**BÀI 3. PHÉP NHÂN MỘT SỐ VỚI MỘT VÉCTƠ**

# Dạng 1. [0H1-3-0] Xác định vectơ

## **1.Phương pháp:**

Để chứng minh một đẳng thức vectơ hoặc phân tích một vectơ theo hai vectơ không cùng phương, ta thường sử dụng:

– Qui tắc ba điểm để phân tích các vectơ.

– Các hệ thức thường dùng như: hệ thức trung điểm, hệ thức trọng tâm tam giác.

– Tính chất của các hình.

## 2. Các ví dụ:

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1**.**:** Cho  và điểm O. Xác định hai điểm M và N sao cho:  **🖎Lời giải**  Vẽ d đi qua O và // với giá của  (nếu O ∈ giá của  thì d là giá của )  − Trên d lấy điểm M sao cho OM=3| |, và  cùng hướng khi đó .  − Trên d lấy điểm N sao cho ON= 4||,  và  ngược hướng nên | **🖎Lưu ý** |
| **Ví dụ 2.**  Cho đoạn thẳng AB và M là một điểm nằm trên đoạn AB sao cho AM=AB. Tìm k trong các đẳng thức sau:    **Lời giải** | Lời giải: |
| **Ví dụ 3.**a) Chứng minh:vectơ đối của  là  **Lời giải:** | **2.1** b) Tìm vectơ đối của các véctơ ,  **Lời giải** |

# Dạng 2. [0H1-3-1] Đẳng thức véctơ không dùng tính chất trung điểm, trọng tâm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

Các tính chất phép toán vectơ

Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ

## 2. Các ví dụ:

|  |  |
| --- | --- |
| *Ví dụ 1:Cho 4 điểm A,B,C,D. M N là trung điểm AB và CD*  *Chứng minh 2 =  +*  *✍ Lời giải*  *Ta có thể trình bày theo các cách sau:*  *Cách 1: Ta có phân tích:*  *=  +  + , (1)*  *=  +  + . (2)*  *Cộng theo vế (1) và (2) với lưu ý  +  =  và  +  =  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:*  *+  = 2, đpcm. (\*)*  *Cách 2: Ta có phân tích:*  *, (3)*  *, (4)*  *Cộng theo vế (3) và (4) với lưu ý  và  (vì M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD), ta được:*  *2 =  + , đpcm.* | *Chứng minh:*  *2 =  +  =  + .*  *Lời giải:*  A  B  C  D  N  M |
| **Ví dụ 2**: Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh: .  **Lời giải:** | **Ví dụ 3:** *Cho* O *là tâm của hình bình hành* ABCD. *Chứng minh rằng với điểm* M *bất kì, ta có*:  = ( +  +  + ).  Lời giải: |

# Dạng 3. [0H1-3-2] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trung điểm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

Các tính chất phép toán vectơ

Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ

Tính chất trung điểm:

M là trung điểm đoạn thẳng AB

M là trung điểm đoạn thẳng AB(Với O là điểm tuỳ ý)

## 2. Các ví dụ:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tứ giác . Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB và CD, O là trung điểm của IJ .Chứng minh rằng:  a)  ***Lời giải***(Hình 1.16) | b)  với M là điểm bất kì  Hình 1.16 14 | | |
| ***Ví dụ 2****: Cho* ΔABC. *Gọi* M, N, P *lần lượt là trung điểm của* BC, CA, AB. *Chứng minh rằng*:  +  +  = .  **Lời giải** | |  | |
| ***Ví dụ 3****: Cho* ΔABC. *Gọi* M *là trung điểm của* AB *và* N *là một điểm trên cạnh* AC, *sao cho* NC = 2NA. *Gọi* K *là trung điểm của* MN.   * 1. *Chứng minh rằng*  =  + .   **✍** *Giải* | | | *b. Gọi* D *là trung điểm của* BC. *Chứng minh rằng*  =  + .  Giải: |

# Dạng 4. [0H1-3-3] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trọng tâm

## 1. Phương pháp giải.

*Sử dụng các kiến thức sau để biến đổi vế này thành vế kia hoặc cả hai biểu thức ở hai vế cùng bằng biểu thức thứ ba hoặc biến đổi tương đương về đẳng thức đúng*:

Các tính chất phép toán vectơ

Các quy tắc: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành và quy tắc phép trừ

**Tính chất trung điểm:**

M là trung điểm đoạn thẳng AB

M là trung điểm đoạn thẳng AB(Với O là điểm tuỳ ý)

