**Bài 3. HÀM SỐ BẬC HAI**



1. **Định nghĩa**

Hàm số bậc hai là hàm số cho bằng biểu thức có dạng  trong đó  là các hằng số và .

1. **Các dạng bài tập**

**Dạng toán 1. Tính đơn điệu của hàm số**

*Phương pháp giải:*

Lập bảng biến thiên của hàm số từ đó dựa vào bảng biến thiên để đưa ra kết luận về chiều biếu thiên.

Bảng biến thiên của hàm số bậc hai:

|  |  |
| --- | --- |
| bề lõm parabol hướng lên trên  *x*  *y* | Bề lõm parabol hướng xuống dưới        *y*  *x* |

Từ đó, ta có định lí dưới đây

**Định lí**

 Nếu  thì hàm số  nghịch biến trên khoảng  đồng biến trên khoảng 

 Nếu  thì hàm số  đồng biến trên khoảng  nghịch biến trên khoảng 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 1**. *Xét chiều biến thiên của hàm số* Hàm số  **🖎Lời giải tham khảo**  Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:    Từ đó ta có thể đưa ra kết luận:  Hàm số đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên | | **🖎Lưu ý**  **Phân biệt cho HS để tránh HS kết luận SAI như sau:**  Hàm số đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên |
| **1.1**.  **Lời giải**  Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:    Từ đó ta có thể đưa ra kết luận:  Hàm số nghịch biến trên khoảng  và đồng biến trên | **1.2**  **Lời giải**  Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:    Từ đó ta có thể đưa ra kết luận:  Hàm số đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên | |
| **1.3**  **Lời giải**  Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:    Từ đó ta có thể đưa ra kết luận:  Hàm số nghịch biến trên khoảng  và đồng biến trên | **1.4**  **Lời giải**  Bảng biến thiên của hàm số đã cho như sau:    Từ đó ta có thể đưa ra kết luận:  Hàm số đồng biến trên khoảng  và nghịch biến trên | |

**Dạng toán 2. Xác định đỉnh và trục đối xứng của đồ thị hàm số bậc hai.**

*Phương pháp giải:*

Parabol 

1) Tọa độ của đỉnh hoặc 

2) Phương trình trục đối xứng 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 2**. Xác định tọa độ đỉnh và phương trình trục đối xứng của parabol ?  **🖎Lời giải tham khảo**  Parabol có đỉnh  và có phương trình trục đối xứng là | | **🖎Lưu ý**  **Khi xác định tung độ đỉnh của Parabol ta nên dùng và MTCT để đơn giản và tránh sai sót trong tính toán.** |
| **2.1**.  **Lời giải**  Parabol có đỉnh  và có phương trình trục đối xứng là | **2.2**  **Lời giải**  Parabol có đỉnh  và có phương trình trục đối xứng là | |
| **2.3**  **Lời giải**  Parabol có đỉnh  và có phương trình trục đối xứng là | **2.4**  **Lời giải**  Parabol có đỉnh  và có phương trình trục đối xứng là | |

