

Câu 1 (7,0 điểm).

a) Cho hàm số $y = x^3 - (2m - 1)x^2 + (2 - m)x + 3m - 4$ (m là tham số). Tìm m để hàm số đồng biến trên $[-1; +\infty)$.

b) Giải hệ phương trình sau:
$$\begin{cases} xy(xy-1)^2 + x^2y^2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 1 & (1) \\ x(2 + y\sqrt{x^2y^2 + 2}) + (xy + 1)\sqrt{x^2 + 4x + 6} = -3 & (2) \end{cases}$$

Câu 2 (4,0 điểm).

a) Lớp 12A1 có $2n+3$ học sinh (n nguyên dương), gồm Hà, Mạnh, Khôi và $2n$ học sinh khác. Xếp tùy ý $2n+3$ học sinh trên ngòai vào một dãy ghế được đánh số từ 1 đến $2n+3$, mỗi học sinh ngòai một ghế. Giả sử Hà, Mạnh, Khôi được sắp xếp ngòai vào các ghế được đánh số lần lượt là x, y, z và gọi p là xác suất để x, y, z theo thứ tự lập thành một cấp số cộng. Biết $p = \frac{12}{575}$, tìm số học sinh của lớp đó.

b) Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm liên tục trên $\mathbb{R}$ và bảng xét dấu đạo hàm

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có tất cả bao nhiêu điểm cực đại?

Câu 3 (1,5 điểm).

Một công ty bất động sản có 50 căn hộ cho thuê. Biết rằng nếu cho thuê mỗi căn hộ với giá 2000.000 đồng mỗi tháng thì mọi căn hộ đều có người thuê và cứ mỗi lần tăng giá cho thuê mỗi căn hộ 100.000 đồng mỗi tháng thì có thể 2 căn hộ bị bỏ trống. Muốn có thu nhập cao nhất, công ty đó phải cho thuê với giá mỗi căn hộ là bao nhiêu?

Câu 4 (6,0 điểm).

a. Cho lăng trụ $ABC.A'B'C'$. Gọi H, K, lần lượt là hình chiếu vuông góc của A' lên hai cạnh bên BB', CC'. I là hình chiếu vuông góc của C' lên BB'. Biết $A'H = 2\sqrt{2}$, $A'K = 1$, $C'I = 3$, M là trung điểm B'C', (A'AM) và (B'MA) vuông góc với (ABC), đường trung tuyến kẻ từ A của tam giác ABC có độ dài bằng $\sqrt{3}$. Tính góc giữa (ABC) và (A'HK) và thể tích của khối lăng trụ đã cho.

b. Cho hình chóp S. ABCD có đáy là hình bình hành, mặt phẳng (P) thay đổi cắt SA, SB, SC, SD lần lượt tại A', B', C', D' thỏa mãn $\frac{SA}{SA'} + \frac{SB}{SB'} + \frac{SC}{SC'} + \frac{SD}{SD'} = 8$. Xác định vị trí của (P) để thể tích khối chóp S. A'B'C'D' nhỏ nhất? Lớn nhất?

Câu 5 (1,5 điểm). Cho các số thực dương a, b, c. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức

$$M = \frac{3a^4 + 3b^4 + 25c^3 + 2}{(a+b+c)^3}.$$

..... **Hết**

Họ và tên thí sinh.....

Số báo danh.....

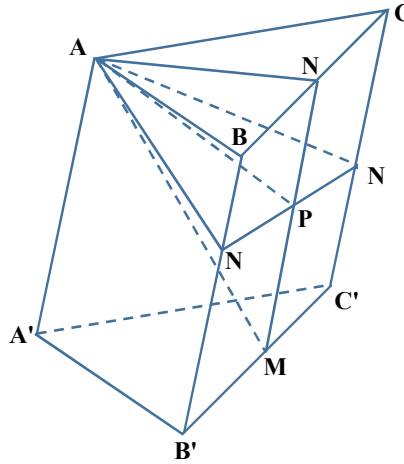
Lưu ý: Học sinh không được phép sử dụng máy tính bỏ túi.

