**CHƯƠNG III: PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG**

**§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG**

**A. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.**

**1. Vectơ pháp tuyến và phương trình tổng quát của đường thẳng :**

***a. Định nghĩa :*** Cho đường thẳng . Vectơ  gọi là *vectơ pháp tuyến* (VTPT) của  nếu giá của  vuông góc với .

***Nhận xét :***

- Nếu  là VTPT của  thì  cũng là VTPT của .

***b. Phương trình tổng quát của đường thẳng***

Cho đường thẳng  đi qua  và có VTPT .

Khi đó 

 (1)

(1) gọi là *phương trình tổng quát* của đường thẳng .

***Chú ý :***

- Nếu đường thẳng  : thì  là VTPT của .

***c) Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát***

*  song song hoặc trùng với trục 
*  song song hoặc trùng với trục 
*  đi qua gốc tọa độ 
*  đi qua hai điểm  với 
* Phương trình đường thẳng có hệ số góc k là  với ,  là góc hợp bởi tia  của  ở phía trên trục  và tia 

**2. Vị trí tương đối của hai đường thẳng.**

Cho hai đường thẳng 

*  cắt  khi và chỉ khi 
*  khi và chỉ khi  và , hoặc  và 
*  khi và chỉ khi 

***Chú ý***: Với trường hợp  khi đó

+ Nếu  thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu  thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu  thì hai đường thẳng trùng nhau.

**B. CÁC DẠNG TOÁN VÀ PHƯƠNG PHÁP GIẢI.**

* **DẠNG 1: Viết phương trình tổng quát của đường thẳng.**

**1. Phương pháp giải:**

* Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng  ta cần xác định

- Điểm 

- Một vectơ pháp tuyến  của 

Khi đó phương trình tổng quát của  là 

***Chú ý:***

* Đường thẳng  có phương trình tổng quát là  nhận  làm vectơ pháp tuyến.
* Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì VTPT đường thẳng này cũng là VTPT của đường thẳng kia.
* Phương trình đường thẳng  qua điểm  có dạng

 với 

hoặc ta chia làm hai trường hợp

+ : nếu đường thẳng song song với trục 

+  : nếu đường thẳng cắt trục 

* Phương trình đường thẳng đi qua  với  có dạng 

***Ví dụ 1:*** Cho tam giác  biết . Viết phương trình tổng quát của

a) Đường cao 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b) Đường trung trực của đoạn thẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

c) Đường thẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

d) Đường thẳng qua  và song song với đường thẳng .

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Vì  nên  là vectơ pháp tuyến của 

Ta có  suy ra đường cao  đi qua  và nhận  là vectơ pháp tuyến có phương trình tổng quát là  hay .

b) Đường trung trực của đoạn thẳng  đi qua trung điểm  và nhận vectơ  làm vectơ pháp tuyến.

Gọi  là trung điểm  khi đó 

Suy ra phương trình tổng quát của đường trung trực  là  hay 

c) Phương trình tổng quát của đường thẳng  có dạng  hay .

d) Cách 1: Đường thẳng  có VTPT là  do đó vì đường thẳng cần tìm song song với đường thẳng  nên nhận  làm VTPT do đó có phương trình tổng quát là  hay .

Cách 2: Đường thẳng  song song với đường thẳng  có dạng .

Điểm  thuộc  suy ra .

Vậy đường thẳng cần tìm có phương trình tổng quát là .

***Ví dụ 2:*** Cho đường thẳng  và điểm . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  biết:

a)  đi qua điểm  và có hệ số góc 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

b)  đi qua  và vuông góc với đường thẳng 

**A.**  **B.**  **C.**  **D.** 

***Lời giải:***

a) Đường thẳng  có hệ số góc  có phương trình dạng . Mặt khác 

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng  là  hay .

b) Ta có  do đó hệ số góc của đường thẳng  là .

Vì  nên hệ số góc của  là  thì 

Suy ra phương trình tổng quát đường thẳng là .

**3. Bài tập luyện tập.**

**Bài 3.1:** Cho điểm . Viết phương trình tổng quát của đường thẳng  đi qua  và

a) Vuông góc với trục tung

b) song song với đường thẳng 

**Bài 3.2:** Cho tam giác  biết .

a) Viết phương trình tổng quát của đường cao 

b) Viết phương trình tổng quát đường trung trực của đoạn thẳng .

c) Viết phương trình tổng quát đường thẳng .

d) Viết phương trình tổng quát đường thẳng qua  và song song với đường thẳng .

**Bài 3.3:** Viết phương trình tổng quátcủa đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau:

a) Δ đi qua điểm  và song song với đường thẳng 

b) Δ đi qua  và có hệ số góc .

**Bài 3.4:** Cho . Viết phương trình đường thẳng qua M cắt chiều dương hai trục toạ độ tại A, B sao cho  đạt giá trị nhỏ nhất.

* **DẠNG 2: Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.**

**1. Phương pháp giải:**

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng .

