|  |  |
| --- | --- |
| **SỞ GIÁO DỤC VÀ ĐÀO TẠO****PHÚ THỌ** **ĐỀ CHÍNH THỨC**  | **KỲ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10** **TRUNG HỌC PHỔ THÔNG CHUYÊN HÙNG VƯƠNG** **NĂM HỌC 2023-2024****Môn : Toán (**Dành cho chuyên Tin)Thời gian :150 phút  |

**Câu 1. (2, 0 điểm).**

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^{2}-2\left(m-1\right)x+m^{2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}, x\_{2}$ thỏa mãn $2\left|x\_{1}+x\_{2}\right|=\left|x\_{1}-x\_{2}\right|.$

b) Cho $x;y$ là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=\frac{3}{2x+y}.$ Tính giá trị của biểu thức *P* = $\frac{x^{2}}{y^{2}}+\frac{y^{2}}{x^{2}}$.

**Câu 2 (2,0 điểm)**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\left(x^{2}-x-1\right)\left(y^{2}+xy-9\right)=2x+1$

b) Cho $n$ là số nguyên dương lẻ sao cho $3^{n}+7^{n}$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^{n}+6^{n}+2023^{n}$ cho 11.

**Câu 3 (2,0 điểm)**

a) Giải hệ $\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{x-3y}=16-3x+9y (1)\\2\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}=5y+1 (2)\end{array}\right. (x;y\in R)$

**b)** Viết lên trên bảng 2023 số Mỗi bước ta xóa đi 2 số x,y bất kỳ trên bảng rồi viết lên bảng số (các số còn lại trên bảng giữ nguyên). Thực hiện liên tục thao tác trên cho đến khi trên bảng chỉ còn lại đúng 1 số. Hỏi số đó bằng bao nhiêu

**Câu 4 (3,0 điểm).**

Cho tam giác nhọn *ABC* với *AB < AC* nội tiếp đường tròn (*O; R*), các đường cao *AD; BE; CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *P* là giao điểm thứ hai của *AD* và (*O*).

*M* là điểm đối xứng với *P* qua *AB*.

a) Chứng minh tứ giác *AHBM* nội tiếp.

b) Qua *P* kẻ đường thẳng song song với *EF* cắt (*O*) tại *Q*.

Chứng minh *Q* đối xứng với *P* qua *OA*.

c) Gọi *K* là trung điểm của *EF*.

Chứng minh rằng đường thẳng *AK* và các tiếp tuyến của (*O*) tại *B; C* đồng quy.

**Câu 5.** Xét ba số $x;y;z\geq 2$ thỏa mãn $4xyz=9\left(x+y+z\right)+27$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức *Q* = $\frac{\sqrt{x^{2}-4}}{x}+\frac{\sqrt{y^{2}-4}}{y}+\frac{\sqrt{z^{2}-4}}{z}$

**Gợi ý Đề chuyên tin 2023 – 2024 chuyên Hùng Vương – Phú Thọ**

***Nhóm giáo viên Toán trường THCS Lâm Thao***

**Câu 1. (2, 0 điểm).**

a) Tìm tất cả các giá trị của tham số $m$ để phương trình $x^{2}-2\left(m-1\right)x+m^{2}-m=0$ có hai nghiệm phân biệt $x\_{1}, x\_{2}$ thỏa mãn $2\left|x\_{1}+x\_{2}\right|=\left|x\_{1}-x\_{2}\right|.$

b) Cho $x;y$ là các số thực thỏa mãn $\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=\frac{3}{2x+y}.$ Tính giá trị của biểu thức *P* = $\frac{x^{2}}{y^{2}}+\frac{y^{2}}{x^{2}}$.

Giải

a) Xét phương trình $x^{2}-2\left(m-1\right)x+m^{2}-m=0$ (1)

Ta có $∆^{'}=\left[-\left(m-1\right)\right]^{2}-1.\left(m^{2}-m\right)=m^{2}-2m+1-m^{2}+m=-m+1$

Vì phương trình (1) là phương trình bậc hai nên để PT (1) có hai nghiệm phân biệt $x\_{1};x\_{2}$ thì $∆^{'}>0$

$$⇔-m+1>0⇔m<1$$

Khi đó áp dụng định lí Vi ét ta có: $\left\{\begin{array}{c}x\_{1}+x\_{2}=2(m-1)\\x\_{1}x\_{2}=m^{2}-m \end{array}\right.$