ĐÁP ÁN-BIỂU ĐIỂM

Câu	Nội dung	Điểm
1a	+) Ta có: $y' = 3x^2 - 2(2m-1)x + 2 - m, \forall x \in R$ +) Hàm số đồng biến trên $[-1; +\infty)$ khi và chỉ khi $y' \geq 0$ với mọi $x \in [-1; +\infty)$ và $y' = 0$ tại hữu hạn điểm. +) Vì y' là một tam thức bậc hai có $\Delta' = (2m-1)^2 - 3(2-m) = 4m^2 - m - 5$ * TH1: $\Delta' \leq 0$ hay $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$ thì $y' \geq 0, \forall x \in R$ nên thỏa mãn yêu cầu * TH2: $\Delta' > 0$ thì $y' = 0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1, x_2 khi đó để $y' \geq 0$ với mọi $x \in [-1; +\infty)$ thì $x_1 < x_2 \leq -1$ hay m thỏa mãn: $\begin{cases} \Delta' > 0 \\ (x_1 + 1)(x_2 + 1) \geq 0 \\ x_1 + 1 + x_2 + 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4m^2 - m - 5 > 0 \\ 3m + 3 \geq 0 \\ 4m + 4 < 0 \end{cases} : \text{ Vô nghiệm}$ +) Vậy $-1 \leq m \leq \frac{5}{4}$	
1b	+) (1) $\Leftrightarrow xy[(xy-1)^2 + xy] = (x+1)(x^2 + x + 1) \Leftrightarrow xy[(xy)^2 - xy + 1] = (x+1)(x^2 + x + 1)$ $\Leftrightarrow xy[(xy)^2 - xy + 1] = (x+1)[(x+1)^2 - (x+1) + 1]$ $\Leftrightarrow (xy)^3 - (xy)^2 + (xy) = (x+1)^3 - (x+1)^2 + (x+1) (*)$ +) Xét hàm số $f(t) = t^3 - t^2 + t$, ta có $f'(t) = 3t^2 - 2t + 1 > 0, \forall t \in R$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên R. Do đó $(*) \Leftrightarrow f(xy) = f(x+1) \Leftrightarrow xy = x+1$ +) Thay $xy = x+1$ vào phương trình (2) ta có phương trình: $2x + (x+1)\sqrt{(x+1)^2 + 2} + (x+1+1)\sqrt{x^2 + 4x + 6} + 3 = 0$ $\Leftrightarrow 2x + (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 3} + (x+2)\sqrt{x^2 + 4x + 6} + 3 = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{x^2 + 2x + 3} + 1) + (x+2)(\sqrt{x^2 + 4x + 6} + 1) = 0$ $\Leftrightarrow (x+1)(\sqrt{(x+1)^2 + 2} + 1) = (-x-2)(\sqrt{(-x-2)^2 + 2} + 1) (3)$ +) Xét hàm số $g(t) = t(\sqrt{t^2 + 2} + 1)$, ta có $g'(t) = \sqrt{t^2 + 2} + 1 + \frac{t^2}{\sqrt{t^2 + 2}} > 0, \forall t \in R$ nên hàm $g(t)$ đồng biến trên R. Do đó $(3) \Leftrightarrow g(x+1) = g(-x-2) \Leftrightarrow x+1 = -x-2 \Leftrightarrow x = \frac{-3}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{3}$ Vậy hệ phương trình có một nghiệm $(x; y)$ là $(\frac{-3}{2}; \frac{1}{3})$	

