

**Câu 1. ( 5.0 điểm)**

a. Xét hàm số  $f(x) = \frac{1}{5}x^5 + \frac{m-6}{4}x^4 - (2m+1)x^3 + 9x^2 + 2023$  với  $m$  là tham số.

Tìm tất các giá trị của  $m$  sao cho tổng độ dài của các khoảng nghịch biến của hàm số  $f(x)$  trên  $(-\infty; +\infty)$  bằng 2.

b. Cho hàm số  $y = f(x)$  có đạo hàm  $f'(x) = (x+1)^2(x-3)$ . Tìm các điểm cực trị của hàm số  $g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$ .

**Câu 2.(6.0 điểm)**

a. Cho  $(H)$  là đa giác đều gồm 20 đỉnh  $A_1A_2...A_{20}$ . Chọn ngẫu nhiên một tam giác có các đỉnh là ba trong số 20 đỉnh của  $(H)$ . Tính xác suất để tam giác được chọn có cạnh là các đường chéo của  $(H)$ .

b. Giải phương trình  $x^3 + 10 = x^2 + 7x + (x-1)(\sqrt{x-1}-1)(x+5\sqrt{x-1})$

**Câu 3. (2.0 điểm).** Cho  $x, y, z$  là các số thực dương thỏa mãn  $x + y + z = 3$ . Chứng minh rằng  $\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz$ .

**Câu 4. (3.0 điểm).** Cho tam giác đều  $ABC$  có cạnh bằng 2. Trên đường thẳng  $d$  đi qua  $A$  và vuông góc với mặt phẳng  $(ABC)$  lấy điểm  $M$  sao cho  $AM = x, (x > 0)$ . Gọi  $E, F$  lần lượt là hình chiếu vuông góc của  $C$  lên  $AB, MB$ . Đường thẳng qua hai điểm  $E$  và  $F$  cắt  $d$  tại  $N$ . Xác định  $x$  để khối tứ diện  $BCMN$  có thể tích nhỏ nhất.

**Câu 5. (4.0 điểm).** Cho hình hộp chữ nhật  $ABCD.A'B'C'D'$  biết  $AB = a; AD = 3a; AA' = 2a$ . Trên tia đối của tia  $C'C$  lấy điểm  $E$  sao cho  $CE = 3C'E$ . Một đường thẳng  $d$  đi qua  $E$  và cắt các đường thẳng  $AD, BD'$  lần lượt tại  $M, N$ . Tính độ dài đoạn thẳng  $ME$

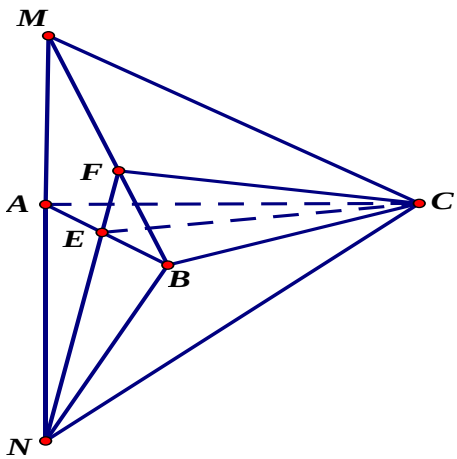
-----Hết-----

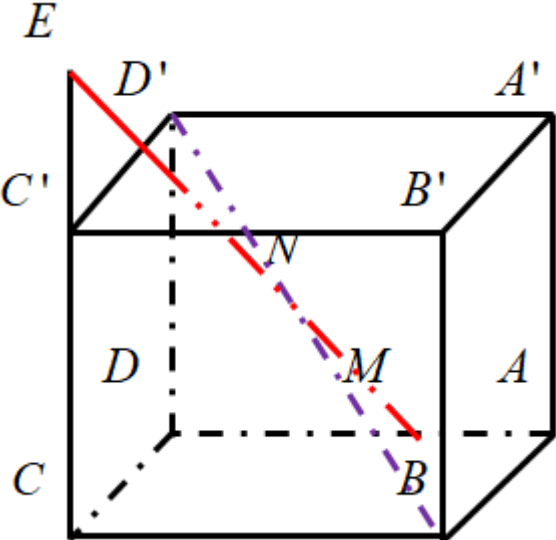
Thí sinh không được sử dụng tài liệu. Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm

Họ và tên thí sinh.....; Số báo danh:.....

