**Bài 5.3: MỘT SỐ PHƯƠNG TRÌNH VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI**

**Dạng toán 1: Phương trình trùng phương**

|  |
| --- |
| ***Phương trình trùng phương:*** |
| * Đặt  thì * Để xác định số nghiệm của  ta dựa vào số nghiệm của  và dấu của chúng, cụ thể:   Để  vô nghiệm  Để  có 1 nghiệm  Để  có 2 nghiệm phân biệt  Để  có 3 nghiệm  có 1 nghiệm bằng 0 và nghiệm còn lại dương.  Để  có 4 nghiệm  có 2 nghiệm dương phân biệt. |

|  |
| --- |
| **Bài 1:** Cho phương trình:  (1)  Tìm m để phương trình:   1. Có nghiệm duy nhất. 2. Có hai nghiệm phân biệt. 3. Có ba nghiệm phân biệt. 4. Có bốn nghiệm phân biệt.   **✍ *Giải***  Đặt  với điều kiện  .  Khi đó, phương trình được biến đổi về dạng:  (2)   1. Phương trình (1) có nghiệm duy nhất   ⇔ (2) có nghiệm t1 ≤ 0 = t2 ⇔ , vô nghiệm.  Vậy, không tồn tại m thoả mãn điều kiện đầu bài.   1. Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt   ⇔ (2) có nghiệm  .  Vậy, với  thoả mãn điều kiện đầu bài.   1. Phương trình (1) có ba nghiệm phân biệt   ⇔ (2) có nghiệm   .  Vậy, với thoả mãn điều kiện đầu bài.   1. Phương trình (1) có bốn nghiệm phân biệt   ⇔ (2) có nghiệm   .  Vậy, với thoả mãn điều kiện đầu bài. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 1.1:** Cho phương trình (\*). Tìm  để  a) Phương trình (\*) có nghiệm  b) Phương trình (\*) có bốn nghiệm phân biệt  ***Lời giải***  Đặt , phương trình trở thành  (\*)  a) Với  phương trình (\*) trở thành  suy ra  thì phương trình (\*) có nghiệm  Với  phương trình (\*\*) là phương trình bậc hai.  Phương trình (\*) có nghiệm khi và chỉ khi phương trình (\*\*) có nghiệm không âm   * TH1: Phương trình (\*\*) có hai nghiệm không âm      * TH2: Phương trình (\*\*) có hai nghiệm trái dấu * TH3: Phương trình (\*\*) có một nghiệm bằng không và một nghiệm âm(không xảy ra vì  không là nghiệm của phương trình (\*\*) với mọi )   Vậy phương trình (\*) có nghiệm khi và chỉ khi .  b) Với  phương trình (\*) trở thành  suy ra  không thỏa mãn  Với  phương trình (\*\*) là phương trình bậc hai.  Phương trình (\*) bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi phương trình (\*\*) có hai nghiệm dương phân biệt    Vậy phương trình (\*) có bốn nghiệm phân biệt khi và chỉ khi . |  |

**Dạng toán 2: Phương trình chứa GTTĐ**

|  |
| --- |
| Để giải phương trình chứa dấu trị tuyệt đối, ta tìm cách khử dấu trị tuyệt đối bằng cách: dùng định nghĩa  hoặc bình phương 2 vế hoặc đặt ẩn phụ.  **➀Loại 1**:  hoặc sử dụng định nghĩa:  **➁Loại 2**:  **➂Loại 3**:  dùng phương pháp chia khoảng để giải. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2.: Giải các phương trình sau**  a) . b)  ***Lời giải***   1. Phương trình     Vậy phương trình có nghiệm là  và ..  c) Với  ta có  suy ra phương trình vô nghiệm  Với  khi đó hai vế của phương trình không âm suy ra  Phương trình      Đối chiếu với điều kiện  thấy chỉ có  và  thỏa mãn  Vậy phương trình có nghiệm là  và . |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Bài 2.1: Giải các phương trình sau:**  *a)  b )*.  *c)*  **✍ *Giải***  Lập bảng xét dấu  và  :   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  | 0 |  | 1 |  | 2 |  |  | |  |  | + | 0 |  |  | + |  | + |  | |  |  |  |  |  |  |  | 0 | + |  |   *Trường hợp 1*: Với  hoặc , phương trình có dạng:    (loại).  *Trường hợp 2: Với*  , phương trình có dạng:    Trường hợp 3: Với , phương trình có dạng:    Vậy nghiệm của phương trình là: và .  b) Điều kiện:  .  Lập bảng xét dấu  và  :   |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  | 3 |  | 4 |  |  | |  |  |  | 0 | + |  | + |  | |  |  |  |  |  | 0 | + |  |   *TH1: Với*   , phương trình có dạng:  .  *TH2: 2*: Với , phương trình có dạng:  .  *TH3*: Với , phương trình có dạng :  .  Vậy phương trình có nghiệm là: .  c) Viết lại phương trình dưới dạng:  (1)  Đặt , điều kiện .  Khi đó, phương trình (1) được biến đổi về dạng:  (3)  ta có, do đó:  (3)   .  Vây, phương trình có 6 nghiệm phân biệt  . |  |