**Tính chất trọng tâm:**

G là trọng tâm của tam giác ABC++=

G là trọng tâm của tam giác ABC++=(Với O là điểm tuỳ ý)

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Chứng minh rằng nếu G và G’ lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A’B’C’ thì .  **Hướng dẫn giải:** | |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho hai tam giác  và  có cùng trọng tâm G. Gọi  lần lượt là trọng tâm tam giác . Chứng minh rằng  ***Lời giải*** | |  |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trực tâm H, trọng tâm G và tâm đường tròn ngoại tiếp O. Chứng minh rằng  a).  ***Lời giải***(Hình 1.17)  Hình 1.17 | | b) *.*  c) | |

# Dạng 5. [0H1-3-4] Tính độ dài véctơ tổng, hiệu, tích với 1 số

* **Dựng và tính độ dài vectơ chứa tích một vectơ với một số.**

## 1. Phương pháp giải.

Sử dụng định nghĩa tích của một vectơ với một số và các quy tắc về phép toán vectơ để dựngvectơ chứa tích một vectơ với một số, kết hợp với các định lí pitago và hệ thức lượng trong tam giác vuông để tính độ dài của chúng.

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác đều  cạnh . điểm  là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.  a)  b)  ***Lời giải***(Hình 1.14)  Hình 1.14  a) Do  suy ra theo quy tắc ba điểm ta có    Vậy  b) Vì  nên theo quy tắc trừ ta có  Theo định lí Pitago ta có    Vậy | c)  d) | | |
| 1. ***Ví dụ 2:*** *Cho* ΔOAB *vuông cân với* OA = OB = a. *Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng*:   a. 3 + 4  b. + 2.5,  **✍** *Giải*  A  B  C  O  A  B  O  A1  B1  C1 | | ***Chú ý***: Với các em học sinh chưa nắm vững kiến thức về tổng của hai vectơ thì thường kết luận ngay rằng:  ⏐ + ⏐ = ⏐⏐ + ⏐⏐ = a + a = 2a.  c.  − .  Giải | |
| ***Ví dụ 2:*** Cho hình vuông  cạnh .  a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.  ***Lời giải***(Hình 1.15) | | | b) Tính độ dài vectơ  Hình 1.15 |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 1.3.26.** Cho tam giác đều  cạnh . Gọi điểm ,  lần lượt là trung điểm . Dựng các vectơ sau và tính độ dài của chúng.

a)  b) 

c)  c) 

**Bài 1.3.27:** Cho hình vuông  cạnh .

a) Chứng minh rằng  không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Tính độ dài vectơ 

# Dạng 6 [0H1-3-5] Phân tích 1 véctơ theo hai véctơ không cùng phương

## **1. Phương pháp giải.**

Sử dụng các tính chất phép toán vectơ, ba quy tắc phép toán vectơ và tính chất trung điểm, trọng tâm trong tam giác.

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Cho ΔABC có trọng tâm G. Cho các điểm D, E, F lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB và I là giao điểm của AD và EF. Đặt . Hãy phân tích các vectơ  theo hai vectơ .  **Hướng dẫn giải:**  A  Ta có | | **Ví dụ 2:** Cho tam giác ABC. Điểm M nằm trên cạnh BC sao cho MB= 2MC. Hãy phân tích vectơ  theo hai vectơ .  **Lời giải:** | | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác . Đặt .  a) Hãy dựng các điểm M, N thỏa mãn:  b) Hãy phân tích  qua các véc tơ  và .  ***Lời giải*** (hình 1.23) | | | c) Gọi I là điểm thỏa: . Chứng minh  thẳng hàng  Hình 1.23 | |
| ***Ví dụ 4:*** Cho tam giác  , trên cạnh BC lấy M sao cho , trên đoạn AM lấy N sao cho . G là trọng tâm tam giác .  a) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  ***Lời giải***(hình 1.24)  Hình 1.24 | b) Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  Giải: | | | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho hình bình hành . Gọi M, N lần lượt là hai điểm nằm trên hai cạnh AB và CD sao cho  và G là trọng tâm tam giác . Phân tích các vectơ  qua các véc tơ  và  ***Lời giải***(hình 1.25) | | | | Hình 1.25 |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 1.3.46:** Cho tam giác ABC .Lấy các điểm M,N,P sao cho , *,*

a) Biểu diễn các vectơ  theo các vectơ và

b) Biểu diễn các vectơ, theo các vectơ và

Có nhận xét gì về ba điểm M, N, P thẳng hàng?