**Dạng toán 3. Xác định hệ số của hàm số bậc hai:**

*Phương pháp giải:*

**-** Một điểm thuộc đồ thị hàm số nếu như tọa độ điểm đó thỏa mãn phương trình của hàm số.

- Đồ thị hàm số  đi qua  khi và chỉ khi 

- Đồ thị hàm số  cắt trục tung tại điểm có tung độ  khi 

- Đồ thị hàm số  cắt trục hoành tại điểm có hoành độ  khi 

- Đồ thị hàm số  có đỉnh  khi và chỉ khi 

- Đồ thị hàm số  có trục đối xứng  khi và chỉ khi 

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 3**. Xác định phương trình của Parabol (P):  trong các trường hợp (P) đi qua điểm  và  **🖎Lời giải tham khảo**  Vì (P) đi qua A, B nên .  Vậy (P): . | | **🖎Lưu ý**  Để xác định hàm số bậc hai ta là như sau  Gọi hàm số cần tìm là. Căn cứ theo giả thiết bài toán để thiết lập và giải hệ phương trình với ẩn , từ đó suy ra hàm số cần tìm. |
| **3.1**. Parabol (P):  biết (P) có đỉnh  **Lời giải**  Vì (P) có đỉnh  nên.  Vậy (P): . | **3.2** Parabol (P):  (P) cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng 3 và có đỉnh .  **Lời giải**  (P) cắt Oy tại điểm có tung độ bằng 3 suy ra  (P) có đỉnh suy ra:  Vậy parabol (P): | |
| **3.3.** (P):  qua A(1 ; 0) và trục đối xứng  **Lời giải**  Từ giải thiết ta có  Giải hệ phương trình trên ta được  Vậy (P): | **3.4.** Tìm (P):  , biết rằng (P) có đỉnh  **Lời giải**  Từ giải thiết ta có  Giải hệ phương trình trên ta được  Vậy (P): | |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 4**. Xác định parabol : ,  biết đi qua  có đỉnh  **🖎Lời giải tham khảo**  Vì  nên  (1).  Mặt khác  có đỉnh  nên  (2)  Từ (1), (2) ta có  Vậy  cần tìm là . | | **🖎Lưu ý**  **Khi có giả thiết tọa độ của đỉnh  ta thường lập hệ 2 phương trình** |
| **4.1**. Hàm số  có giá trị nhỏ nhất bằng  khi  và nhận giá trị bằng  khi.  **Lời giải**  Hàm số  có giá trị nhỏ nhất bằng  khi  nên ta có (5) (6)  và  Hàm số  nhận giá trị bằng  khi nên (7)  Từ (5), (6) và (7) ta có  Vậy cần tìm là . | **4.2.** Xác định parabol  biết rằng  đi qua ba điểm   và .  **Lời giải**  Vì  đi qua ba điểm  nên có hệ  .  Vậy . | |
| **4.3.** Xác định parabol  biết rằng  cắt trục  tại hai điểm có hoành độ lần lượt là  và , cắt trục  tại điểm có tung độ bằng .  **Lời giải**  Gọi  và  là hai giao điểm cuả  với trục  có hoành độ lần lượt là  và . Suy ra , .  Gọi  là giao điểm của  với trục  có tung độ bằng . Suy ra .  Theo giả thiết,  đi qua ba điểm  nên ta có .  Vậy . | **4.4.** Xác định parabol  biết rằng  có đỉnh  và cắt trục tung tại điểm có tung độ bằng .  **Lời giải**  Đỉnh  nên  có đỉnh  nên .  Gọi  là giao điểm của  với  tại điểm có tung độ bằng . Suy ra .  Theo giả thiết,  thuộc  nên .  Từ  và , ta có hệ:  .  Vậy . | |

**Dạng toán 5. Đồ thị hàm số bậc hai**

*Phương pháp giải:*

Để vẽ đường parabol  ta thực hiện các bước như sau:

– Xác định toạ độ đỉnh .

– Xác định phương trình trục đối xứng  và hướng bề lõm của parabol.

– Xác định một số điểm cụ thể của parabol (chẳng hạn, giao điểm của parabol với các trục toạ độ và các điểm đối xứng với chúng qua trục trục đối xứng).

– Căn cứ vào tính đối xứng, bề lõm và hình dáng parabol để vẽ parabol*.*

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 5**. Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị các hàm số  **🖎Lời giải tham khảo**  Bảng biến thiên:    Suy ra đồ thị hàm số  có đỉnh là , đi qua các điểm  Nhận đường thẳng  làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên  Ta có đồ thị hàm số: | | **🖎Lưu ý** |
| **5.1**.  **Lời giải**  Bảng biến thiên:    Suy ra đồ thị hàm số  có đỉnh là , đi qua các điểm  Nhận đường thẳng  làm trục đối xứng và hướng bề lõm xuống dưới  Ta có đồ thị hàm số: | **5.2.**  **Lời giải**  Bảng biến thiên:    Suy ra đồ thị hàm số  có đỉnh là , đi qua các điểm  Nhận đường thẳng  làm trục đối xứng và hướng bề lõm lên trên  Ta có đồ thị hàm số: | |