***Chú ý: Trong một số trường họp ta có thể giải phương trình chứa GTTĐ bằng cách sử dụng tính chất của GTTĐ***

Ta sử dụng các tính chất sau:

1. Ta có:

.

1. Ta có:

 .

1. Ta có:

 .

1. Ta có:

.

với lược đồ thực hiện theo các bước:

1. Đặt điều kiện có nghĩa (nếu cần) cho các biểu thức trong phương trình.
2. Biến đổi phương trình về một trong 4 tính chất đã biết.
3. Giải ( hoặc biện luận) phương trình đại số nhận được.
4. Kết luận.

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 2.2:a)****Giải phương trình** .  **✍** *Giải*  Ta có thể trình bày theo các cách sau:  *Cách 1*: Viết lại phương trình dưới dạng:    .  Vậy, nghiệm của phương trình là .  *Cách 2*: Viết lại phương trình dưới dạng:    .  Vậy, nghiệm của phương trình là .  **b)** . (1)  **✍** *Giải:*  Biến đổi bất phương trình về dạng:    .  Vậy nghiệm của bpt là: . |  |

**Dạng toán 3: Bất phương trình chứa GTTĐ**

|  |
| --- |
| **Loại 1**:  ⇔  Hoặc .  **Loại 2:** ⇔ ⇔ Hoặc |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 3. :** **Giải các bất phương trình sau :**  a)  b)  .  **✍ *Giải***  a) Ta có    Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  b) Biến đổi bất phương trình về dạng:      .  Cách 2: Có thể dùng định nghĩa để giải như sau:  (1) ⇔  ⇔  . |  |

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **Bài 3.1: Giải các bất phương trình sau:**  a. . b). c).  **✍** *Giải*   1. BiÕn ®æi t­¬ng ®­¬ng bÊt ph­¬ng tr×nh vÒ d¹ng:   .  Vậy nghiệm của bất phương trình là:  b) Lập bảng xét dấu  và   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  |  |  |  | 0 |  | 4 |  | 5 |  |  | |  |  | + |  | 0 |  | 0 | + |  | + |  | |  |  |  |  |  |  |  |  | 0 | + |  |   *TH 1: Với*   hoặc  (1)  .  *TH 2: Với*  (1) .  *TH 3*: Với  (1) ⇔  Vậy nghiệm của bất phương trình là: .  **c**) Đặt  Khi đó bất phương trình có dạng:    .  Vậy nghiệm của bất phương trình là: . |  |

**Dạng toán 4: Bất phương trình chứa dấu căn**

|  |
| --- |
| **Loại 1**:    **Loại 2:** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4 :** **Giải các bất phương trình sau** :  a) b)  **✍ *Giải***  a.    .  Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  b.    Vật tập nghiệm của bất phương trình là .  . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 4.1: Giải các bất phương trình sau:**  a) b).  **✍** *Giải*  a.      Vậy tập nghiệm của bất phương trình là  bs.  Điều kiện :    Đặt  Khi đó bất phương trình trở thành :  Kết hợp với    Vậy tập nghiệm của bất phương trình là |  |

**Dạng 5: Phương trình , bất phương trình vô tỷ**

**Phương pháp 1: Nâng luỹ thừa**

|  |
| --- |
| **➀➁**  **➂➃** |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5: Giải phương các trình sau:**  a.. b.  ✍ *Giải*   * 1. Biến đổi phương trình tương đương với:     Vậy, phương trình có nghiệm .   * 1. Biến đổi phương trình tương đương với:   .  Vậy, phương trình có nghiệm . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.1: Giải phương các trình sau:**   1. . b. .   **✍ *Giải***   * 1. Điều kiện:     Biến đổi phương trình:    .  Vậy, phương trình có 1 nghiệm .   * 1. Điều kiện:   .  Phương trình viết lại dưới dạng:    .  Vậy, phương trình có nghiệm . |  |