Theo đề bài ta có: $2\left|x\_{1}+x\_{2}\right|=\left|x\_{1}-x\_{2}\right|$

$$⇔4\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}=\left(x\_{1}-x\_{2}\right)^{2}$$

$$⇔4\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}=\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}-4x\_{1}x\_{2}$$

$$⇔3\left(x\_{1}+x\_{2}\right)^{2}+4x\_{1}x\_{2}=0$$

$$⇒3\left[2\left(m-1\right)\right]^{2}+4\left(m^{2}-m\right)=0$$

$$⇔3\left(4m^{2}-8m+4\right)+4m^{2}-4m=0$$

$$⇔12m^{2}-24m+12+4m^{2}-4m=0$$

$$⇔16m^{2}-28m+12=0$$

$$⇔4m^{2}-7m+3=0$$

$$⇔\left(m-1\right).\left(4m-3\right)=0$$

$$⇔\left[\begin{array}{c}m-1=0\\4m-3=0\end{array}⇔\left[\begin{array}{c}m=1\\m=\frac{3}{4}\end{array}\right.\right.$$

Mà $m<1$ nên $m=$ $\frac{3}{4}$

b) Từ $\frac{1}{y}-\frac{2}{x}=\frac{3}{2x+y}$ (đk : $x\ne 0, y\ne 0;2x+y\ne 0)$

$$⇒\frac{x-2y}{xy}=\frac{3}{2x+y}⇔\left(x-2y\right)\left(2x+y\right)=3xy$$

$$⇔2x^{2}+xy-4xy-2y^{2}=3xy$$

$$⇔2\left(x^{2}-y^{2}\right)=6xy$$

$$⇔x^{2}-y^{2}=3xy$$

Suy ra *P* = $\frac{x^{2}}{y^{2}}+\frac{y^{2}}{x^{2}}=\frac{x^{4}+y^{4}}{x^{2}y^{2}}=\frac{\left(x^{2}-y^{2}\right)^{2}+4x^{2}y^{2}}{x^{2}y^{2}}=\frac{\left(3xy\right)^{2}+4x^{2}y^{2}}{x^{2}y^{2}}=\frac{13x^{2}y^{2}}{x^{2}y^{2}}$ = 13

**Câu 2 (2,0 điểm)**

a) Tìm tất cả các cặp số nguyên dương $\left(x;y\right)$ thỏa mãn $\left(x^{2}-x-1\right)\left(y^{2}+xy-9\right)=2x+1$

Vì $\left(x;y\right)$ nguyên dương nên từ điều kiện $2x+1\vdots x^{2}-x-1$

$$2x^{2}+x\vdots x^{2}-x-1$$

$$⇒2x^{2}-2x-2+3x+2\vdots x^{2}-x-1⇒3x+2\vdots x^{2}-x-1$$

Từ đó suy ra $\left\{\begin{array}{c}2x+1\vdots x^{2}-x-1\\3x+2\vdots x^{2}-x-1\end{array}\right.⇒\left\{\begin{array}{c}6x+3\vdots x^{2}-x-1\\6x+3\vdots x^{2}-x-1\end{array}⇒1\vdots x^{2}-x-1\right.$

Suy ra $\left[\begin{array}{c}x^{2}-x-1=1\\x^{2}-x-1=-1\end{array}\right.$

+) Với $x^{2}-x-1=1⇔x^{2}-x-2=0⇔\left(x-2\right)\left(x+1\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}x=2 \\x=-1 (loại)\end{array}\right.$

Từ $x=2⇒\left(y^{2}+2y-9\right)=5⇔\left(y+1\right)^{2}=15 $(loại)

+ Với $x^{2}-x-1=-1⇔x^{2}-x=0⇔x\left(x-1\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}x=1 \\x=0 (loại)\end{array}\right.$

Từ $x=1⇒-\left(y^{2}+y-9\right)=3⇔y^{2}+y-6=0⇔\left(y+3\right)\left(y-2\right)=0⇔\left[\begin{array}{c}y=-3 (loại)\\y=2 \end{array}\right.$

Vậy cặp số nguyên dương $(x;y)$ thỏa mãn $\left(x^{2}-x-1\right)\left(y^{2}+xy-9\right)=2x+1$ là $x;y)=\left(1;2\right).$

b) Cho $n$ là số nguyên dương lẻ sao cho $3^{n}+7^{n}$ chia hết cho 11. Tìm số dư khi chia $2^{n}+6^{n}+2023^{n}$ cho 11.