**Dạng toán 6. Đồ thị hàm số bậc hai có chứa dấu giá trị tuyệt đối**

*Phương pháp giải:*

Căn cứ theo việc bỏ dấu giá trị tuyệt đối và các tính chất của hàm số để vẽ đồ thị hàm số chưa dấu giá trị tuyệt đối.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 6**. Vẽ đồ thị hàm số  **🖎Lời giải tham khảo**  Vẽ parabol  của đồ thị hàm số  có đỉnh , trục đối xứng , đi qua các điểm .  Khi đó đồ thị hàm số  gồm  + Phần parabol  nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của  nằm dưới trục hoành qua trục hoành. | | **🖎Lưu ý**  **Nên phân tích kỹ hơn cách vẽ đồ thị hàm số chứa dấu giá trị tuyệt đối bản chất là việc thực hiện bỏ dấu giá trị tuyệt đối và dựa trên một số tính chất đặc biệt của hàm số (hàm số chẵn, hàm số lẻ)** |
| **6.1**.  **Lời giải**  Vẽ đồ thị hàm số  có đỉnh , trục đối xứng , đi qua các điểm . Bề lõm hướng lên trên.  Khi đó đồ thị hàm số  là  gồm phần bên phải trục tung của  và phần lấy đối xứng của nó qua trục tung (do hàm số là hàm số chẵn). | **6.2.**  **Lời giải**  Vẽ parabol  của đồ thị hàm số  có đỉnh , trục đối xứng , đi qua các điểm .  Khi đó đồ thị hàm số  gồm  + Phần parabol  nằm phía trên trục hoành và phần đối xứng của  nằm dưới trục hoành qua trục hoành. | |
| **6.3.**  **Lời giải**  Ta có:  Do đó :  + Vẽ  và lấy đồ thị của  phần bên phải đường thẳng .  + Vẽ  và lấy đồ thị của  phần bên trái đường thẳng . | **6.4.**  **Lời giải**  Ta có:  Do đó :  + Vẽ  và lấy đồ thị của  phần bên phải đường thẳng .  + + Vẽ  và lấy đồ thị của  phần bên trái đường thẳng . | |

**Dạng toán 7. Bài toán về sự tương giao**

*Phương pháp giải:*

Sử dụng phương tình hoành độ giao điểm của hai đồ thị hàm số.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 7**. Tọa độ giao điểm của  với đường thẳng  **🖎Lời giải tham khảo**  Phương trình hoành độ giao điểm của  và  là:      Vậy tọa độ giao điểm là | | **🖎Lưu ý** |
| **7.1**. Cho parabol  và đường thẳng . Tìm tất cả các giá trị thực của  để  cắt  tại hai điểm phân biệt  sao cho diện tích tam giác  bằng .  **Lời giải**  Phương trình hoành độ giao điểm của  và  là  .  Để  cắt  tại hai điểm phân biệt  khi và chỉ khi .  Với .  Với  .  Gọi  là hình chiếu của  lên . Suy ra .  Theo giả thiết bài toán, ta có  . | **7.2.** Cho parabol  và đường thẳng . Tìm giá trị thực của tham số  để  cắt  tại hai điểm phân biệt  có hoành độ  thỏa mãn .  **Lời giải**  Phương trình hoành độ giao điểm của  và  là  .  Để  cắt  tại hai điểm phân biệt  khi và chỉ khi .  Khi đó, ta có  . | |
| **7.3.** Cho hàm số  có bảng biến thiên như sau:  *x*  *y*              Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  để phương trình  có đúng hai nghiệm.  **Lời giải**  Phương trình . Đây là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng  (song song hoặc trùng với trục hoành).  Dựa vào bảng biến thiên, ta thấy để phương trình đã cho có đúng hai nghiệm khi và chỉ khi | **7.4 .** Tìm tất cả các giá trị thực của tham số  để phương trình  có nghiệm thuộc đoạn .  **Lời giải**  Ta có  Phương trình  là phương trình hoành độ giao điểm của parabol  và đường thẳng  (song song hoặc trùng với trục hoành).  Ta có bảng biến thiên của hàm số  trên  như sau:          *x*  *y*              Dựa vào bảng biến ta thấy  thì .  Do đo để phương trình  có nghiệm | |
| **7.5.** Cho hàm số  đồ thị như hình bên. Hỏi với những giá trị nào của tham số thực  thì phương trình  có đúng  nghiệm phân biệt.    **Lời giải**  Ta có . Từ đó suy ra cách vẽ đồ thị hàm số  từ đồ thị hàm số  như sau:  ⏺ Giữ nguyên đồ thị  phía trên trục hoành.  ⏺ Lấy đối xứng phần đồ thị  phía dưới trục hoành qua trục hoành ( bỏ phần dưới ).  Kết hợp hai phần ta được đồ thị hàm số  như hình vẽ.    Phương trình  là phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số  và đường thẳng  (song song hoặc trùng với trục hoành).  Dựa vào đồ thị, ta có ycbt | **7.6.** Tìm tất cả các giá trị thực của  để phương trình  có 4 nghiệm phân biệt.  **Lời giải**  Đặt .  Khi đó, phương trình đã cho trở thành:  Phương trình (1) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn    Dựa vào đồ thị ta suy ra phương trình (\*) có 2 nghiệm phân biệt thỏa mãn  khi và chỉ khi | |