Ta xét hệ  (I)

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra .

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra 

+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d1 và d2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

***Chú ý***: Với trường hợp  khi đó

+ Nếu  thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu  thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu  thì hai đường thẳng trùng nhau.

**2. Các ví dụ:**

***Ví dụ 1:*** Xét vị trí tương đối các cặp đường thẳng sau

a) 

**A.**  cắt  **B.**  trùng 

**C.**  **D.** Không xác định được

b) 

**A.**  cắt  **B.**  trùng 

**C.**  **D.** Không xác định được

c) 

**A.**  cắt  **B.**  trùng 

**C.**  **D.** Không xác định được

d) 

**A.**  cắt  **B.**  trùng 

**C.**  **D.** Không xác định được

***Lời giải:***

a) Ta có  suy ra  cắt 

b) Ta có  suy ra  trùng 

c) Ta có  suy ra  cắt 

d) Ta có  suy ra 

***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có phương trình các đường thẳng  là .

Xác định vị trí tương đối của đường cao kẻ từ đỉnh A và đường thẳng 

***Lời giải***

Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ 

Ta xác định được hai điểm thuộc đường thẳng BC là 

Đường cao kẻ từ đỉnh A vuông góc với BC nên nhận vectơ  làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là  hay 

Ta có  suy ra hai đường thẳng cắt nhau.

***Ví dụ 3:*** Cho hai đường thẳng  và .

a) Xác định vị trí tương đối và xác định giao điểm (nếu có) của  và  trong các trường hợp 

b) Tìm  để hai đường thẳng song song với nhau.

***Lời giải:***

a) Với  xét hệ  suy ra  cắt  tại điểm có tọa độ 

Với  xét hệ  suy ra  cắt  tại gốc tọa độ

b) Với  hoặc  theo câu a hai đường thẳng cắt nhau nên không thỏa mãn

Với  và  hai đường thẳng song song khi và chỉ khi



Vậy với  thì hai đường thẳng song song với nhau.

***Ví dụ 4:*** Cho tam giác , tìm tọa độ các đỉnh của tam giác trong trường hợp sau

a) Biết  và hai đường cao có phương trình .

b) Biết , phương trình đường cao kẻ từ B là ; phương trình trung tuyến đi qua đỉnh C là 

***Lời giải***

a) Tọa độ điểm A không là nghiệm của phương trình  suy ra  nên ta có thể giả sử 

Ta có AB đi qua  và vuông góc với  nên nhận  làm VTPT nên có phương trình là

 hay ; AC đi qua  và vuông góc với  nên nhận  làm VTPT nên có phương trình là  hay 

B là giao điểm của  và AB suy ra tọa độ của B là nghiệm của hệ



Tương tự tọa độ C là nghiệm của hệ 

Vậy ,  và 

b) Ta có AC đi qua  và vuông góc với  nên nhận  làm VTPT nên có phương trình là

 hay 

Suy ra toạ độ C là nghiệm của hệ 

Giả sử  suy ra trung điểm  của AB thuộc đường thẳng  do đó

 hay  (1)

Mặt khác  suy ra  (2)

Từ (1) và (2) suy ra 

Vậy ,  và .

**3. Bài tập luyện tập:**

**Bài 3.5:** Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau:







**Bài 3.6:** Cho hai đường thẳng  và điểm 

a) Tìm tọa độ giao điểm của  và .

b) Viết phương trình đường thẳng  đi qua M và cắt  và  lần lượt tại A và B sao cho B là trung điểm của đoạn thẳng AM

**Bài 3.7:** Cho hai đường thẳng có phương trình:

 với 

a) Tìm quan hệ giữa a và b để  và  cắt nhau

b) Tìm điều kiện giữa a và b để  và  cắt nhau tại điểm thuộc trục hoành.

**Bài 3.8:** Cho 2 đường thẳng .

Chứng minh rằng:

a) Đường thẳng  luôn đi qua 1 điểm cố định với mọi .

b)  luôn cắt . Xác định toạ độ giao điểm của chúng.

**Bài 3.9:** Cho hai đường thẳng 

Biện luận theo  vị trí tương đối của hai đường thẳng.

**Bài 3.10:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ , cho các điểm  và các đường thẳng

, 

a) Chứng minh  và  luôn cắt nhau.

b) Gọi P là giao điểm của  và . Tìm *m* sao cho  lớn nhất.

**Bài 3.11:** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ  cho hai đường thẳng , (với m là tham số thực). Chứng minh rằng với mọi  thì hai đường thẳng đó luôn cắt nhau tại 1 điểm nằm trên một đường tròn cố định.

**Bài 3.12:** Tam giác  biết  và  và  là trực tâm của tam giác. Tìm tọa độ điểm .

**Bài 3.13:** Cho điểm  và đường thẳng . Tìm hình chiếu của  lên .

**Bài 3.14:** Cho tam giác biết  và đường phân giác trong CK có phương trình là . Tính toạ độ đỉnh  của tam giác.