

E. KỸ THUẬT SỬ DỤNG KHOẢNG CÁCH.

☛ Một số kiến thức cần nhớ.

☛ Bài tập vận dụng.

☛ **Bài** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hai điểm $M(1;4)$ và $N(6;2)$. Lập phương trình đường thẳng Δ đi qua N , biết khoảng cách từ M đến Δ bằng 5.

Định hướng:

-Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua N và có một vectơ pháp tuyến $n(a;b), n \neq 0$.

-Sử dụng công thức khoảng cách $d(M; \Delta) = 5$, đưa đến phương trình đẳng cấp bậc 2. Giải và chọn nghiệm.

Lời giải.

Giả sử vectơ $n(a;b), n \neq 0$ là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ .

Lúc đó phương trình đường thẳng Δ có dạng $ax + by = 6a + 2b$

$$\text{Lại có } d(M; \Delta) = 5 \Rightarrow \frac{|2b - 5a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 5 \Rightarrow 21b^2 + 20ab = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0 \\ 21b = -20a \end{cases}$$

+) Với $b = 0$, chọn $a = 1$ ta có phương trình đường thẳng $\Delta : x = 6$.

+) Với $21b = -20a$, chọn $a = 21 \Rightarrow b = -20$ ta có phương trình đường thẳng $\Delta : 21x - 20y = 86$.

Vậy $\Delta : x - 6 = 0$ hoặc $\Delta : 21x - 20y = 86$

☛ **Bài** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình thang cân ABCD có hai đáy AB, CD; hai đường chéo AC và BD vuông góc với nhau. Biết $A(0;3), B(3;4)$ và điểm C nằm trên trục hoành. Xác định tọa độ đỉnh D của hình thang ABCD.

Định hướng :

-Tham số hóa tọa độ điểm C theo c , viết phương trình AC, BD (còn chứa tham số c).

-Do ABCD là hình thang cân nên sử dụng $d_{(A;BD)} = d_{(B;AC)}$.

-Đưa đến phương trình bậc hai ẩn c. Giải tìm nghiệm c. Suy ra BD

-Viết phương trình CD. Suy ra D.

<http://VnTeach.Com> – Tài liệu dành cho giáo viên Việt Nam

Lời giải.

Giả sử $C(c;0)$, lúc đó:

- Phương trình đường thẳng $AC : 3x + cy - 3c = 0$.

- Phương trình đường thẳng $BD : cx - 3y - 3c + 12 = 0$

Do ABCD là hình thang cân, nên

$$d(A;BD) = d(B;AC) \Rightarrow \frac{|3 - 3c|}{\sqrt{c^2 + 9}} = \frac{|9 + c|}{\sqrt{c^2 + 9}} \Rightarrow \begin{cases} c = 6 \\ c = -\frac{3}{2} \end{cases}$$

+) Khi $c = 6$, ta có:

- Phương trình đường thẳng $BD : 2x - y - 2 = 0$

- Phương trình đường thẳng $CD : x - 3y = 6$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} 2x - y = 2 \\ x - 3y = 6 \end{cases} \Rightarrow D(0; -2)$.

+) Khi $c = -\frac{3}{2}$, ta có:

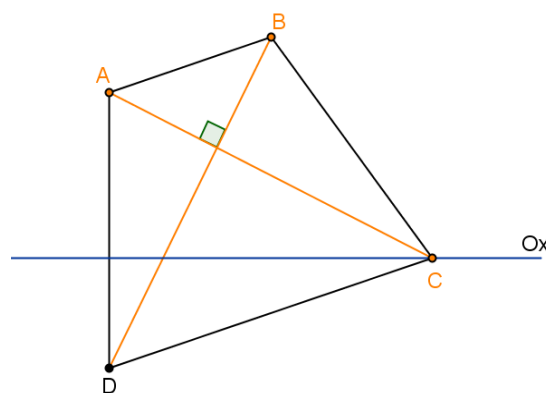
- Phương trình đường thẳng $BD : x + 2y - 11 = 0$

- Phương trình đường thẳng $CD : x - 3y = -\frac{3}{2}$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + 2y = 11 \\ x - 3y = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow D\left(6; \frac{5}{2}\right)$

Tứ giác ABCD là hình thang $\Leftrightarrow AB = kDC$ ($k > 0$) nên chỉ có $D(0; -2)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