| Câu       | Nội dung                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | Điểm         |
|-----------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <b>1a</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>2.5 đ</b> |
|           | <p>Ta có</p> $f'(x) = x^4 + (m-6)x^3 - 3(2m+1)x^2 + 18x$ $= x(x-6)(x^2 + mx - 3).$                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | <b>0.5</b>   |
|           | Khi đó $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0, x = 6$ và $x^2 + mx - 3 = 0$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | <b>0.25</b>  |
|           | Ta thấy phương trình $x^2 + mx - 3 = 0$ luôn có hai nghiệm trái dấu là $x_1 < 0 < x_2$ thỏa mãn $x_1 + x_2 = -m$ và $x_1 x_2 = -3$ .                                                                                                                                                                                                                                                           | <b>0.25</b>  |
|           | <p>TH1: Nếu <math>0 &lt; x_2 &lt; 6</math> thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên <math>(x_1; 0)</math> và <math>(x_2; 6)</math>. Tổng độ dài hai khoảng này là <math> 0 - x_1  +  6 - x_2  = 6 - (x_1 + x_2) = 6 + m</math> nên <math>m + 6 = 2</math> hay <math>m = -4</math>. Thử lại ta có <math>x_2 = 2 + \sqrt{7} &lt; 6</math>, thỏa mãn.</p>                | <b>0.5</b>   |
|           | <p>TH2: Nếu <math>x_2 &gt; 6</math> thì bằng cách vẽ bảng biến thiên, ta thấy hàm số nghịch biến trên <math>(x_1; 0)</math> và <math>(6; x_2)</math>. Tổng độ dài hai khoảng này là</p> $ 0 - x_1  +  6 - x_2  = x_2 - x_1 - 6$ <p>nên <math>x_2 - x_1 = 8</math>. Bình phương lên, ta được</p> $(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2 = 64 \text{ hay } m^2 + 12 = 64 \Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{13}.$ | <b>0.5</b>   |
|           | <p>Với <math>m = 2\sqrt{13}</math> thì ta tính được <math>x_2 = 4 - \sqrt{13} &lt; 6</math>, không thỏa mãn.</p> <p>Với <math>m = -2\sqrt{13}</math> thì ta tính được <math>x_2 = 4 + \sqrt{13} &gt; 6</math>, thỏa mãn.</p>                                                                                                                                                                   | <b>0.25</b>  |
|           | Vậy tất cả các giá trị cần tìm của $m$ là $-4$ và $-2\sqrt{13}$ .                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | <b>0.25</b>  |
| <b>1b</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | <b>2.5 đ</b> |
|           | <p>Ta có: <math>g(x) = f(\sqrt{x^2 + 2x + 6})</math></p> $\Rightarrow g'(x) = \frac{2x+2}{2\sqrt{x^2 + 2x + 6}} f'(\sqrt{x^2 + 2x + 6})$                                                                                                                                                                                                                                                       | <b>0.5</b>   |
|           | $= \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x + 6}} (\sqrt{x^2 + 2x + 6} + 1)^2 (\sqrt{x^2 + 2x + 6} - 3)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | <b>0.5</b>   |
|           | Cho $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 = 0 \\ (\sqrt{x^2 + 2x + 6} + 1)^2 (\sqrt{x^2 + 2x + 6} - 3) = 0 \end{cases}$                                                                                                                                                                                                                                                                 | <b>0.5</b>   |
|           | $\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x + 6 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x^2 + 2x - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \\ x = -3 \end{cases}$                                                                                                                                                                                | <b>0.5</b>   |
|           | Ta thấy $g'(x)$ đổi dấu khi $x$ đi qua ba nghiệm trên                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | <b>0.5</b>   |

