

SBD:.....

Thời gian làm bài: 150 phút (không kể thời gian giao đề)

Đề có 01 trang gồm 5 câu

Câu 1 (2,0 điểm).

Cho biểu thức
$$P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{8\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - x - 3}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right)$$
 (với $x \geq 0, x \neq 1$).

a) Rút gọn biểu thức P .b) Tìm tất cả các số thực x để P nhận giá trị nguyên.

Câu 2 (2,0 điểm).

a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $|x_1 - x_2| > \sqrt{3}$.

b) Giải phương trình $8\sqrt{5x+1} + 6\sqrt{2x+3} = 7x + 29$.

Câu 3 (1,0 điểm).

Cho ba số thực $x, y, z \in [5; 7]$. Chứng minh rằng

$$\sqrt{xy+1} + \sqrt{yz+1} + \sqrt{zx+1} > x + y + z.$$

Câu 4 (1,5 điểm).

Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n^2 - 2n - 7$ và $n^2 - 2n + 12$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.

Câu 5 (3,5 điểm).

Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AE . Gọi D là một điểm bất kì trên cung $\widehat{BE}$ không chứa điểm A (D khác B và E). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng BC, CA và AB .

a) Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng.b) Chứng minh $\frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{BC}{DH}$.

c) Gọi P là trực tâm của $\triangle ABC$, chứng minh đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn thẳng DP .

.....Hết.....

HƯỚNG DẪN CHẤM
ĐỀ THI TUYỂN SINH VÀO LỚP 10 THPT
NĂM HỌC 2021 - 2022
Khóa ngày 08/6/2021
Môn: TOÁN (CHUYÊN)

(Hướng dẫn chấm gồm có 05 trang)

Yêu cầu chung

* *Đáp án chỉ trình bày một lời giải cho mỗi câu. Trong bài làm của học sinh yêu cầu phải lập luận logic chặt chẽ, đầy đủ, chi tiết rõ ràng.*

* *Trong mỗi câu, nếu học sinh giải sai ở bước giải trước thì cho điểm 0 đối với những bước sau có liên quan.*

* *Điểm thành phần của mỗi câu được phân chia đến 0,25 điểm. Đối với điểm là 0,5 điểm thì tùy tổ giám khảo thống nhất để chiết thành từng 0,25 điểm.*

* *Đối với Câu 5, học sinh không vẽ hình thì cho điểm 0. Trường hợp học sinh có vẽ hình, nếu vẽ sai ở ý nào thì điểm 0 ở ý đó.*

* *Học sinh có lời giải khác đáp án (nếu đúng) vẫn cho điểm tối đa tùy theo mức điểm từng câu.*