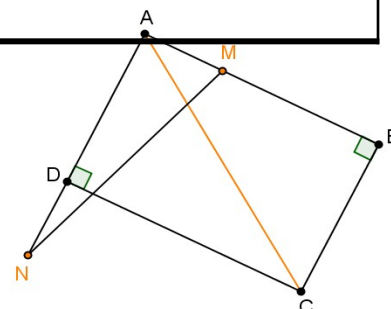
Vậy $\boxed{D(0; -2)}$ hoặc $\boxed{D\left(6; \frac{5}{2}\right)}$



Bài Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình chữ nhật ABCD có diện tích bằng 30 và hai điểm $M(1;4)$, $N(-4;-1)$ lần lượt nằm trên hai đường thẳng AB, AD. Phương trình đường chéo AC là $7x + 4y - 13 = 0$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD, biết hai điểm A và D đều có hoành độ âm.

Định hướng:

<http://VnTeach.Com> – Tài liệu dành cho giáo viên Việt Nam



-Tham số hóa tọa độ điểm A,C. Sử dụng $\vec{AM} \cdot \vec{AN} = 0 \Rightarrow A$.

-Viết phương trình AB,AD.

-Sử dụng diện tích hình chữ nhật $S_{ABCD} = d_{(C;AB)} \cdot d_{(C;AD)} = 30 \Rightarrow C$.

-Viết phương trình $CD \Rightarrow D$.

Lời giải:

Giả sử $A\left(a; \frac{13-7a}{4}\right), C\left(c; \frac{13-7c}{4}\right)$. Ta có

$$\vec{AN} \cdot \vec{AM} = 0 \Rightarrow 13a^2 - 10a - 23 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ a = \frac{23}{13} \text{ (loại)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{A(-1;5)}$$

Phương trình đường thẳng $AB: x + 2y = 9$

Phương trình đường thẳng $AD: 2x - y = -7$

$$\text{Lại có } S_{ABCD} = 30 \Rightarrow d(C;AD) \cdot d(C;AB) = 30 \Rightarrow (c+1)^2 = 16 \Rightarrow \begin{cases} c = 3 \\ c = -5 \end{cases}$$

+) Với $c = 3 \Rightarrow \boxed{C(3;-2)}$. Phương trình đường thẳng $CD: x + 2y = -1$

$$\text{Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + 2y = -1 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow \boxed{D(-3;1)}$$

$$\text{Phương trình đường thẳng } CB: 2x - y = 8. \text{ Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ } \begin{cases} 2x - y = 8 \\ x + 2y = 9 \end{cases} \Rightarrow \boxed{B(5;2)}$$

+) Với $c = -5 \Rightarrow C(-5;12)$. Phương trình đường thẳng $CD: x + 2y = 19$

$$\text{Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ } \begin{cases} x + 2y = 19 \\ 2x - y = -7 \end{cases} \Rightarrow D(1;9), \text{ loại.}$$

Vậy tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD là **$A(-1;5), B(5;2), C(3;-2), D(-3;1)$** .

❖ **Bài** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông ABCD. Các điểm $M(-2;2), N(4;2), P(3;-1), Q(0;-2)$ lần lượt thuộc các đường thẳng AB, BC, CD, DA . Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD.

Định hướng:

- Giả sử $\vec{n}(a;b), n \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB.

- Viết phương trình đường thẳng AB , AD (chứa tham số a, b).
- Sử dụng $d(P; AB) = d(N; AD)$, giải ra tìm nghiệm a, b .
- Suy ra phương trình đường thẳng chứa các cạnh, từ đó suy ra tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Lời giải.

Giả sử $n(a; b), n \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AB .

Lúc đó:

- Phương trình đường thẳng $AB: ax + by = -2a + 2b$

- Phương trình đường thẳng $AD: bx - ay = 2a$

$$\text{Ta có } d(P; AB) = d(N; AD) \Rightarrow \frac{|5a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|4b - 4a|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \begin{cases} 9a = 7b \\ a = -b \end{cases}$$

+) Với $a = -b$. Chọn $b = -1 \Rightarrow a = 1$. Cho ta phương trình các đường thẳng
 $AB: x - y = -4; AD: x + y = -2; BC: x + y = 6; CD: x - y = 4$

Suy ra tọa độ các đỉnh là $A(-3; 1), B(1; 5), C(5; 1), D(1; -3)$.