**Dạng toán 8. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số bậc hai**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 8**. Tìm giá trị nhỏ nhất  của hàm số  **🖎Lời giải tham khảo**    Từ BBT ta tìm được giá trị nhỏ nhất  khi | | **🖎Lưu ý** |
| **8.1**. Tìm giá trị lớn nhất  và giá trị nhỏ nhất  của hàm số  trên đoạn  **Lời giải**  Hàm số  có  nên bề lõm hướng xuống.  Hoành độ đỉnh .  Ta có  (có thể lập BBT của hàm số trên đoạn  từ đó suy ra kết quả). | **8.2.** Tìm giá trị lớn nhất  và giá trị nhỏ nhất  của hàm số  trên đoạn  **Lời giải**  Hàm số  có  nên bề lõm hướng lên.  Hoành độ đỉnh .  Vậy | |
| **8.3.** Cho phương trình , *m* là tham số. Tìm  để phương trình có hai nghiệm  và  giá trị lớn nhất.  **Lời giải**  Ta có  Phương trình có nghiệm  Theo định lý Viét ta có    Xét hàm số  với  Bảng biến thiên   |  |  | | --- | --- | |  |  | |  |  |   Suy ra  khi và chỉ khi  Vậy  là giá trị cần tìm. | **8.4.** Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số  trên  **Lời giải**  Đặt . Với  ta có  Hàm số trở thành  với  Bảng biến thiên:    Suy ra  khi  hay  khi  hay . | |

**Dạng 9: Bài toán thực tế**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Câu 9**. Bạn An dự Hội chợ hàng Việt nam chất lượng cao chào mừng ngày Phụ nữ Việt nam 20/10. Tại đây có một cổng chào bằng cao su được bơm khí, có dạng hình parabol lật úp. An đứng ở vị trí  dưới cổng và đỉnh đầu vừa chạm vào một điểm trên cổng. Dựa trên hình vẽ và các số liệu, tính chiều cao cổng chào này.    Biết chiều rộng của cổng là; là khoảng cách từ An đến điểm  của chân cổng bên phải và chiều cao của An là .  **Lời giải**  (P) có dạng: . (P) qua hai điểm nên tìm được:  Vậy cổng chào cao . | | **🖎Lưu ý**  Chọn hệ trục tọa độ  sao cho gốc tọa độ  trùng với một đầu của parabol. |
| **9.1**. Khi du lịch đến thành phố Lui (Mĩ) ta sẽ thấy một cái cổng lớn dạng Parabol bề lõm quay xuống dưới. Đó là cổng Acxơ. Biết cổng dài , và đi từ một đầu bên đây của cổng  thì sẽ thấy một cây đèn cao  gắn với cổng. Tính chiều cao của cổng? (khoảng cách từ điểm cao nhất của cổng đến mặt đất).  **Lời giải**  Chọn hệ trục tọa độ  sao cho gốc tọa độ O trùng một chân của cổng (như hình vẽ).    Dựa vào đồ thị ta thấy chiều cao chính là tung độ của đỉnh Parabol. Như vậy, vấn đề được giải quyết nếu ta biết hàm số bậc hai nhận cổng Acxơ làm đồ thị.  Ta biết hàm số bậc hai có dạng: . Do vậy muốn biết được đồ thị hàm số nhận cổng làm đồ thị thì ta cần biết ít nhất tọa độ của ba điểm nằm trên đồ thị chẳng hạn O, B, M.  Rõ ràng  Ta viết được hàm số lúc này là :  Đỉnh  Vậy trong trường hợp này cổng cao | **9.2.** Trường của An muốn sơn lại cổng trường (như hình vẽ) nhưng không biết mua thang cao bao nhiêu để đủ chiều cao cổng. Tính chiều cao cao nhất của cổng trường? Biết độ rộng của cổng là  ; phân phía trên đoạn  là một parapol, điểm  cách đường  một khoảng  và cách mép cổng ở bên trái một khoảng là  và điểm  cách nền sân một khoảng    **Lời giải**  Ta biết hàm số bậc hai có dạng: . Do vậy muốn biết được đồ thị hàm số nhận cổng làm đồ thị thì ta cần biết ít nhất tọa độ của ba điểm nằm trên đồ thị chẳng hạn .  Ta chọn  thì điểm   Ta viết được hàm số là:  Đỉnh  Vậy cổng trường cao . Nên nhà trường nên mua thang cao khoảng  để sơn lại cổng trường. | |