**Bài 1.3.47:** Cho tam giác ABC.Gọi I, J là hai điểm xác định bởi 

a)Tính theo  và **.

b)Đường thẳng IJ đi qua trọng tâm G của tam giác 

**Bài 1.3.48.** Cho tam giác  có trọng tâm G. Gọi I là điểm trên cạnh BC sao cho  và J là điểm trên BC kéo dài sao cho .

a) Hãy phân tích  theo  và .

b) Hãy phân tích  theo  và .

**Bài 1.3.49:** Cho hai vectơ  không cùng phương. Tìm x sao cho

a)  và  cùng phương

b)  và  cùng hướng

# Dạng 7 [0H1-3-6] Tìm tập hợp điểm thoả điều kiện cho trước

## 1. Phương pháp giải.

Để tìm tập hợp điểm M thỏa mãn mãn điều kiện vectơ ta quy về một trong các dạng sau

- Nếu  với A, B phân biệt cho trước thì M thuộc đường trung trực của đoạn AB.

- Nếu  với A, B, C phân biệt cho trước thì M thuộc đường tròn tâm C, bán kính bằng .

- Nếu  với A, B, C phân biệt và k là số thực thay đổi thì

+ M thuộc đường thẳng qua A song song với BC với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và cùng hướng  với 

+ M thuộc nửa đường thẳng qua A song song với BC và ngược hướng  với 

- Nếu  với A, B, C thẳng hàng và k thay đổi thì tập hợp điểm M là đường thẳng BC

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Cho tam giác  a) Chứng minh rằng tồn tại duy nhất điểm I thỏa mãn : .  ***Lời giải***  a) Ta có:  I tồn tại và duy nhất. | b) Tìm quỹ tích điểm M thỏa mãn : .  b) Với I là điểm được xác định ở câu a, ta có:  và  nên    Vậy quỹ tích của M là đường tròn tâm I bán kính . | |
| ***Ví dụ 2*:** Cho tam giác  . Tìm tập hợp các điểm M thoả mãn điều kiện sau :  a)  ***Lời giải*** (hình 1.28)  Hình 1.28 | b)  với k là số thực thay đổi  Giải. | |
| ***Ví dụ 3:*** Cho tứ giác . Với số k tùy ý, lấy các điểm M và N sao cho . Tìm tập hợp các trung điểm I của đoạn thẳng MN khi k thay đổi.  ***Lời giải*** (hình 1.29) | | Hình 1.29 |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 1.3.59**. Cho 2 điểm cố định A, B. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a)  b) 

**Bài 1.3.60.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp các điểm M sao cho:

a)  với k là số thực thay đổi

b) cùng phương với véc tơ 

c)  (HD: dựng hình bình hành ABCD)

**Bài 1.3.61.** Cho ΔABC. Tìm tập hợp điểm M trong các trường hợp sau:

. 

**Bài 1.3.62:** Cho tứ giác .

a)Xác định điểm O sao cho : *.*

b)Tìm tập hợp điểm M thoả mãn hệ thức 

**Bài 1.3.63:** Cho lục giác đều ABCDEF . Tìm tập hợp các điểm M sao cho :

 nhận giá trị nhỏ nhất

**Bài 1.3.64:** Trên hai tia  và  của góc  lấy hai điểm M, N sao cho  với a là số thực cho trước. tìm tập hợp trung điểm I của đoạn thằng MN

# Dạng 8: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ

## 1. Phương pháp giải.

Phân tính được định tính xuất phát từ các đẳng thức vectơ của giả thiết, lưu ý tới những hệ thức đã biết về trung điểm của đoạn thẳng, trọng tâm của tam giác và kết quả "  với  là hai vectơ không cùng phương "

## 2. Các ví dụ.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| ***Ví dụ 1:*** Gọi M, N lần lượt là trung điểm của các cạnh AD và DC của tứ giác . Các đoạn thẳng AN và BM cắt nhau tại P. Biết . Chứng minh rằng tứ giác  là hình bình hành.  ***Lời giải***  Ta có:    là hình bình hành. | |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  có các cạnh bằng a, b, c và trọng tâm G thoả mãn:  Chứng minh rằng  là tam giác đều.  ***Lời giải*** | ***Ví dụ 3:*** Cho tam giác  có trung tuyến AA' và B' , C' là các điểm thay đổi trên CA, AB thoả mãn . Chứng minh BB', CC' là các trung tuyến của tam giác .  ***Lời giải*** | |

## 3. Bài tập luyện tập.

**Bài 1.3.65:** Cho tứ giác  có hai đường chéo cắt nhau tại O thoả mãn . Chứng minh tứ giác  là hình bình hành.

**Bài 1.3.66:** Cho  có BB', CC' là các trung tuyến, A' là điểm trên BC thoả mãn . Chứng minh AA' cũng là trung tuyến của tam giác .