+) Với $9a = 7b$. Chọn $b = 9 \Rightarrow a = 7$. Cho ta phương trình các đường thẳng
 $AB: 7x + 9y = 4; AD: 9x - 7y = 14; BC: 9x - 7y = 22; CD: 7x + 9y = 12$. Suy ra tọa độ các đỉnh của hình
 vuông là $A\left(\frac{77}{65}; -\frac{31}{65}\right), B\left(\frac{113}{65}; -\frac{59}{65}\right), C\left(\frac{141}{65}; -\frac{23}{65}\right), D\left(\frac{21}{13}; \frac{1}{13}\right)$

Vậy $\boxed{A(-3; 1), B(1; 5), C(5; 1), D(1; -3)}$ hoặc $\boxed{A\left(\frac{77}{65}; -\frac{31}{65}\right), B\left(\frac{113}{65}; -\frac{59}{65}\right), C\left(\frac{141}{65}; -\frac{23}{65}\right), D\left(\frac{21}{13}; \frac{1}{13}\right)}$.

🔴 **Bài** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông $ABCD$ có phương trình đường thẳng chứa các cạnh AB và CD lần lượt là $4x - 3y - 4 = 0, 4x - 3y - 18 = 0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông $ABCD$, biết tâm I thuộc đường thẳng $\Delta: x + y - 1 = 0$

Định hướng:

-Tham số hóa tọa độ điểm I và sử dụng $d(I; AB) = d(I; CD) \Rightarrow I$

-Viết phương trình AD , suy ra tọa độ A, B, C, D

Lời giải.

Giả sử $I(m; 1 - m)$, ta có $d(I; AB) = d(I; DC) \Rightarrow \frac{|7m - 7|}{5} = \frac{|7m - 21|}{5} \Rightarrow m = 2 \Rightarrow I(2; -1)$

Phương trình đường thẳng AD có dạng $3x + 4y + c = 0$

$$\text{và } d(I; AD) = d(I; AB) \Rightarrow \frac{|2+c|}{5} = \frac{7}{5} \Rightarrow \begin{cases} c=5 \\ c=-9 \end{cases}$$

+) Với $c=5 \Rightarrow AD: 3x + 4y + 5 = 0$

- Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 4x - 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right)$;

Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y = -5 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right)$.

Suy ra tọa độ các điểm $C\left(\frac{99}{25}; -\frac{18}{25}\right), D\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right)$.

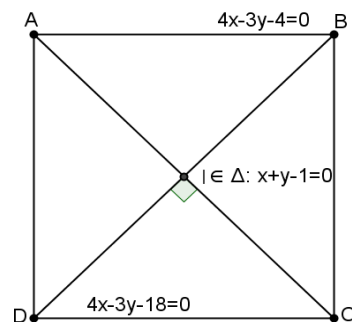
+) Với $c=-9 \Rightarrow AD: 3x + 4y - 9 = 0$

-Tọa độ điểm A là nghiệm của hệ $\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 4x - 3y = 4 \end{cases} \Rightarrow A\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right)$; Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ

$\begin{cases} 3x + 4y = 9 \\ 4x - 3y = 18 \end{cases} \Rightarrow B\left(\frac{99}{25}; -\frac{18}{25}\right)$. Suy ra tọa độ các điểm $C\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right), D\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right)$.

Vậy $A\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right), B\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right), C\left(\frac{99}{25}; -\frac{18}{25}\right), D\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right)$ hoặc

$A\left(\frac{43}{25}; \frac{24}{25}\right), B\left(\frac{99}{25}; -\frac{18}{25}\right), C\left(\frac{57}{25}; -\frac{74}{25}\right), D\left(\frac{1}{25}; -\frac{32}{25}\right)$.



Bài Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông ABCD. Gọi M là trung điểm của cạnh BC, N là điểm trên cạnh AC sao cho $AN = \frac{1}{4}AC$; điểm N thuộc đường thẳng $3x + y + 4 = 0$, phương trình đường thẳng $MD: x - 1 = 0$. Xác định tọa độ đỉnh A của hình vuông ABCD, biết khoảng cách từ A đến đường thẳng MD bằng 4 và điểm N có hoành độ âm.

Định hướng :

-Tham số hóa tọa độ điểm N , tính $d_{(N;MD)} = \frac{5}{8}d_{(A;MD)}$. Suy ra N .

-Tính $ND = \sqrt{2}d_{(N;MD)}$ nên các điểm D và M là giao của đường thẳng DM và đường tròn tâm N bán kính ND

Lời giải.

Lời giải.