Ta có: $3^{n}+8^{n}+7^{n}+4^{n}\vdots 11$ (vì $n$ lẻ)

$$⇒4^{n}+8^{n}\vdots 11⇒4^{n}\left(1+2^{n}\right)\vdots 11⇒2^{n}+1\vdots 11$$

$$n=10k+5 (k\in N$$

Ta có $6^{n}=6^{10k+5}=\left(6^{10}\right)^{k}.6^{5}≡-1\left(mod11\right);2023^{n}≡-1\left(mod11\right)$

Suy ra $2^{n}+6^{n}+2023^{n}≡-3≡8\left(mod11\right)$

Vậy $2^{n}+6^{n}+2023^{n}≡8(mod11)$

**Câu 3 (2,0 điểm)**

a) Giải hệ $\left\{\begin{array}{c}2\sqrt{x-3y}=16-3x+9y (1)\\2\sqrt{x-3}+\sqrt{y+3}=5y+1 (2)\end{array}\right. (x;y\in R)$

Điều kiện : $\left\{\begin{array}{c}x\geq 3\\y\geq -3\\x\geq 3y\end{array}\right.$

Đặt $\sqrt{x-3y}=t\geq 0$ thay vào (1) ta được

$$2t=16-3t^{2}⇔9t^{2}+6t+1=49⇔\left(3t+1\right)^{2}=7^{2}⇔\left[\begin{array}{c}t=2 \\t=\frac{-8}{3} (loại)\end{array}\right.$$

Với $t=2⇒x-2y=4$ thay vào (2) ta được$2\sqrt{3y+1}+\sqrt{y+3}=5y+1 \left(3\right)$ ĐK $y\geq \frac{-1}{5}$

Suy ra $4y-2\sqrt{3y+1}+y+1-\sqrt{y+3}=0$

$$⇔\frac{16y^{2}-12y-4}{4y+2\sqrt{3y+1}}+\frac{y^{2}+y-2}{y+1+\sqrt{y+3}}=0$$

$$⇔\frac{4\left(4y+1\right)\left(y-1\right)}{4y+2\sqrt{3y+1}}+\frac{\left(y+2\right)\left(y-1\right)}{y+1+\sqrt{y+3}}=0$$

$$⇔\left(y-1\right)\left[\frac{4\left(4y+1\right)}{4y+2\sqrt{3y+1}}+\frac{\left(y+2\right)}{y+1+\sqrt{y+3}}\right]=0⇔y=1$$

(vì $y\geq \frac{-1}{5}$)

Từ $y=1⇒x=7$

Vậy nghiệm của hệ là $\left(x;y\right)=(7;1)$

b) Bằng phương pháp quy nạp ta sẽ chứng minh với cách xóa như vậy thì dãy $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};…;\frac{1}{n}$ còn lại số cuối cùng là $\frac{1}{\left(1+1\right).(+1.\left(3+1\right)…\left(n+1\right)-1}$ (\*)

Thật vậy

Với $n=2$ thì (\*) đúng.

Giả sử đúng với $n=k$ thì dãy còn lại số $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right)-1}$

Cần chứng minh (\*) đúng với $n=k+1$ tức là dãy còn lại số $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right).\left(k+2\right)-1}$

Từ giả thiết quy nạp dãy $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};…;\frac{1}{k};\frac{1}{k+1}$ với quy luật xóa thì còn lại số $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right)-1}$

Khi đó dãy $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};…;\frac{1}{k};\frac{1}{k+1}$ còn lại hai số $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right)-1};\frac{1}{k+1}$

Khi đó còn lại số $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right).\left(k+1\right)-\left(k+1\right)+\left(k+1\right)+\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right)-1}$

= $\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(k+1\right).\left(k+2\right)-1}$

Vậy (\*) đúng.

Khi đó dãy $\frac{1}{1};\frac{1}{2};\frac{1}{3};…;\frac{1}{2023}$ với cách xóa như vậy số cuối cùng còn lại của dãy là

$$\frac{1}{\left(1+1\right).\left(2+1\right).\left(3+1\right)…\left(2023+1\right)-1}=\frac{1}{2.3.4…2024-1}$$

**Câu 4 (3,0 điểm).**

Cho tam giác nhọn *ABC* với *AB < AC* nội tiếp đường tròn (*O; R*), các đường cao *AD; BE; CF* cắt nhau tại *H*. Gọi *P* là giao điểm thứ hai của *AD* và (*O*).