**Phương pháp 2: *Đặt ẩn phụ***

|  |  |
| --- | --- |
| **Bai 5.2: Giải phương các trình sau**  a)  b). .  c). d) .  e)  **✍ *Giải***  a) Đặt . Khi đó phương trình đã cho trở thành:    Vì , thay vào ta có    Vậy phương trình có nghiệm là   1. Điều kiện:   (1)  Viết lại phương trình dưới dạng:  .  Đặt , điều kiện . (2)  Khi đó, phương trình có dạng:  .  ⇔ , thoả mãn (1).  Vậy, phương trình có hai nghiệm .  c) Đặt, ta có:    do đó điều kiện cho ẩn phụ t là .  Khi đó phương trình có dạng:    .  Vậy, phương trình có hai nghiệm .  d) Điều kiện:  ⇔ x ≥ 1. (\*)  Viết lại phương trình dưới dạng:    (2)  Đặt . (\*\*)  Khi đó: phương trình có dạng:      .  Vậy, nghiệm của phương trình là .  ***Nhận xét***: Như vậy, trong thí dụ trên:   * Ở câu a), ẩn phụ được sử dụng với mục đích hạ bậc cho phương trình. * Ở câu b), ẩn phụ được sử dụng với mục đích chuyển phương trình ban đầu về phương trình bậc hai.   e) ĐKXĐ: .  Phương trình tương đương với  .  Đặt  Phương trình trở thành:    Với  ta có  Với  ta có    Vậy phương trình có nghiệm là  và . |  |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.3: Giải bất phương trình:**  a) . b)  **✍Giải**  a) Đặt t = , Điều kiện t ≥ 1.  bất phương trình trở thanh:  ⇔    b) Điều kiện:  (\*)  Đặt t = , t ≥ 0 ⇒ x = (t2 + 1).  Khi đó phương trình có dạng:      ⇔ 1 ≤ t ≤ 3 ⇔ 1 ≤  ≤ 3 ⇔ 1 ≤ x ≤ 5 (thoả mãn)  Vậy nghiệm bất phương trình là 1 ≤ x ≤ 5. |  |

**Chú ý:** Ta không thể bình phương hai vế của bất phương ban đầu vì chưa biết dấu của hai vế. Ta có thể sử dụng phép biến đổi tương đương để gải bpt như sau:

 ⇔⇔⇔ ⇔ 1 ≤ x ≤ 5.

Vậy nghiệm của bất phương trình là 1 ≤ x ≤ 5.

**\* Đặt ẩn phụ không hoàn toàn**

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.4:Giải phương trình**    b)  c)  ***Lời giải***  ĐKXĐ:  Phương trình  Đặt  phương trình trở thành  Có  suy ra  Vô nghiệm  vì với  thì  hoặc  Vậy phương trình ban đầu có hai nghiệm  và  b) ĐKXĐ:  Đặt pt trở thành  Phuơng trình ẩn  này có  nên ta tìm được      Vậy pt ban đầu có hai nghiệm  **c)** ĐKXĐ:  phương trình trở thành  Phương trình bậc hai ẩn  có  từ đó có      Vậy pt ban đầu có hai nghiệm , | ***Nhận xét:***Trong lời giải trên ta thấy khó nhất là biến đổi phương trình ban đầu thành để sau khi đặt ẩn phụ thì phương trình ẩn  có  ( là bình phương của một nhị thức)  Nếu ta tách không hợp lý thì không là bình phương của một nhị thức hoặc là một hằng số ,trong trường hợp đó việc giải phương trình theo hướng trên là không thể thực hiện được.  Vậy làm thế nào để tách được phương trình mà thỏa mãn các điều kiện trên và việc tách ra như thế có là duy nhất?.Để trả lời được câu hỏi này ta thực hiện theo các bước như sau:  B1: Viết  B2: Đặt  pt trở thành  Có  B3: Tìm  sao cho  Đến đây việc giải pt như đã trình bày ở trên |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.5:** **Giải các bất phương trình sau:**  a) x2 + 4x ≥ (x + 4). b) .  **✍Giải**  a)Đặt t = , bất phương trình có dạng  (1)  coi vế trái là một tam thức bậc hai theo x, ta có    khi đó f(x) = 0 có nghiệm  Tức là (1) được biến đổi thành dạng    ⇔  ⇔ ⇔  ⇔ .  Vậy bất phương trình có nghiệm là  b) Đặt t = , điều kiện t ≥ 0.  Bất phương trình có dạng:f(x) =  (1)  coi vế trái là một tam thức bậc hai theo x, ta có :  Δ = t2 + 1 = x2 + 2x + 1 = (x + 1)2  khi đó f(x) = 0 có nghiệm  Ta biến đổi bất phương trình về dạng:    ⇔ ⇔  ⇔ ⇔ ⇔  ⇔ x ≥ 0.  Vậy bất phương trình có nghiệm là x ≥ 0. |  |