Giả sử cạnh của hình vuông có độ dài bằng a . Khi đó

$$S_{AMN} = S_{ABCD} - (S_{ADN} + S_{CNM} + S_{BAM}) = \frac{5}{12}a^2; AN = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{9}} = \frac{a\sqrt{10}}{3}$$

$$\text{Từ } S_{AMN} = \frac{1}{2}d(M, AN) \cdot AN \Rightarrow d(M, AN) = \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{3\sqrt{5}}{2} \Rightarrow \boxed{a = 3\sqrt{2}}$$

$$\text{Suy ra } AM = \frac{a\sqrt{5}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$$

Giả sử $A(a; 2a - 3)$.

$$\text{Từ } AM = \frac{3\sqrt{10}}{2} \Rightarrow a^2 - 5a + 4 = 0 \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \rightarrow \boxed{A(1; -1)} \\ a = 4 \rightarrow \boxed{A(4; 5)} \end{cases}$$

Vậy $\boxed{A(1; -1)}$ hoặc $\boxed{A(4; 5)}$

🔴 **Bài** Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy , cho hình vuông ABCD có điểm $A(1; 3)$. Biết điểm $M(6; 4)$ thuộc cạnh BC và $N\left(\frac{17}{2}; \frac{9}{2}\right)$ thuộc đường thẳng DC. Tìm tọa độ các đỉnh B, C, D của hình vuông ABCD.

Định hướng:

- Giả sử $n(a; b), n \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AD,

viết phương trình đường thẳng AD, DC (chứa tham số a, b)

- Sử dụng $d(M, AD) = d(A, DC) \Rightarrow a, b$

- Viết phương trình đường thẳng chứa các cạnh, suy ra tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

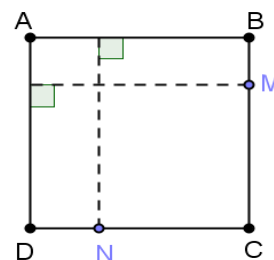
Lời giải.

Giả sử $n(a; b), n \neq 0$ là véc-tơ pháp tuyến của đường thẳng AD. Lúc đó

- Phương trình đường thẳng AD : $ax + by = a + 3b$

- Phương trình đường thẳng DC : $bx - ay = \frac{17b - 9a}{2}$

$$\text{Lại có } d(M, AD) = d(A, DC) \Rightarrow \frac{|5a + b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|3a - 15b|}{2\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow \begin{cases} a = b \\ 7a = -17b \end{cases}$$



+) Với $a = b$. Chọn $b = 1 \Rightarrow a = 1$

Lúc đó phương trình các đường thẳng $AB : x - y = -2$; $BC : x + y = 10$; $CD : x - y = 4$; $DA : x + y = 4$. Suy ra $B(4;6); C(7;3); D(4;0)$

+) Với $7a = -17b$. Chọn $b = -7 \Rightarrow a = 17$. Lúc đó phương trình các đường thẳng $AB : 7x + 17y = 58$; $BC : 17x - 7y = 74$;

$CD : 7x + 17y = 136$; $DA : 17x - 7y = -4$. Suy ra tọa độ các đỉnh còn lại của hình vuông là

$$B\left(\frac{64}{13}; \frac{18}{13}\right); C\left(\frac{85}{13}; \frac{69}{13}\right); D\left(\frac{34}{13}; \frac{90}{13}\right).$$

Kiểm tra điểm M nằm trên cạnh BC, nhận thấy cả hai trường hợp trên đều thỏa mãn yêu cầu.

Vậy $B(4;6); C(7;3); D(4;0)$ hoặc $B\left(\frac{64}{13}; \frac{18}{13}\right); C\left(\frac{85}{13}; \frac{69}{13}\right); D\left(\frac{34}{13}; \frac{90}{13}\right)$

❁ Bài 19. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 2. Phương trình của đường thẳng AB là $x - y = 0$. Điểm $M(2; 1)$ là trung điểm của cạnh BC. Tìm tọa độ trung điểm N của cạnh AC.

Định hướng:

Vì đường thẳng AB đã có phương trình, đã biết tọa độ trung điểm M của BC nên ta tính được khoảng cách từ M đến AB. Kết hợp với diện tích tam giác ABC ta suy ra độ dài AB. MN là đường trung bình của tam giác ABC nên MN bằng nửa AB. Viết được phương trình của MN. Từ đó suy ra tọa độ của N.