*M* là điểm đối xứng với *P* qua *AB*.

a) Chứng minh tứ giác *AHBM* nội tiếp.

b) Qua *P* kẻ đường thẳng song song với *EF* cắt (*O*) tại *Q*.

Chứng minh *Q* đối xứng với *P* qua *OA*.

c) Gọi *K* là trung điểm của *EF*.

Chứng minh rằng đường thẳng *AK* và các tiếp tuyến của (*O*) tại *B; C* đồng quy.



a) Ta có tứ giác $CDHE$ nội tiếp $⇒\hat{DCE}+\hat{DHE}=180^{0}$

 $\hat{APB}=\hat{ACB}$ (cùng chắn cung AB)

 $\hat{APB}=\hat{AMB}$ (tính chất đối xứng)

 $\hat{AHB}=\hat{EHD}$ (đối đỉnh) $⇒\hat{AMB}+\hat{AHB}=180^{0}$ . Vậy tứ giác $AHBM$ nội tiếp

b) Ta có tứ giác $BFEC$ nội tiếp $⇒\hat{FBC}=\hat{AEF}=\hat{ATC}⇒\hat{ACT}=\hat{AZE}=90^{0}$

Mà $PQ//FE$ suy ra $Q$ đối xứng với $P$ qua $OA$

c) Tiếp tuyến $B$ và $C$ cắt nhau tại $L$, $AL$ cắt đường tròn tại $J$. Dễ có $LB^{2}=LS.LA=LS.LO$

Suy ra tứ giác $AJSO⇒\hat{JSL}=\hat{XSL}⇒\hat{ASC}=\hat{ABJ};\hat{AJB}=\hat{ACS}⇒∆ABJ⋕∆ASC$ (g.g)

Mà $∆ABC⋕∆AEF$ (g.g). Giả sử $AJ$ cắt $FE$ tại $K'$ $⇒∆FAK'⋕∆ABS$ (g.g)

Vì $S$ là trung điểm $BC$ $⇒K'$ là trung điểm $FE⇒K≡K'$. Vậy tiếp tuyến tại $B, C$ và $AK$ đồng quy.

**Câu 5. (1,0 điểm)** Xét ba số $x;y;z\geq 2$ thỏa mãn $4xyz=9\left(x+y+z\right)+27$

Tìm giá trị lớn nhất của biểu thức *Q* = $\frac{\sqrt{x^{2}-4}}{x}+\frac{\sqrt{y^{2}-4}}{y}+\frac{\sqrt{z^{2}-4}}{z}$

Giải. Ta có $\sqrt{5}Q$ = $\frac{\sqrt{5(x-2)(x\\_+2}}{x}+\frac{\sqrt{5(y-2)(y+2)}}{y}+\frac{\sqrt{5(z-2)(z+2)}}{z}$

$\sqrt{5}Q\leq $ $\frac{5\left(x-2\right)+x+2}{2x}+\frac{5\left(y-2\right)+y+2}{2y}+\frac{5\left(z-2\right)+z+2}{2z}$

 $⇔\sqrt{5}Q\leq $ $\frac{6x-8}{2x}+\frac{6y-8}{2y}+\frac{6z-8}{2z}$ = 9 – 4$1\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$

Từ $4xyz=9\left(x+y+z\right)+27⇔$ 4 = 9$\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}\right)+\frac{27}{xyz}$ $\leq $ 3$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{2}+\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)^{3}$

Đặt $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=t$

Ta có

$$t^{3}+3t^{2}-4\geq 0⇔t^{3}-t^{2}+4t^{2}-4t+4t-4\geq 0$$

$$⇔\left(t-1\right)\left(t-2\right)^{2}\geq 0$$

$$⇔t\geq 1$$

Suy ra $\sqrt{5}Q\leq 9-4.1=5⇔Q\leq \sqrt{5}$

Vậy $MaxQ=\sqrt{5}⇔\left\{\begin{array}{c}x,y,z\geq 2;4xyz=9\left(x+y+z\right)+27 \\5\left(x-2\right)=x+2;5\left(y-2\right)=y+2;5\left(z-2\right)=z+2\\\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=1 \end{array}\right.$

$$⇔x=y=z=3$$

……….Hết……….