* *Điểm của toàn bài là tổng (không làm tròn số) của điểm tất cả các câu.*

Câu	Nội dung	Điểm
1	Cho biểu thức $P = \left(\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} - \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} - \frac{8\sqrt{x}}{x - 1} \right) : \left(\frac{\sqrt{x} - x - 3}{x - 1} - \frac{1}{\sqrt{x} - 1} \right)$ (với $x \geq 0, x \neq 1$). a) Rút gọn biểu thức P. b) Tìm tất cả các số thực x để P nhận giá trị nguyên.	2,0 điểm
a	Ta có: $P = \frac{(\sqrt{x} + 1)^2 - (\sqrt{x} - 1)^2 - 8\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} : \frac{\sqrt{x} - x - 3 - (\sqrt{x} + 1)}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}$	0,5
	$= \frac{-4\sqrt{x}}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} \cdot \frac{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)}{-x - 4} = \frac{4\sqrt{x}}{x + 4}.$ Vậy $P = \frac{4\sqrt{x}}{x + 4}.$	0,5
b	Vì $x \geq 0, x \neq 1$ nên $P = \frac{4\sqrt{x}}{x + 4} \geq 0.$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Ta có: $1 - P = 1 - \frac{4\sqrt{x}}{x+4} = \frac{x - 4\sqrt{x} + 4}{x+4} = \frac{(\sqrt{x} - 2)^2}{x+4} \geq 0$ suy ra $P \leq 1$.	0,25
	Do đó $0 \leq P \leq 1$ mà $P \in \mathbb{Z}$ nên $P = 0$ hoặc $P = 1$.	0,25
	Với $P = 0$ thì $x = 0$ (thỏa mãn). Với $P = 1$ thì $\sqrt{x} - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn). Vậy $x = 0; x = 4$ thì P nhận giá trị nguyên.	0,25
2	a) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = 2mx - m + 1$ (với m là tham số). Tìm tất cả các giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt có hoành độ x_1, x_2 thỏa mãn $x_1 - x_2 > \sqrt{3}$. b) Giải phương trình: $8\sqrt{5x+1} + 6\sqrt{2x+3} = 7x + 29$.	2,0 điểm
	Xét phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (P): $x^2 = 2mx - m + 1 \Leftrightarrow x^2 - 2mx + m - 1 = 0 \quad (1)$ Ta thấy $\Delta' = m^2 - m + 1 = \left(m - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$, với mọi $m \in \mathbb{R}$. Suy ra phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$. Do đó đường thẳng (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt với mọi $m \in \mathbb{R}$.	0,25
a	Ta có x_1, x_2 là hai nghiệm của phương trình (1) $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m \\ x_1 \cdot x_2 = m - 1 \end{cases}$ Áp dụng định lí Vi-ét ta được	0,25
	Ta có $x_1 - x_2 > \sqrt{3} \Leftrightarrow (x_1 - x_2)^2 > 3 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 - 3 > 0$.	0,25
	$\Leftrightarrow 4m^2 - 4m + 1 > 0 \Leftrightarrow (2m - 1)^2 > 0 \Leftrightarrow m \neq \frac{1}{2}$. Vậy $m \neq \frac{1}{2}$ thì (d) và (P) cắt nhau tại hai điểm phân biệt có hoành độ $x_1; x_2$ thỏa mãn $x_1 - x_2 > \sqrt{3}$.	0,25
b	Điều kiện: $x \geq -\frac{1}{5}$. Ta có: $8\sqrt{5x+1} + 6\sqrt{2x+3} = 7x + 29$.	0,5

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Leftrightarrow (5x+1-8\sqrt{5x+1}+16)+(2x+3-6\sqrt{2x+3}+9)=0$ $\Leftrightarrow (\sqrt{5x+1}-4)^2+(\sqrt{2x+3}-3)^2=0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5x+1}-4=0 \\ \sqrt{2x+3}-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=3$ (thỏa mãn). Vậy phương trình có nghiệm $x=3$.	0,5
3	Cho ba số thực $x, y, z \in [5;7]$. Chứng minh rằng $\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1} > x+y+z.$	1,0 điểm
	Do $x, y \in [5;7] \Rightarrow x-y \leq 2 \Leftrightarrow (x-y)^2 \leq 4$ $\Leftrightarrow x^2 - 2xy + y^2 \leq 4 \Leftrightarrow (x+y)^2 \leq 4(xy+1) \Leftrightarrow x+y \leq 2\sqrt{xy+1}$ Chứng minh tương tự ta có: $y+z \leq 2\sqrt{yz+1}; z+x \leq 2\sqrt{zx+1}$	0,25
	Cộng vế theo vế các bất đẳng thức trên, ta có $2(x+y+z) \leq 2(\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1})$ $\Leftrightarrow \sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1} \geq x+y+z$	0,25
	$\begin{cases} x-y =2 \\ y-z =2 \\ z-x =2 \end{cases} \quad (1)$ Dấu bằng xảy ra khi Vì $x \neq y \neq z$ nên giả sử $x > y > z$. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ y-z=2 \\ x-z=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=2 \\ x-z=4 \\ x-z=2 \end{cases}$ Ta có (vô nghiệm) Vậy $\sqrt{xy+1}+\sqrt{yz+1}+\sqrt{zx+1} > x+y+z$.	0,25
4	Tìm tất cả các số nguyên dương n sao cho hai số $n^2 - 2n - 7$ và $n^2 - 2n + 12$ đều là lập phương của hai số nguyên dương nào đó.	1,5 điểm
	Đặt $n^2 - 2n - 7 = a^3; n^2 - 2n + 12 = b^3$ (với $a, b \in \mathbb{N}^*$) Dễ thấy $a < b$	0,25
	Ta có $b^3 - a^3 = (n^2 - 2n + 12) - (n^2 - 2n - 7) = 19$ $\Leftrightarrow (b-a)(b^2 + ab + a^2) = 19$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	Vì $a, b \in \mathbb{N}^*$, $b > a$, $b^2 + ab + a^2 > b - a$ và 19 là số nguyên tố nên $\begin{cases} b - a = 1 \\ b^2 + ab + a^2 = 19 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases} (TM) \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} (L) \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$	0,5
	$\Rightarrow n^2 - 2n - 15 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -3 (L) \\ n = 5 (TM) \end{cases} \Leftrightarrow n = 5$ Vậy $n = 5$ là giá trị cần tìm.	0,5
5	Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O) đường kính AE. Gọi D là một điểm bất kì trên cung $\widehat{BE}$ không chứa điểm A (D khác B và E). Gọi H, I, K lần lượt là hình chiếu vuông góc của D lên các đường thẳng BC, CA và AB. a) Chứng minh ba điểm H, I, K thẳng hàng. b) Chứng minh $\frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{BC}{DH}$. c) Gọi P là trực tâm của $\triangle ABC$, chứng minh đường thẳng HK đi qua trung điểm của đoạn thẳng DP.	3,5 điểm
	Hình vẽ	

