

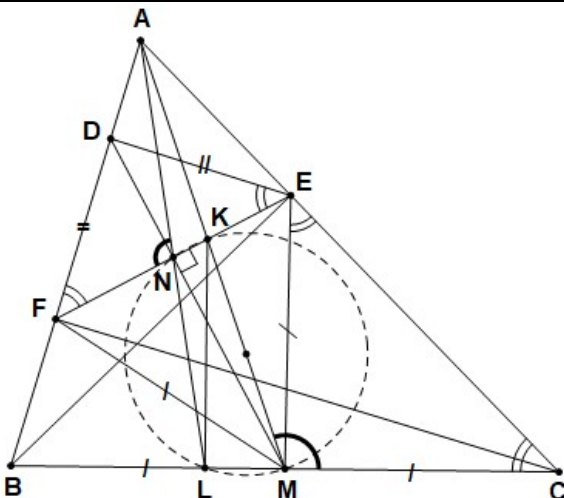
HƯỚNG DẪN CHẤM VÀ ĐÁP ÁN

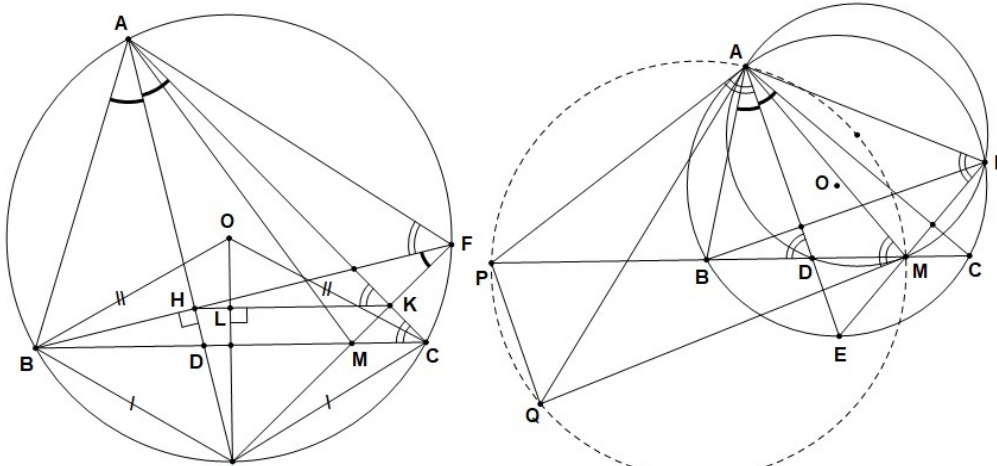
Môn: TOÁN

(Hướng dẫn chấm này có 05 trang)

| Câu              | Đáp án                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | Điểm |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 1<br>(4,0 đ) | <p>a) Cho biểu thức <math>A = \left[ \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8} + \frac{4}{\sqrt{x}-2} \right] : \frac{x+5\sqrt{x}+6}{x+4\sqrt{x}+3}</math>, với <math>x \geq 0</math> và <math>x \neq 4</math>. Rút gọn biểu thức A và tìm x để <math>A = x - 2\sqrt{x} + 3</math>.</p> | 2,5  |
|                  | $\frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2}{x+2\sqrt{x}+4} - \frac{8\sqrt{x}+32}{x\sqrt{x}-8} + \frac{4}{\sqrt{x}-2} = \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)^2(\sqrt{x}-2) - (8\sqrt{x}+32) + 4(x+2\sqrt{x}+4)}{x\sqrt{x}-8}$                                                                                                                         | 0,5  |
|                  | $= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)(x-4) - 8\sqrt{x} - 32 + 4x + 8\sqrt{x} + 16}{x\sqrt{x}-8}$                                                                                                                                                                                                                                      | 0,5  |
|                  | $= \frac{(x+2\sqrt{x})(x-4) + 4(x-4)}{x\sqrt{x}-8} = \frac{(x-4)(x+2\sqrt{x}+4)}{x\sqrt{x}-8}$                                                                                                                                                                                                                                |      |
|                  | $= \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)}{(\sqrt{x}-2)(x+2\sqrt{x}+4)} = \sqrt{x}+2$                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5  |
|                  | $\frac{x+5\sqrt{x}+6}{x+4\sqrt{x}+3} = \frac{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}+3)} = \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1}$                                                                                                                                                                                             |      |
|                  | $\Rightarrow A = (\sqrt{x}+2) : \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{x}+1$                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
|                  | $A = x - 2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow \sqrt{x} + 1 = x - 2\sqrt{x} + 3 \Leftrightarrow x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$                                                                                                                                                                                                                | 0,5  |
|                  | $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 1 \\ \sqrt{x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ x = 4 \text{ (loại)} \end{cases}$                                                                                                                                                                              |      |
|                  | Vậy $x = 1$ là giá trị cần tìm.                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|                  | <p>b) Tìm giá trị của tham số m để phương trình <math>x^2 - 2x - m + 3 = 0</math> có nghiệm <math>x_1, x_2</math> và tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức <math>B = 2(x_1^2 + x_2^2) + x_1^2 x_2^2 + x_1 x_2</math>.</p>                                                                                                        | 1,5  |
|                  | $\Delta' = (-1)^2 - 1 \cdot (-m+3) = m - 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|                  | + Phương trình đã cho có nghiệm $x_1, x_2$ khi $\Delta' \geq 0 \Leftrightarrow m - 2 \geq 0 \Leftrightarrow m \geq 2$                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                  | $x_1 x_2 = -m + 3, x_1 + x_2 = 2$                                                                                                                                                                                                                                                                                             | 0,25 |