**Bài 1.3.67:** Cho có A', B', C' là các điểm thay đổi trên BC, CA, AB sao cho  đồng quy và thoả mãn  Chứng minh  là các trung tuyến của tam giác .

**Bài 1.3.68:** Cho 4 điểm A, B, C, D; I là trung điểm AB và J thuộc CD thoả mãn . Chứng minh J là trung điểm của CD.

**Bài 1.3.69:** Cho tứ giác . Giả sử tồn tại điểm O sao cho  và . Chứng minh rằng ABCD là hình chữ nhật.

**Bài 1.3.70:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi G là trọng tâm tam giác  . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng G là trực tâm tam giác .

**Bài 1.3.71:** Cho tam giác  nội tiếp đường tròn tâm O, gọi H là trực tâm tam giác . A', B', C' là các điểm thỏa mãn:. Chứng minh rằng H là trọng tâm tam giác .

**Bài 1.3.72:** Cho tam giác  và điểm M nằm trong tam giác. Đường thẳng AM cắt BC tại D, BM cắt CA tại E và CM cắt AB tại F. Chứng minh rằng nếu  thì M là trọng tâm tam giác .

# Dạng 9. [0H1-3-8] Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất

## 1. Phương pháp giải.

* Sử dụng bất đẳng thức cơ bản:

Với mọi vectơ  ta luôn có

+ , dấu bằng xảy ra khi  cùng hướng

+ , dấu bằng xảy ra khi  ngược hướng

* Đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm cực trị của  với M thay đổi

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường thẳng  khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của M lên .

+ Nếu M là điểm thay đổi trên đường tròn (O) khi đó  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia OI với đường tròn;  đạt giá trị lớn nhất khi và chỉ khi M là giao điểm của tia IO với đường tròn

## 2. Các ví dụ.

|  |  |
| --- | --- |
| ***Ví dụ 1.*** Cho tam giác  và đường thẳng d. Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức sau đạt giá trị nhỏ nhất  **Lời giải:**  Gọi I là đỉnh thứ tư của hình bình hành  thì  Khi đó :    Vậy  đạt giá trị nhỏ nhất khi và chỉ khi M là hình chiếu của I lên đường thẳng d. |  |
| ***Ví dụ 2:*** Cho tam giác  và  là các tam giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng  **Giải:** |  |

## 3. Bài tập luyên tập.

**Bài 1.3.73:** Cho tam giác , đường thẳng d và ba số sao cho . Tìm điểm M thuộc đường thẳng d để biểu thức  đạt giá trị nhỏ nhất.

**Bài 1.3.74:** Cho tam giác . Tìm điểm M trên đường tròn (C) ngoại tiếp tam giác  sao cho 

a) Đạt giá trị lớn nhất b) Đạt giá trị nhỏ nhất

**Bài 1.3.75**: Cho tứ giác  và  là các tứ giác thay đổi, có trọng tâm G và G' cố định. Tìm giá trị nhỏ nhất của tổng 

**Bài 1.3.76:** Cho tam giác . M, N, P lần lượt là các điểm trên các cạnh BC, CA, AB sao cho . Chứng minh rằng các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.Do đó các đoạn thẳng AM, BN, CP là ba cạnh của một tam giác nào đó.