2a	Số phần tử không gian mẫu là số cách xếp $(2n+3)$ học sinh vào ghế. Khi đó $n(\Omega) = (2n+3)!$. Gọi T là biến cố: “Hà, Mạnh, Khôi được sắp xếp ngồi vào các ghế được đánh số lần lượt là x, y, z sao cho $y = \frac{x+z}{2}$”. Suy ra $x+z$ chia hết cho 2. Khi đó, bài toán trở thành: xếp Hà và Khôi vào 2 chỗ x và z thỏa mãn tổng $x+z$ là số chẵn (khi đó $y = \frac{x+z}{2}$ là duy nhất nên sẽ có duy nhất một cách xếp cho Mạnh. Ta có 2 trường hợp sau: Trường hợp 1: x, z cùng lẻ. Do từ 1 đến $2n+3$ có $n+2$ số lẻ, nên trường hợp này có $A_{n+2}^n \cdot (2n)!$ cách xếp. Trường hợp 2: x, z cùng chẵn. Do từ 1 đến $2n+3$ có $n+1$ số chẵn, nên trường hợp này có $A_{n+1}^2 \cdot (2n)!$ cách xếp. Khi đó số phần tử của biến cố T là: $n(T) = (A_{n+2}^n + A_{n+1}^2) \cdot (2n)!$. Theo bài ra ta có: $p = \frac{n(T)}{n(\Omega)} = \frac{(A_{n+2}^n + A_{n+1}^2) \cdot (2n)!}{(2n+3)!} = \frac{12}{575} (*)$. Ta có: $(*) \Leftrightarrow \frac{(n+1)(n+2)+n(n+1)}{(2n+1)(2n+2)(2n+3)} = \frac{12}{575} \Leftrightarrow \frac{n+2+n}{2(2n+1)(2n+3)} = \frac{12}{575}$ (do $n+1 > 0$). $\Leftrightarrow 48n^2 - 479n - 539 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} n = 11 & (\text{thỏa mãn}) \\ n = -\frac{49}{48} & (\text{loại}) \end{cases}$ Vậy $n=11$ thỏa mãn yêu cầu đề bài.	
2b	Có $y' = -(12x^3 - 24x) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x^5 - 12x^3 - 24x$ $= -12x(x^2 - 2) \cdot f'(-x^4 + 4x^2 - 6) + 12x(x^4 - x^2 - 2)$ $= -12x(x^2 - 2) \cdot (f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1)).$ Khi đó $y' = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) - (x^2 + 1) = 0 \\ x^2 - 2 = 0 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \pm\sqrt{2} \\ f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1 \end{cases}.$ Ta có $-x^4 + 4x^2 - 6 = -(x^2 - 2)^2 - 2 \leq -2, \forall x \in \mathbb{R}$. Do đó $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) \leq f'(-2) = 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Mà $x^2 + 1 \geq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.	