|                  | $B = 2[(x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2] + (x_1 x_2)^2 + x_1 x_2 = 2[2^2 - 2(-m+3)] + (-m+3)^2 + (-m+3) = m^2 - 3m + 8$                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|                  | $B = (m-2)^2 + m + 4$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                  | Ta có: $m \geq 2, (m-2)^2 \geq 0 \forall m \in \mathbb{R}$ suy ra $B \geq 2 + 4 = 6$ , dấu bằng xảy ra khi $m = 2$ .                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
|                  | Vậy giá trị nhỏ nhất của B bằng 6 khi $m = 2$ .                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              |      |
|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 2<br>(4,0 đ) | a) Giải phương trình $x^2 - 3x - 2 + 2\sqrt{3x+1} = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2,0  |
|                  | Điều kiện: $3x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\frac{1}{3}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | 0,25 |
|                  | $x^2 - 3x - 2 + 2\sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow x^2 = (3x+1) - 2\sqrt{3x+1} + 1 \Leftrightarrow x^2 = (\sqrt{3x+1} - 1)^2$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5  |
|                  | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{3x+1} - 1 \\ x = -(\sqrt{3x+1} - 1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3x+1} = x+1 \\ \sqrt{3x+1} = 1-x \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|                  | $\sqrt{3x+1} = x+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \\ 3x+1 = (x+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -1 \\ x = 0 \text{ (thỏa)} \\ x = 1 \text{ (thỏa)} \end{cases}$<br>$\sqrt{3x+1} = 1-x \Leftrightarrow \begin{cases} 1-x \geq 0 \\ 3x+1 = (1-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 1 \\ x = 0 \text{ (thỏa)} \\ x = 5 \text{ (loại)} \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,75 |
|                  | Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x = 0, x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 0,25 |
|                  | <b>Nhận xét 1:</b> $x^2 - 3x - 2 + 2\sqrt{3x+1} = 0 \Rightarrow (x^2 - 3x - 2)^2 = (-2\sqrt{3x+1})^2$<br>$\Rightarrow x^4 + 9x^2 + 4 - 6x^3 + 12x - 4x^2 = 12x + 4 \Rightarrow x^4 - 6x^3 + 5x^2 = 0 \Rightarrow x^2(x^2 - 6x + 5) = 0$<br>$\Rightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $x = 5$ . Thử lần lượt 3 giá trị của $x$ , $x = 5$ không thỏa mãn.<br><b>Nhận xét 2:</b> Đặt $t = \sqrt{3x+1}$ ( $t \geq 0$ ), phương trình trở thành:<br>$t^4 - 11t^2 + 18t - 8 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^3 + t^2 - 10t + 8) = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t-1)(t^2 + 2t - 8) = 0$ .<br><b>Nhận xét 3:</b> $x^2 - 3x - 2 + 2\sqrt{3x+1} = 0 \Leftrightarrow (x^2 - 3x + 2) + 2(\sqrt{3x+1} - 2) = 0$<br>$\Leftrightarrow (x-1)(x-2) + \frac{6(x-1)}{\sqrt{3x+1}+2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x + \frac{6}{\sqrt{3x+1}+2} - 2) = 0$<br>$\Leftrightarrow (x-1)[x(\sqrt{3x+1}+2) + 2(1-\sqrt{3x+1})] = 0 \Leftrightarrow x(x-1)[\sqrt{3x+1}+2 - \frac{6}{1+\sqrt{3x+1}}] = 0$<br>$\Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = 1$ hoặc $\sqrt{3x+1}+2 - \frac{6}{1+\sqrt{3x+1}} = 0$ (*) (đặt $t = \sqrt{3x+1}, t \geq 0$ ) |      |
|                  | b) Giải hệ phương trình $\begin{cases} 3(x+y) = (x+2y)(2x+y) \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{(2x+y)^2} = 3 \end{cases}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 2,0  |
|                  | Điều kiện: $x+2y \neq 0, 2x+y \neq 0$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
|                  | $\begin{cases} 3(x+y) = (x+2y)(2x+y) \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{(2x+y)^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2y) + (2x+y) = (x+2y)(2x+y) \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{(2x+y)^2} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{2x+y} = 1 \\ \frac{1}{x+2y} + \frac{1}{(2x+y)^2} = 3 \end{cases} \quad \text{(I)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | 0,5  |
|                  | Đặt: $\frac{1}{x+2y} = a, \frac{1}{2x+y} = b$ ( $a, b \neq 0$ ), hệ (I) trở thành: $\begin{cases} a+b=1 \\ a+b^2=3 \end{cases} \quad \text{(II)}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|                  | Giải hệ (II) tìm được hai cặp giá trị: $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}, \begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0,25 |