Lời giải.

$$\text{Ta có } d(M, AB) = \frac{|2 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Đường thẳng MN đi qua M và song song với AB nên có phương trình $1(x - 2) - 1(y - 1) = 0 \Leftrightarrow x - y - 1 = 0$.

Suy ra $N(a; a - 1)$.

$$\text{Vì M là trung điểm của BC nên } S_{ABM} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} d(M, AB) \cdot AB = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot MN = 1$$

$$\Leftrightarrow (a - 2)^2 + (a - 1 - 1)^2 = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ a = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N(3; 2) \\ N(1; 0) \end{cases}.$$

Câu 7. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có A(-4;0), trung điểm của cạnh BC là M(3; 1). Gọi E, F lần lượt là chân đường cao kẻ từ B, C của tam giác ABC. Biết đường thẳng EF có phương trình $x+1=0$. Viết phương trình đường thẳng BC.

Định hướng:

Vận dụng tính chất trung tuyến của tam giác vuông kẻ từ đỉnh góc vuông bằng nửa cạnh huyền ta chứng minh được $ME = MF$. Từ đó ta xác định được tọa độ trung điểm của EF là hình chiếu của M trên EF. Dự đoán và chứng minh được tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC. Từ đó suy ra tỉ lệ các trung tuyến bằng tỉ lệ các chiều cao tương ứng để xác định khoảng cách từ A đến BC. Tiếp theo ta viết đường thẳng BC qua M và cách A một khoảng AH.

Lời giải:

Gọi I là trung điểm của EF. Ta có $ME = MF = \frac{1}{2}BC$. Suy ra $MI \perp EF$.

Suy ra $MI: y-1=0$. Mà $I = MI \cap EF \Rightarrow I(-1;1)$

có $AI = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$; $AM = \sqrt{7^2 + 1^2} = \sqrt{50}$, $d(A, EF) = 3$.

Đường thẳng BC đi qua M nên có phương trình dạng $a(x-3) + b(y-1) = 0, (a^2 + b^2 > 0)$

Tứ giác BCEF nội tiếp (vì $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$) nên $\angle AEF = \angle ABC$ mà $\angle EAF = \angle BAC$ tam giác AEF đồng dạng với tam giác ABC. Suy ra

$$\frac{d(A, EF)}{d(A, BC)} = \frac{AI}{AM} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow d(A, BC) = 3\sqrt{5}.$$

$$\Leftrightarrow \frac{|7a+b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 3\sqrt{5} \Leftrightarrow 4a^2 + 14ab - 44b^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{11}{2}b \\ a = 2b \end{cases}$$

Với $a = -\frac{11}{2}b$. Chọn $a = 11, b = -2$ suy ra $BC: 11x - 2y - 31 = 0$.

Với $a = 2b$. Chọn $a = 2, b = 1$ suy ra $BC: 2x + y - 7 = 0$.

Bài 10. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn (T) có tâm $I\left(-\frac{3}{2}; 0\right)$ và (T) tiếp xúc với $\Delta: 4x + 2y - 19 = 0$. Đường phân giác trong của góc A là d: $x - y - 1 = 0$. Viết phương trình đường thẳng BC, biết diện tích tam giác ABC bằng 3 lần diện tích tam giác IBC và A có tung độ âm.

Định hướng:

Ta dễ dàng tính được bán kính R của (T) nhờ điều kiện tiếp xúc. Khi đó ta viết được phương trình của (T) nên ta xác định được tọa độ điểm A và điểm A' là giao điểm thứ hai của d và (T). Khi đó BC đi có vectơ pháp tuyến là IA' nên ta lấy phương trình AB phụ thuộc vào tham số c. Từ tỉ lệ diện tích của hai tam giác ABC và IBC ta tính được tỉ lệ khoảng cách giữa A và I tới BC. Từ đó xác định được c.

Lời giải.

(T) tiếp xúc với $\Delta: 4x + 2y - 19 = 0$ nên bán kính của (T) là $R = d(I, \Delta) = \frac{5\sqrt{5}}{2} \Rightarrow (T): \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{125}{4}$.

