x, y luôn có    **🖎Lời giải tham khảo:**  VT = (x3 + y3)2 = (x.x2 + y.y2)2 ≤ (x2 + y2)(x4 + y4), đpcm.  Dấu đẳng thức xảy ra khi:  =  ⇔  =  ⇔ x = y. | | | **🖎Lưu ý:** |
| Câu 2: Chứng minh rằng nếu x + 3y = 2 thì x2 + y2 ≥ .  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có: 22 = (x + 3y) 2 ≤ (1 + 33)(x2 + y2) = 10(x2 + y2) ⇒ x2 + y2 ≥  = ,  dấu "=" xảy ra khi  ⇒ x =  và y = . | | **🖎Lưu ý:** | |
| **2.1)** Nếu 2x + 3y = 7 thì 2x2 + 3y2 ≥  **Lời giải:**  Ta có: 72 = (2x + 3y) 2 = (.x + .y)2 ≤ (2 + 3)(2x2 + 3y2) = 5(2x2 + 3y2)  ⇒ 2x2 + 3y2 ≥ ,  dấu "=" xảy ra khi  ⇒ x = y = . | | | |
| **Câu 3:** *Cho các số không âm* x, y *thoả mãn*  . *Chứng minh rằng*:  **🖎Lời giải tham khảo:**  áp dụng bất đẳng thức Bunhiacôpxki ta có:    ⇔ (x2 + y2) 4 ≤ 4(x + y)2 = 4(1.x + 1.y)2 ≤ 4(1 + 1)(x2 + y2) = 8(x2 + y2)  ⇔ (x2 + y2)3 ≤ 8 ⇔ x2 + y2 ≤ 2, đpcm.  Dấu "=" xảy ra khi: ⇔  ⇔ x = y = 1. | **🖎Lưu ý:** | | |

**4.1.5 BÀI TẬP ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC VECTƠ**

**4.1.6 BÀI TẬP ÁP DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC TRỊ TUYỆT ĐỐI**

Các tính chất của bất đẳng thức chứa trị tuyệt đối

1. −⏐a⏐ ≤ a ≤ ⏐a⏐ với mọi số thực a.
2. ⏐x⏐ ≤ a ⇔ −a ≤ x ≤ a với a ≥ 0 (tương tự ⏐x⏐< a ⇔ −a < x < a với a > 0).
3. ⏐x⏐ ≥ a ⇔ x ≤ −a hoặc x ≥ a với a ≥ 0 (tương tự ⏐x⏐ > a ⇔ x < −a hoặc x > a với a > 0).
4. 

**4.1.7 BÀI TẬP SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ**

**4.1.8 BÀI TẬP SỬ DỤNG BẤT ĐẲNG THỨC PHỤ**

***Phương pháp giải.***

Điều quan trọng dạng toán này là cần phát hiện ra được bất đẳng thức phụ. Bất đẳng thức phụ có thể là những BĐT cơ bản đã có hoặc là chúng ta từ đặc điểm của BĐT cần chứng minh chúng ta dự đoán và đưa ra BĐT phụ từ đó vận dụng vào bài toán.

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 1:** Cho  là số dương. Chứng minh rằng:    **🖎Lời giải tham khảo:**  Trước tiên ta chứng minh.  BĐT tương đương với  (đúng với mọi  )  . Đẳng thức xảy ra khi .  Ta có  Hoàn toàn tương tự ta có  Cộng vế với vế rút gọn ta được  Hay **,** đẳng thức xảy ra khi . | **🖎Lưu ý:** |
| **Lời giải:**  Theo bài toán trên ta có :  Tương tự :  Cộng ba BĐT trên lại với nhau ta có đpcm.  Đẳng thức xảy ra khi . | |
| **Câu 2:** Cho  là các số thực. Chứng minh rằng:.  **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng bất đẳng thức  nên ta chứng minh (\*)  Thật vậy :  (đúng) ĐPCM  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. | **🖎Lưu ý:** |
| **2.1)**  **Lời giải:**  Dễ thấy bất đẳng thức đúng khi .  Xét . Áp dụng BĐT  ta có    Suy ra  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi. | |
| Câu 3 : Cho a, b, c dương thỏa mãn  . Chứng minh rằng    **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng BĐT  này hai lần ta có :    (vì )  Suy ra  hay  ĐPCM.  Đẳng thức xảy ra | **🖎Lưu ý:** | | |
| **3.1)**  **Lời giải:**  Áp dụng  ta có  Do đó ta cần chứng minh (\*)  Lại áp dụng (ví dụ 1) ta có  (\*\*)  Áp dụng bất đẳng thức  và (\*\*) ta có    Vậy BĐT (\*) đúng nên BĐT ban đầu đúng. ĐPCM..  Đẳng thức xảy ra. | | |