|                  | - Với $\begin{cases} a=2 \\ b=-1 \end{cases}$ , suy ra được $(x; y) = (-\frac{5}{6}; \frac{2}{3})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                  | - Với $\begin{cases} a=-1 \\ b=2 \end{cases}$ , suy ra được $(x; y) = (\frac{2}{3}; -\frac{5}{6})$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                  | Vậy hệ phương trình đã cho có hai nghiệm: $(x; y) = (-\frac{5}{6}; \frac{2}{3})$ và $(x; y) = (\frac{2}{3}; -\frac{5}{6})$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |

|                                                                                                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                |      |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Cho tam giác ABC nhọn ( $AB < AC$ ) có hai đường cao BE và CF, M là trung điểm của BC. Hạ MN vuông góc với EF tại N, hai đường thẳng MN và AB cắt nhau tại D.                                                                                        |                                                                                                                                                                                                | 3,0  |
| a) Chứng minh N là trung điểm của EF và $\widehat{DEF} = \widehat{MEC}$ .                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                | 1,5  |
| <div></div> <p>(Hình vẽ phục vụ <u>câu a</u>: 0,25; Hình vẽ phục vụ <u>câu b</u>: 0,25)</p>                                                                        |                                                                                                                                                                                                |      |
| Câu 3<br>(3,0 đ)                                                                                                                                                                                                                                     | Tam giác BCE vuông tại E nên $ME = \frac{1}{2}BC$ , tương tự $MF = \frac{1}{2}BC$                                                                                                              | 0,25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | Suy ra $ME = MF$                                                                                                                                                                               |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | + Mà MN vuông góc với EF tại N nên MN là đường trung trực của EF. Suy ra N là trung điểm của EF.                                                                                               | 0,25 |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | + DM là đường trung trực của EF nên $DE = DF$ hay tam giác DEF cân tại D. Suy ra $\widehat{DEF} = \widehat{DFE}$ (1),                                                                          |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | Tứ giác BCEF nội tiếp đường tròn đường kính BC nên $\widehat{MCE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$ ;<br>$\widehat{DFE} + \widehat{BFE} = 180^\circ$<br>Suy ra $\widehat{DFE} = \widehat{MCE}$ (2). | 0,5  |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | Lại có, tam giác MEC cân tại M nên $\widehat{MCE} = \widehat{MEC}$ (3)                                                                                                                         |      |
|                                                                                                                                                                                                                                                      | Từ (1), (2) và (3) suy ra $\widehat{DEF} = \widehat{MEC}$ .                                                                                                                                    | 0,25 |
| b) Gọi K là giao điểm của hai đường thẳng AM và EF, L là giao điểm của hai đường thẳng AN và BC. Chứng minh KL vuông góc với BC.                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                | 1,5  |
| Xét hai tam giác ABC và AEF có: $\widehat{EAF} = \widehat{BAC}$ ; $\widehat{AFE} = \widehat{ACB}$ (chứng minh trên).<br>Suy ra hai tam giác ABC, AEF đồng dạng                                                                                       |                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