|            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |              |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
|            | Vậy hàm số $g(x)$ có 3 điểm cực trị là $x = -3; x = -1; x = 1$                                                                                                                                                                                                                                                                     |              |
| <b>2a.</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>3đ</b>    |
|            | Số tam giác có 3 đỉnh là 3 trong số 20 đỉnh của đa giác đã cho là $C_{20}^3 = 1140$ (tam giác).                                                                                                                                                                                                                                    | <b>0.5</b>   |
|            | Ta thấy không có tam giác nào trong số các tam giác trên mà cả 3 cạnh đều là cạnh của đa giác.<br>Ta đi tính số tam giác có một cạnh hoặc hai cạnh là cạnh của đa giác ( $H$ ).<br>Đếm số tam giác có 2 cạnh là cạnh của đa giác: Rõ ràng hai cạnh đó sẽ tương ứng với 1 đỉnh của đa giác nên số tam giác loại này là 20 tam giác. | <b>0.5</b>   |
|            | Đếm số tam giác có đúng một cạnh là cạnh của đa giác:<br>Bước 1: Chọn cạnh của đa giác làm cạnh của tam giác: Có 20 cách.                                                                                                                                                                                                          | <b>0.5</b>   |
|            | Bước 2: Chọn một đỉnh còn lại của đa giác làm đỉnh của tam giác (không phải 2 đầu mút của cạnh đã chọn và 2 đỉnh liền kề với 2 đầu mút đó): có $20 - 4 = 16$ đỉnh.<br>Số tam giác loại này là $20 \cdot 16 = 320$ (tam giác).                                                                                                      | <b>0.5</b>   |
|            | Vậy số tam giác mà các cạnh của nó là các đường chéo của ( $H$ ) là<br>$1140 - 20 - 320 = 800$ (tam giác).                                                                                                                                                                                                                         | <b>0.5</b>   |
|            | Vậy xác suất để tam giác được chọn có các cạnh là các đường chéo của ( $H$ ) là<br>$\frac{800}{1140} = \frac{40}{57}$ .                                                                                                                                                                                                            | <b>0.5</b>   |
| <b>2b</b>  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | <b>3.0 đ</b> |
|            | ĐK: $x \geq 1$ .<br>Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^3 - x^2 - 7x + 10 = (x-1)(\sqrt{x-1}-1)(x+5\sqrt{x-1})$<br>$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-5) = (x-1)(\sqrt{x-1}-1)(x+5\sqrt{x-1})$<br>$\Leftrightarrow (x-2)(x^2+x-5)(\sqrt{x-1}+1) = (x-1)(x-2)(x+5\sqrt{x-1})$                                                          | <b>0.5</b>   |
|            | $\Leftrightarrow (x-2) \left[ (x^2+x-5)(\sqrt{x-1}+1) - (x-1)(x+5\sqrt{x-1}) \right] = 0$<br>$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2(tm) \\ (x^2+x-5)(\sqrt{x-1}+1) - (x-1)(x+5\sqrt{x-1}) = 0 \end{cases}$                                                                                                                           | <b>0.5</b>   |
|            | Xét $(x^2+x-5)(\sqrt{x-1}+1) = (x-1)(x+5\sqrt{x-1}); x > 1$<br>$\Leftrightarrow \frac{x^2+x-5}{x-1} = \frac{x+5\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}+1}$                                                                                                                                                                                          | <b>0.5</b>   |
|            | $\Leftrightarrow \frac{(x-2)^2+5(x-2)+1}{(x-2)+1} = \frac{(x-1)+5\sqrt{x-1}+1}{\sqrt{x-1}+1} \quad (2)$                                                                                                                                                                                                                            | <b>0.5</b>   |
|            | Xét hàm số $f(t) = \frac{t^2+5t+1}{t+1}, t > -1 \Rightarrow f'(t) = 1 + \frac{3}{(t+1)^2} > 0$ nên hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(-1; +\infty)$ .<br>Do đó, $(2) \Leftrightarrow f(x-2) = f(\sqrt{x-1}) \Leftrightarrow x-2 = \sqrt{x-1}$                                                                                   | <b>0.5</b>   |
|            | $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2 \geq 0 \\ (x-2)^2 = x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 2 \\ x^2-5x+5=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$<br>Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm phân biệt $x = 2; x = \frac{5+\sqrt{5}}{2}$                                                               | <b>0.5</b>   |
| <b>3</b>   | $\frac{x(y+z)}{4-yz} + \frac{y(z+x)}{4-zx} + \frac{z(x+y)}{4-xy} \geq 2xyz \quad (1)$                                                                                                                                                                                                                                              | <b>2 đ</b>   |