**Bài 1.3.77** : Cho tam giác ABC. Chứng minh rằng với mọi điểm M thuộc cạnh AB và không trùng với các đỉnh ta có: 

**Bài 1.3.78**: Cho tứ giác , M là điểm thuộc đoạn CD. Gọi  lần lượt là chu vi của các tam giác . Chứng minh rằng .

**Bài 1.3.79:** Trên đường tròn tâm O bán kính bằng 1 lấy  điểm  ở cùng phía với đối với đường kính nào đó. Chứng minh rằng 

# Dạng 10. [0H1-3-9] Bài toán thực tế, liên môn

## 1. Phương pháp giải.

- Sử dụng tính chất hình học phẳng

- Sử dụng tỉ lệ , tỉ số để đưa về hệ thức tích vecto với 1 số

## 2. Các ví dụ.

|  |  |
| --- | --- |
| **Ví dụ 1:** Có hai chiếc cọc cao  và  lần lượt đặt tại hai vị trí  Biết khoảng cách giữa hai cọc bằng . Người ta chọn một cái chốt ở vị trí  trên mặt đất nằm giữa hai chân cột để giang dây nối đến hai đỉnh  và  của cọc (như hình vẽ). Khi đó  TÌm *k* để dây nối là ngắn nhất?  **Giải:**  Gọi C’ là điểm đối xứng của C qua A, Khi đó    Vậy sợi dậy ngắn nhất khi C’, M, D thẳng hàng hay |  |
| Ví dụ 2: Cho hai vị trí *A*, *B* cách nhau 615m, cùng nằm về một phía bờ sông như hình vẽ. Khoảng cách từ *A* và từ *B* đến bờ sông lần lượt là 118m và 487m. Một người đi từ *A* đến bờ sông để lấy nước mang về *B.* Tìm vị trí M để đoạn đường ngắn nhất mà người đó có thể đi.  **Giải**: |  |

# §3 HƯỚNG DẪN GIẢ BÀI TẬP TỰ LUYỆN

**TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ**

Mục lục:

[Dạng toán 1. [0H1-3-0] Xác định vectơ  1](#_Toc521015424)

[1.Phương pháp: 1](#_Toc521015425)

[2. Các ví dụ: 1](#_Toc521015426)

[Dạng toán 2. [0H1-3-1] Đẳng thức véctơ không dùng tính chất trung điểm, trọng tâm 2](#_Toc521015427)

[1. Phương pháp giải. 2](#_Toc521015428)

[2. Các ví dụ: 2](#_Toc521015429)

[Dạng toán 3. [0H1-3-2] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trung điểm 3](#_Toc521015430)

[1. Phương pháp giải. 3](#_Toc521015431)

[2. Các ví dụ: 3](#_Toc521015432)

[Dạng 4. [0H1-3-3] Đẳng thức véctơ có dùng tính chất trọng tâm 4](#_Toc521015433)

[1. Phương pháp giải. 4](#_Toc521015434)

[2. Các ví dụ. 4](#_Toc521015435)

[Dạng 5. [0H1-3-4] Tính độ dài véctơ tổng, hiệu, tích với 1 số 5](#_Toc521015436)

[1. Phương pháp giải. 5](#_Toc521015437)

[2. Các ví dụ. 5](#_Toc521015438)

[3. Bài tập luyện tập. 7](#_Toc521015439)

[Dạng 6 [0H1-3-5] Phân tích 1 véctơ theo hai véctơ không cùng phương 8](#_Toc521015440)

[1. Phương pháp giải. 8](#_Toc521015441)

[2. Các ví dụ. 8](#_Toc521015442)

[3. Bài tập luyện tập. 10](#_Toc521015443)

[Dạng 7 [0H1-3-6] Tìm tập hợp điểm thoả điều kiện cho trước 11](#_Toc521015444)

[1. Phương pháp giải. 11](#_Toc521015445)

[2. Các ví dụ. 11](#_Toc521015446)

[3. Bài tập luyện tập. 12](#_Toc521015447)

[DẠNG 8: Xác định tính chất của hình khi biết một đẳng thức vectơ 13](#_Toc521015448)

[1. Phương pháp giải. 13](#_Toc521015449)

[2. Các ví dụ. 13](#_Toc521015450)

[3. Bài tập luyện tập. 14](#_Toc521015451)

[Dạng 9. [0H1-3-8] Các bài toán về giá trị lớn nhất, nhỏ nhất 14](#_Toc521015452)

[1. Phương pháp giải. 14](#_Toc521015453)

[2. Các ví dụ. 15](#_Toc521015454)

[3. Bài tập luyên tập. 15](#_Toc521015455)

[Dạng 10. [0H1-3-9] Bài toán thực tế, liên môn 17](#_Toc521015456)

[1. Phương pháp giải. 17](#_Toc521015457)

[2. Các ví dụ. 17](#_Toc521015458)

[§3 HƯỚNG DẪN GIẢ BÀI TẬP TỰ LUYỆN 18](#_Toc521015459)