| $\Rightarrow \frac{AC}{AF} = \frac{BC}{EF} = \frac{2MC}{2NF} = \frac{MC}{NF}$ ,                                                                                                                                                                      |                                                                                                                                                                                                | 0,25 |
| Lại có $\widehat{AFN} = \widehat{ACM}$ (chứng minh trên) suy ra hai tam giác AMC, ANF đồng dạng<br>$\Rightarrow \widehat{AMC} = \widehat{ANF} = \widehat{KNL} \Rightarrow \widehat{KNL} + \widehat{KML} = \widehat{AMC} + \widehat{KML} = 180^\circ$ |                                                                                                                                                                                                | 0,5  |
| Suy ra tứ giác MKNL nội tiếp đường tròn. Mà $\widehat{KNM} = 90^\circ$ nên $\widehat{KLM} = 90^\circ$ , hay KL vuông góc BC.                                                                                                                         |                                                                                                                                                                                                | 0,25 |

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |      |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 4<br>(4,0 đ) | Cho tam giác ABC nhọn ( $AB < AC$ ) nội tiếp trong đường tròn (O), đường phân giác trong AD (D thuộc BC) cắt đường tròn (O) tại E (E khác A). Hạ BH vuông góc với AE tại H, đường thẳng BH cắt đường tròn (O) tại F (F khác B). Đường thẳng EF cắt hai đường thẳng AC, BC lần lượt tại K, M; hai đường thẳng OE và HK cắt nhau tại L. | 4,0  |
|                  | a) Chứng minh tứ giác AHKF nội tiếp đường tròn.                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1,0  |
|                  |  <p>(Hình vẽ phục vụ <b>câu a</b>: 0,25; Hình vẽ phục vụ <b>câu c</b>: 0,25)</p>                                                                                                                                                                    |      |
|                  | Ta có: $\widehat{HAK} = \widehat{BAE}$ (tính chất phân giác); $\widehat{BAE} = \widehat{HFK}$ (cùng chắn cung BE)                                                                                                                                                                                                                     | 0,5  |
|                  | Suy ra $\widehat{HAK} = \widehat{HFK}$ . Do đó tứ giác AHKF nội tiếp đường tròn.                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                  | b) Chứng minh $HB.LE = HE.LK$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 1,5  |
|                  | Ta có: $\widehat{AKH} = \widehat{AFH}$ . Mà $\widehat{AFH} = \widehat{ACB}$ nên $\widehat{AKH} = \widehat{ACB}$ . Suy ra $HK \parallel BC$ .                                                                                                                                                                                          | 0,5  |
|                  | Lại có: $OB = OC, EB = EC$ nên OE là trung trực của BC. Suy ra OE vuông góc BC<br>Do đó OE vuông góc với HK.                                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
|                  | - Xét hai tam giác ELK, EHB:                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                  | Ta có: $\widehat{LKE} = \widehat{HAF}$ (cùng bù với $\widehat{HKF}$ ); $\widehat{HAF} = \widehat{HBE}$ (cùng chắn cung EF). Suy ra $\widehat{LKE} = \widehat{HBE}$ ,                                                                                                                                                                  | 0,5  |
|                  | Lại có $\widehat{ELK} = \widehat{EHB} = 90^\circ$ . Do đó hai tam giác ELK, EHB đồng dạng                                                                                                                                                                                                                                             |      |
|                  | Suy ra $\frac{LE}{LK} = \frac{HE}{HB} \Leftrightarrow HE.LK = HB.LE$ (điều phải chứng minh).                                                                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