**Phương pháp 3: Phân tích thành tích bằng cách nhân liên hợp.**

|  |
| --- |
| Để trục căn thức ta nhân với các đại lượng liên hợp;      Với A, B không đồng thời bằng không. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.6: Giải các phương trình sau**  a)  b)  c)  d)  ***Lời giải***  a) ĐKXĐ:  Phương trình    (thỏa mãn điều kiện)  Vậy phương trình có ngjiệm  b) ĐKXĐ:  Nhẩm ta thấy  là nghiệm của phương trình nên ta tách như sau  Phương trình    (\*)  Do  nên  Phương trình (\*)(thỏa mãn điều kiện)  Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .  c) Phương trình được viết lại như sau:  Vì  nên phương trình có nghiệm thì phải thỏa mãn  hay  Ta có phương trình tương đương với:      (\*\*)  Vì  suy ra  nên  Phương trình (\*\*)  Vậy phương trình có nghiệm duy nhất .  d) Ta thấy  không là nghiệm của phương trình  Xét , phương trình    Phương trình (\*)    (thỏa mãn)  Vậy phương trình đã cho có nghiệm  và |  |

**Phương pháp 4: Đặt ẩn phụ đưa về hệ phương trình.**

|  |
| --- |
| **Phương pháp giải:** Trong một phương trình mà có hai đại lượng có mối liên hệ với nhau thì ta đặt mỗi đại lượng ấy là một ẩn mới từ đó ta đưa về được hệ phương trình (dễ dàng giải được) có được từ mối liên hệ hai đại lượng đó và phương trình ban đầu. Giải hệ phương trình từ đó tìm được nghiệm của phương trình ban đầu. |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 5.7:** **Giải các phương trình sau**  a)  b) .  c)  d)  ***Lời giải***  a) ĐKXĐ: .  Đặt  suy ra  và  Khi đó phương trình trở thành  Ta có hệ phương trình:  Phương trình (\*)  thỏa mãn .  Với  , và  Vậy phương trình đã cho có ba nghiệm: .  b) ĐKXĐ:  Đặt  suy ra  và  Khi đó phương trình trở thành  Ta có hệ phương trình:    Vì  nên hệ phương trình  (thỏa mãn)  Ta có (thỏa mãn)  Vậy phương trình có nghiệm là  c) ĐKXĐ:  Đặt  Phương trình trở thành  Vậy ta có hệ phương trình  (\*)    Thay vào phương trình đầu của hệ phương trình (\*):  Với  ta có  (thỏa mãn)  Với  ta có (vô nghiệm)  Vậy phương trình có hai nghiệm là  và .  d) ĐKXĐ: .  Phương trình tương đương với  Đặt  phương trình trở thành , đặt .  Khi đó ta có hệ  Lấy (1) trừ (2) ta có:    (Vì )  Với  thay vào (1) ta có    Vậy phương trình có 3 nghiệm | **Nhận xét :** Khi gặp phương trình có chứa các đại lượng  và (hoặc ) thì ta đặt (hoặc ) và đưa về hệ phương trình  (hoặc ). Giải hệ tìm được  từ đó giải phương trình  hoặc tìm được .  Khi gặp phương trình có thể đưa về dạng  ta đưa về hệ đối xứng loại 2 bằng cách đặt  ta có hệ |

**Dạng toán 6: Phương trình , bất phương trình dạng khác quy về bậc hai**

|  |
| --- |
| ***Một số dạng phương trình bậc bốn quy về bậc hai*** |
| **➀Loại 1**.  với  **Phương pháp giải**: Chia hai vế cho  rồi đặt  với  **➁Loại 2**.  với  **Phương pháp giải**:  và đặt  **➃Loại 3**.  **Phương pháp giải**: Đặt  với |

|  |  |
| --- | --- |
| **Bài 6: Giải các phương trình sau:**  a)  c)  **✍ *Giải***  a) Nhận xét rằng  không phải là nghiệm của phương trình.  Chia cả hai vế của phương trình cho x2 ≠ 0, ta được:    Đặt , điều kiện , suy ra.    Vậy phương trình có nghiệm .  b)Viết lại phương trình dưới dạng:  .  Đặt , điều kiện , suy ra  và.  Khi đó phương trình trên có dạng:  ⇔ .  Ta lần lượt:   * Với , ta được:     Với , ta được:  Vậy, với  phương trình có nghiệm là  và .  c) Đặt , suy ra:  .  Khi đó, phương trình (1) được chuyển về dạng: |  |

.