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|---|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|   | $(1) \Leftrightarrow \frac{y+z}{yz(4-yz)} + \frac{z+x}{zx(4-zx)} + \frac{x+y}{xy(4-xy)} \geq 2 \quad (2)$                                                                                                                                                                                                                                  | 0.5 |
|   | Ta có : $\frac{y+z}{yz(4-yz)} \geq \frac{2\sqrt{yz}}{yz(4-yz)} = \frac{2}{\sqrt{yz}(4-yz)}$                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5 |
|   | Đặt $t = \sqrt{yz}$ , $0 < t < \frac{3}{2}$<br>Ta có : $\frac{1}{4t-t^3} \geq \frac{-t+4}{9} \Leftrightarrow 9 \geq -4t^2 + t^4 + 16t - 4t^3$<br>$\Leftrightarrow (t-1)^2(t^2-2t-9) \leq 0 \quad \forall t \in \left(0; \frac{3}{2}\right)$<br>Suy ra : $\frac{y+z}{yz(4-yz)} \geq \frac{2}{\sqrt{yz}(4-yz)} \geq \frac{-2\sqrt{yz}+8}{9}$ | 0.5 |
|   | Chứng minh tương tự ta có :<br>$\frac{z+x}{zx(4-zx)} \geq \frac{-2\sqrt{zx}+8}{9}$ ; $\frac{x+y}{xy(4-xy)} \geq \frac{-2\sqrt{xy}+8}{9}$<br>Từ đó suy ra : $VT(2) \geq \frac{-2(\sqrt{xy} + \sqrt{yz} + \sqrt{zx}) + 24}{9} \geq \frac{-2(x+y+z) + 24}{9} = 2.$                                                                            | 0.5 |
| 4 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 3đ  |
|   |                                                                                                                                                                                                                                                          |     |
|   | Ta có $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp EC$ , kết hợp $EC \perp AB \Rightarrow EC \perp MB$                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5 |
|   | $\begin{cases} MB \perp FC \\ MB \perp EC \end{cases} \Rightarrow MB \perp EF.$                                                                                                                                                                                                                                                            | 0,5 |
|   | Ta có $\triangle NAE \sim \triangle BAM \Rightarrow \frac{NA}{BA} = \frac{AE}{AM} \Rightarrow AM \cdot AN = AE \cdot BA = 2.$                                                                                                                                                                                                              | 0,5 |
|   | $V_{BCMN} = \frac{1}{3} \cdot S_{\triangle ABC} \cdot (AM + AN) = \frac{1}{3} \cdot \frac{2^2 \sqrt{3}}{4} \cdot (AM + AN) \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{AM \cdot AN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}.$                                                                                                                                       | 0,5 |
|   | $V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3} \Leftrightarrow AM = AN.$                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0,5 |
|   | Vậy $\min V_{BCMN} = \frac{2\sqrt{6}}{3}$ khi $AM = AN = \sqrt{2}$ hay $x = \sqrt{2}.$                                                                                                                                                                                                                                                     | 0,5 |
| 5 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 4đ  |
|   | $M \in AD \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = x \overrightarrow{AD}$                                                                                                                                                                                                                                                                     | 0.5 |

|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |     |
|--|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
|  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|  | $N \in BD' \Leftrightarrow \overrightarrow{BN} = y\overrightarrow{BD'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = y(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BB'})$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = (1-y)\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AA'}$ $E \in CC': \overrightarrow{CE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CC'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$ $\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}$ | 0.5 |
|  | <p>Ta có <math>\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + (1-x)\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}</math></p> <p><math>\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = (1-y)\overrightarrow{AB} + (y-x)\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AA'}</math></p>                                                                                                                                                                                                                                                             | 0.5 |
|  | <p>Các điểm <math>M; N; E</math> thẳng hàng <math>\Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = t\overrightarrow{ME}</math></p> $\Leftrightarrow (1-y)\overrightarrow{AB} + (y-x)\overrightarrow{AD} + y\overrightarrow{AA'} = t\overrightarrow{AB} + t(1-x)\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}t\overrightarrow{AA'}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5 |
|  | $\Leftrightarrow (1-y-t)\overrightarrow{AB} + (y-x-t+tx)\overrightarrow{AD} + \left(y - \frac{3}{2}t\right)\overrightarrow{AA'} = \vec{0}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0.5 |
|  | $\Leftrightarrow \begin{cases} 1-y-t=0 \\ y-x-t+tx=0 \\ y-\frac{3}{2}t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=\frac{2}{5} \\ x=\frac{1}{3}; y=\frac{3}{5} \end{cases} \text{ vì các vecto } \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AA'} \text{ không đồng phẳng}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 0.5 |
|  | <p>Ta có <math>\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}</math>, các vecto <math>\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AA'}</math> đôi một vuông góc</p>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 0.5 |
|  | $ME^2 = \overrightarrow{ME}^2 = \left[\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AA'}\right]^2 = \overrightarrow{AB}^2 + \frac{4}{9}\overrightarrow{AD}^2 + \frac{9}{4}\overrightarrow{AA'}^2 = AB^2 + \frac{4}{9}AD^2 + \frac{9}{4}AA'^2$ $= 14a^2 \Rightarrow ME = a\sqrt{14}$                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 0.5 |