|                  | c) Hai tiếp tuyến của đường tròn ngoại tiếp tam giác ADM tại A, M cắt nhau tại Q; tiếp tuyến của đường tròn (O) tại A cắt đường thẳng BC tại P. Chứng minh PQ song song với AD.                                                                                                                                                       | 1,5  |
|                  | Ta có: $\widehat{BAD} = \widehat{DAC}, \widehat{PAB} = \widehat{ACB}$                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0,25 |
|                  | $\widehat{PAD} = \widehat{PAB} + \widehat{BAD} = \widehat{ACB} + \widehat{DAC} = \widehat{ADP}, \widehat{APM} = 180^\circ - (\widehat{PAD} + \widehat{ADP}) = 180^\circ - 2.\widehat{ADP},$                                                                                                                                           | 0,25 |
|                  | $\widehat{ADM} = 180^\circ - \widehat{ADP},$                                                                                                                                                                                                                                                                                          |      |
|                  | $\widehat{QAM} = \widehat{QMA} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{ADM} = \frac{1}{2} (360^\circ - \text{sd } \widehat{AM}) = 180^\circ - \widehat{ADM} = 180^\circ - (180^\circ - \widehat{ADP}) = \widehat{ADP},$                                                                                                                     | 0,25 |
|                  | $\widehat{AQM} = 180^\circ - 2\widehat{QAM} = 180^\circ - 2\widehat{ADP} = \widehat{APM}$ . Suy ra tứ giác APQM nội tiếp đường tròn                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|                  | $\Rightarrow \widehat{QPM} = \widehat{QAM} = \widehat{ADP} \Rightarrow PQ \parallel AD.$                                                                                                                                                                                                                                              | 0,25 |
|                  | <b>Nhận xét:</b> $\widehat{DME} = \frac{1}{2} (\text{sd } \widehat{BE} + \text{sd } \widehat{CF}) = \widehat{BAE} + \widehat{CAF} = \widehat{EAC} + \widehat{CAF} = \widehat{DAF} \Rightarrow \text{ADMF nội tiếp}$                                                                                                                   |      |
|                  | $\widehat{ADP} = \widehat{AFE} = \widehat{PAE} = \widehat{PAD}, \widehat{QAM} = \widehat{QMA}, \widehat{AFE} = \frac{1}{2} \text{sd } \widehat{ADM} = \widehat{QMA}$                                                                                                                                                                  |      |
|                  | $\Rightarrow \widehat{APD} = \widehat{AQM} \Rightarrow \text{tứ giác APQM nội tiếp} \Rightarrow \widehat{QPM} = \widehat{QAM} = \widehat{ADP} \Rightarrow PQ \parallel AD.$                                                                                                                                                           |      |

|                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               |      |
|------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|
| Câu 5<br>(5,0 đ) | a) Tìm tất cả các cặp số nguyên tố $(p; q)$ thỏa mãn: $p^2 - 1$ chia hết cho $q$ và $q^2 - 4$ chia hết cho $p$ .                                                                                                                                                                                                                                              | 3,0  |
|                  | - <b>TH1:</b> $p \leq q$ , từ $q   (p^2 - 1) \Rightarrow q   (p - 1)(p + 1)$<br>Mà $q > p - 1$ nên $q   (p + 1)$ . Do đó $q = p + 1$ .                                                                                                                                                                                                                        | 0,5  |
|                  | Lại có $p, q$ là hai số nguyên tố nên $p = 2, q = 3$ (không thỏa $p   (q^2 - 4)$ ).                                                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |
|                  | - <b>TH2:</b> $p > q$ từ $p   (q^2 - 4) \Rightarrow p   (q - 2)(q + 2)$ . Do đó $p   (q + 2)$ hoặc $q - 2 = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5  |