Gọi A' là giao điểm thứ 2 của d và (T). Tọa độ các điểm A và A' là nghiệm của hệ

$$\begin{cases} \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{125}{4} \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4, y = -5 \\ x = \frac{7}{2}, y = \frac{5}{2} \end{cases}. \text{ Kết hợp với A có tung độ âm ta được } A(-4; -5), A'\left(\frac{7}{2}; \frac{5}{2}\right).$$

Ta có d là phân giác trong của góc A nên A' là điểm chính giữa của cung BC suy ra $\vec{IA'} = \left(5; \frac{5}{2}\right)$ là vectơ pháp tuyến của BC. Suy ra BC: $2x + y + c = 0$.

$$\text{Mà } S_{ABC} = 3S_{IBC} \Leftrightarrow d(A; BC) = 3d(I; BC) \Leftrightarrow \frac{|2(-4) - 5 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = 3 \cdot \frac{|-3 + c|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} \Leftrightarrow \begin{cases} c = -2 \\ c = \frac{11}{2} \end{cases}.$$

Vậy BC: $2x + y - 2 = 0$ hoặc BC: $4x + 2y + 11 = 0$.

Bài 13. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có A(2; -1), B(1; -2), trọng tâm G nằm trên đường thẳng d: $x + y - 2 = 0$. Biết diện tích tam giác ABC bằng $\frac{27}{2}$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Định hướng:

G là trọng tâm của tam giác ABC, bài toán cho diện tích của tam giác ABC và ràng buộc G thuộc d, đường thẳng AB viết được phương trình nên ta sử dụng tỉ số diện tích của hai tam giác GAB và ABC. Từ đó tính được khoảng cách từ G đến AB. Suy ra tọa độ điểm G. Tiếp theo lấy tọa độ điểm C và viết phương trình của AC.

Lời giải.

Ta có $AB = \sqrt{2}$, AB đi qua A và B nên $\frac{x-2}{1-2} = \frac{y+1}{-2+1} \Leftrightarrow x - y - 3 = 0$. G thuộc d nên $G(m; 2 - m)$

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $S_{ABG} = \frac{1}{3}S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2}AB \cdot d(G; AB) = \frac{9}{2} \Leftrightarrow |m - 2 + m - 3| = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} m = -2 \\ m = 7 \end{cases}.$

Ta có $\begin{cases} x_C = 3x_G - x_A - x_B \\ y_C = 3y_G - y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 3x_G - 2 - 1 \\ y_C = 3y_G + 1 + 2 \end{cases}$ (vì G là trọng tâm tam giác ABC).

TH1 : $m = -2$. Suy ra $G(-2; 4) \Rightarrow C(-9; 15)$.

AC đi qua A và C nên có phương trình $\frac{x-2}{-9-2} = \frac{y+1}{15+1} \Leftrightarrow 16x + 11y - 21 = 0$.

TH2 : $m = 7$. Suy ra $G(7; -5) \Rightarrow C(18; -12)$.

AC đi qua A và C nên có phương trình $\frac{x-2}{18-2} = \frac{y+1}{-12+1} \Leftrightarrow 11x + 16y - 6 = 0$.

Bài 14. Trong mặt phẳng Oxy, cho tam giác ABC có diện tích bằng 2. Biết điểm A(1; 0), B(0; 2). Trung điểm I của cạnh AC thuộc đường thẳng d: $x - y = 0$. Viết phương trình đường thẳng AC.

Định hướng:

Tính ngay được độ dài AB, khoảng cách từ I đến AB (sử dụng diện tích). Từ đó xác định được tọa độ của I suy ra tọa độ của C. Tiếp theo viết phương trình AC qua A và C.

Lời giải.

$AB = \sqrt{5}$, AB đi qua A và B nên $\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-0}{2-0} \Leftrightarrow 2x + y - 2 = 0$. I thuộc d nên $I(a; a)$.

Vì I là trung điểm của AC nên $S_{ABI} = \frac{1}{2} S_{ABC} \Leftrightarrow \frac{1}{2} AB \cdot d(I; AB) = 1 \Leftrightarrow |2a + a - 2| = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{4}{3} \\ a = 0 \end{cases}$.

I là trung điểm của AC nên $\begin{cases} x_C = 2x_I - x_A \\ y_C = 2y_I - y_A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - 1 \\ y_C = 2y_I \end{cases}$

TH1 : $a = 0$. Suy ra $I(0; 0) \Rightarrow C(-1; 0)$.

Ta có $AC = (-2; 0) \Rightarrow AC : y = 0$

TH1 : $a = \frac{4}{3} \Rightarrow I\left(\frac{4}{3}; \frac{4}{3}\right) \Rightarrow C\left(\frac{5}{3}; \frac{8}{3}\right)$. Ta có $AC = \left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right) \Rightarrow AC : \frac{x-1}{2} = \frac{y-0}{8} \Leftrightarrow 4x - y - 4 = 0$.