* + 1. **TÌM GIÁ TRỊ LỚN NHẤT – GIÁ TRỊ NHỎ NHẤT CỦA BIỂU THỨC**

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| Câu 1: Tìm giá trị lớn nhất của hàm số:  a. y = (2x + 1)(2 - 3x), với x ∈ [-; ].  **🖎Lời giải tham khảo:**  Với − ≤ x ≤  thì 2x + 1 ≥ 0 và 2 - 3x ≥ 0, do đó sử dụng bất đẳng thức Côsi ta được:y = (2x + 1)(2 − 3x) =(x + ).( − x) = (x + )( - x)  ≤  = . = .  Từ đó suy ra yMax = , đạt được khi:x +  =  − x ⇔ x = . | | **🖎Lưu ý:** | | |
| 1.1) y = x(1 - x) 3, với 0 ≤ x ≤ 1.  **Lời giải:**  Viết lại hàm số dưới dạng: y = .3x(1 - x)3 = .3x(1 - x)(1 - x)(1 - x), rồi áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 4 số không âm gồm 3x và 3 số 1 - x, ta được:  y ≤ . = . = ,  từ đó suy ra yMax = , đạt được khi:3x = 1 - x = 1 - x = 1 - x ⇔ x = . | | | | |
| Câu 2: Tìm giác trị nhỏ nhất của hàm số: y = x +  với x > 1.  **🖎Lời giải tham khảo:**  Vì x > 1 nên x − 1 và  là hai số dương. Do đó:  y = x +  = 1 + x − 1 +  ≥ 1 + 2 = 1 + 2.  từ đó, suy ra yMin = 1 + 2, đạt được khi: x − 1 =  ⇔ x = 1 + 2. | **🖎Lưu ý:** | | | |
| 2.1) y = x2 + , *với* x > 0.  **Lời giải:**  Viết lại hàm số dưới dạng: y = x2 + x2 + x2 +  +  ≥ 5 =  từ đó, suy ra yMin = , đạt được khi: x2 =  ⇔ x5 = 3 ⇔ x = . | | | | |
|  |  | | | |
| **Câu 3:** Cho  là số dương thỏa mãn . Tìm giá trị nhỏ nhất của .  **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng BĐT côsi ta có:  và  Cộng vế với vế ta được  , kết hợp với  Suy ra  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Vậy . | | | **🖎Lưu ý:** | |
| **Câu 4:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:  với  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có  Áp dụng BĐT côsi cho hai số dương ta có    Suy ra  Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Vậy  khi | | | **🖎Lưu ý:** | |
| **Câu 5:** Tìm giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau:  với .  **🖎Lời giải tham khảo:**  Ta có  Với  thì  là các số không âm nên theo BĐT côsi ta có :  (1)  (2)  Từ (1) và (2) suy ra  , từ đó ta có .  Dấu bằng xảy ra (1) và (2) đồng thời xảy ra dấu bằng  .  Vậy. | | | | **🖎Lưu ý:** |
| **Câu 6:** Cho  là các số thực dương. Tìm giá trị lớn nhất của    **🖎Lời giải tham khảo:**  Áp dụng BĐT côsi ta có  Tương tự ta có  Cộng vế với vế các BĐT trên ta được    Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi  Vậy | | | **🖎Lưu ý:** | |

**4.1.10 CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC DÙNG NHIỀU PHƯƠNG PHÁP**

|  |  |
| --- | --- |
| **Câu 1:** Cho . Chứng minh :  **🖎Lời giải tham khảo:**  *Cách 1:* Vì  (\*)  Ta có :  nên từ (\*) ta suy ra  đpcm.  *Cách 2:* BĐT cần chứng minh tương đương với  Mà   do đó    Ta chỉ cần chứng minh  Thật vậy: vì  nên theo nhận xét  ta có    vậy BĐT ban đầu được chứng minh | **🖎Lưu ý:** |

**4.1.11 BÀI TOÁN THỰC TẾ**