|                  | + Nếu $p   (q + 2)$ mà $p > q$ nên $p = q + 2$ . Khi đó $p^2 - 1 = (q + 2)^2 - 1 = q^2 + 4q + 3$                                                                                                                                                                                                                                                              | 0,5  |
|                  | Lại có $q   (p^2 - 1)$ nên $q   3$ . Mà $q$ là số nguyên tố nên $q = 3$ , khi đó $p = 5$ .                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|                  | + Nếu $q = 2$ thì mọi số nguyên tố $p > 2$ đều thỏa mãn yêu cầu bài toán.                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5  |
|                  | Kết luận: $(p; q) \in \{(5; 3); (p; 2)\} (\forall p > 2)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,25 |
|                  | b) Cho ba số thực không âm $x, y, z$ thỏa mãn $x + y + z = 1$ . Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức $T = \frac{x^3 + x - 1}{x^2 + 1} + \frac{y^3 + y - 1}{y^2 + 1} + \frac{z^3 + z - 1}{z^2 + 1}$ .                                                                                                                                                            | 2,0  |
|                  | $T = x + y + z - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{z^2 + 1} = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{y^2 + 1} - \frac{1}{z^2 + 1}$                                                                                                                                                                                                                   | 0,25 |
|                  | $= -2 + \frac{x^2}{x^2 + 1} + \frac{y^2}{y^2 + 1} + \frac{z^2}{z^2 + 1}$                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 0,25 |
|                  | Khi $x > 0$ : $1 + x^2 \geq 2x \Rightarrow \frac{1}{1 + x^2} \leq \frac{1}{2x} \Rightarrow \frac{x^2}{1 + x^2} \leq \frac{x}{2}$ (*) (dấu bằng xảy ra khi $x = 1$ ).                                                                                                                                                                                          | 0,25 |
|                  | Lại có $x = 0$ cũng thỏa (*), do đó (*) xảy ra dấu bằng khi $x = 0$ hoặc $x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,25 |
|                  | <b>Nhận xét:</b> Ta có thể chứng minh $\frac{x^2}{1 + x^2} \leq \frac{x}{2}$ như sau:                                                                                                                                                                                                                                                                         | 0,25 |
|                  | $\frac{x^2}{1 + x^2} \leq \frac{x}{2} \Leftrightarrow 2x^2 \leq x^3 + x \Leftrightarrow x(x - 1)^2 \geq 0$ (đúng với mọi $x$ không âm)                                                                                                                                                                                                                        |      |
|                  | Dấu bằng xảy ra khi $x = 0$ hoặc $x = 1$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,25 |
|                  | Tương tự: $\frac{y^2}{1 + y^2} \leq \frac{y}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $y = 0$ hoặc $y = 1$ )<br>$\frac{z^2}{1 + z^2} \leq \frac{z}{2}$ (dấu bằng xảy ra khi $z = 0$ hoặc $z = 1$ )<br>$\Rightarrow \frac{x^2}{1 + x^2} + \frac{y^2}{1 + y^2} + \frac{z^2}{1 + z^2} \leq \frac{x + y + z}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow T \leq -2 + \frac{1}{2} = -\frac{3}{2}$ | 0,25 |
|                  | $T = -\frac{3}{2}$ khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$ hoặc $(x; y; z) = (0; 1; 0)$ hoặc $(x; y; z) = (0; 0; 1)$ .                                                                                                                                                                                                                                                    | 0,5  |
|                  | Vậy $\max T = -\frac{3}{2}$ khi $(x; y; z) = (1; 0; 0)$ hoặc $(x; y; z) = (0; 1; 0)$ hoặc $(x; y; z) = (0; 0; 1)$ .                                                                                                                                                                                                                                           | 0,25 |

----- HẾT -----

**Ghi chú:** Nếu học sinh có cách giải khác đúng thì Ban Giám khảo thảo luận và thống nhất thang điểm cho phù hợp với Hướng dẫn chấm.