Câu	Nội dung	Điểm
a	Tứ giác $BKDH$ nội tiếp $\Rightarrow \angle KBD = \angle KHD$ (1). Tứ giác $ABDC$ nội tiếp $\Rightarrow \angle KBD = \angle ACD$ (2) (cùng bù với $\angle ABD$)	0,25
	Từ (1), (2) $\Rightarrow \angle KHD = \angle ICD$ (3). Lại có tứ giác $CIHD$ nội tiếp $\Rightarrow \angle IHD + \angle ICD = 180^\circ$ (4).	0,5
	Từ (3), (4) suy ra $\angle IHD + \angle DHK = 180^\circ$ $\Rightarrow K, I, H$ thẳng hàng.	0,25
b	$\triangle AKD \sim \triangle CHD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{AK}{KD} = \frac{CH}{HD} \Rightarrow \frac{AB + BK}{KD} = \frac{CH}{HD}$ $\Rightarrow \frac{CH}{HD} = \frac{AB}{KD} + \frac{BK}{KD}$ (5)	0,5
	$\triangle BDH \sim \triangle ADI$ (g.g) $\Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{AI}{DI} = \frac{AC - IC}{DI} \Rightarrow \frac{BH}{DH} = \frac{AC}{DI} - \frac{IC}{DI}$ (6)	0,5
	$\triangle ICD \sim \triangle KBD$ (g.g) $\Rightarrow \frac{IC}{ID} = \frac{KB}{KD}$ (7)	0,25
	Từ (5), (6) và (7) suy ra $\frac{CH}{HD} + \frac{BH}{DH} = \frac{AB}{KD} + \frac{AC}{DI}$. Vậy $\frac{AC}{DI} + \frac{AB}{DK} = \frac{BC}{DH}$.	0,25
c	Đường thẳng AP cắt (O) tại Q và đường thẳng DH cắt (O) tại S. Ta có $\angle SAC = \angle SDC$ (cùng chắn CS) Tứ giác $CDHI$ nội tiếp $\Rightarrow \angle HDC = \angle HIA \Rightarrow \angle SAC = \angle HIA$ Suy ra đường thẳng AS song song với đường thẳng HK.	0,25
	Ta có $AQ \parallel DS$ (cùng vuông góc với BC) $\Rightarrow AQDS$ là hình thang, nội tiếp đường tròn (O) $\Rightarrow AQDS$ là hình thang cân $\Rightarrow \angle QDS = \angle ASD$.	0,25
	Qua P vẽ $PR \parallel AS \Rightarrow \angle ASD = \angle PRD$ (đồng vị) Suy ra $\angle PRD = \angle QDR \Rightarrow PQDR$ là hình thang cân	
	Ta thấy $BC \perp PQ$ tại trung điểm PQ, suy ra BC là trục đối xứng của hình thang cân $\Rightarrow HD = HR$.	0,25
	Xét $\triangle DPR$ có $HD = HR$ và $HK \parallel PR$	0,25

Câu	Nội dung	Điểm
	$\Rightarrow HK$ đi qua trung điểm của DP .	

----- HẾT -----