	Do đó phương trình $f'(-x^4 + 4x^2 - 6) = x^2 + 1$ vô nghiệm. Hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có bảng xét dấu đạo hàm như sau <table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\sqrt{2}$</td><td>0</td><td>$\sqrt{2}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td></td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> Vậy hàm số $y = 3f(-x^4 + 4x^2 - 6) + 2x^6 - 3x^4 - 12x^2$ có 1 điểm cực đại.	x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$	y'		-	0	+	0	-	0	+	
x	$-\infty$	$-\sqrt{2}$	0	$\sqrt{2}$	$+\infty$												
y'		-	0	+	0	-	0	+									
	+) Số căn hộ cho thuê mỗi tháng ứng với số tiền cho thuê; $50 - m(x - 2000.000)x = 2.000.000$ thì số căn hộ được thuê là 50. +) Nếu số tiền cho thuê tăng lên là $x = 2.100.000$ thì có 2 căn hộ để trống, nghĩa là có 48 người thuê. Ta có: $50 - m(2.100.000 - 2.000.000) = 48 \Leftrightarrow m = \frac{1}{50000}.$ +) Gọi x là giá cho thuê thực tế của mỗi căn hộ, (x – đồng; $x \geq 2000.000$ đồng). Số căn hộ cho thuê được ứng với giá cho thuê: $50 - \frac{1}{50000}(x - 2000000) = -\frac{1}{50.000}x + 90, (1).$ +) Gọi $F(x)$ là hàm lợi nhuận thu được khi cho thuê các căn hộ, ($F(x)$: đồng). Ta có $F(x) = \left(-\frac{1}{50.000}x + 90\right)x = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x.$ +) Bài toán trở thành tìm giá trị lớn nhất của $F(x) = -\frac{1}{50.000}x^2 + 90x$ với điều kiện $x \geq 2000.000.$ 3 $F'(x) = -\frac{1}{25.000}x + 90.$ $F'(x) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{25.000}x + 90 = 0 \Leftrightarrow x = 2.250.000.$ Ta lập bảng biến thiên: <table><tr><td>x</td><td>2000.000</td><td>2.250.000</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$F'(x)$</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr><tr><td>$F(x)$</td><td colspan="3"></td></tr></table> Suy ra $F(x)$ đạt giá trị lớn nhất khi $x = 2.250.000.$ +) Vậy công ty phải cho thuê với giá 2.250.000 đồng mỗi căn hộ thì được lãi lớn nhất.	x	2000.000	2.250.000	$+\infty$	$F'(x)$	+	0	-	$F(x)$							
x	2000.000	2.250.000	$+\infty$														
$F'(x)$	+	0	-														
$F(x)$																	
4.a																	



Ta có:

*Kẻ $AE \perp BB'$; $AF \perp CC'$

$\Rightarrow HM \parallel A'H, AF \parallel A'K$

$\Rightarrow AE = 2\sqrt{2}, AF = 1$

* $AE \perp AA'$ (Do $BB' \parallel AA'$)
 $AF \perp AA'$ (Do $CC' \parallel AA'$) $\rightarrow AA' \perp (AEF)$ chứa EF nên

$AF \perp AA'$ hay $EF \perp BB', EF = C'I = 3$. Gọi N trung điểm BC thì $MN \parallel AA'$,
 $P = MN \cap EF$, P trung điểm EF.

* $\triangle AEF$ có $AE^2 + AF^2 = EF^2$ nên vuông tại A, $AP \perp MN$, $AP = \frac{3}{2}$

* Do $MN \perp (ABF) \parallel (A'HK)$

$AM \perp (ABC)$ (do (AMB') , $(A'M)$ cùng vuông góc (ABC)) $\rightarrow$ Góc giữa
 $(A'HK)$ và (ABC) là góc $\widehat{AMN}$ ($AM \perp AN$)

Xét $\triangle AMN$ vuông tại A có đường cao AP: $\frac{1}{AP^2} = \frac{1}{AM^2} + \frac{1}{AN^2} \rightarrow AM = 3$

$\sin \widehat{PMA} = \frac{AP}{AM} = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{1}{2} \Rightarrow \widehat{NMA} = 30^\circ$ hay góc giữa $(A'HK)$ và (ABC) bằng 30°

* Hình chiếu vuông góc của $\triangle ABC$ lên (AEF) là $\triangle AEF$ nên ta có:

$dt(\triangle AEF) = dt(\triangle ABC) \cdot \cos \widehat{AMN} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AF = dt(\triangle ABC) \cdot \cos 30^\circ$

$\Rightarrow dt(\triangle ABC) = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3}, V_{ABC.A'B'C'} = AM \cdot dt(\triangle ABC) = 3 \cdot \frac{2\sqrt{6}}{3} = 2\sqrt{6}$

4.b

+) Đặt $\frac{SA}{SA'} = x, \frac{SB}{SB'} = y, \frac{SC}{SC'} = z, \frac{SD}{SD'} = t (x, y, z, t \in [1; +\infty))$

+) O là giao điểm của AC và BD, O' là giao điểm của SO và (P), khi đó A', O', C' thẳng hàng và B', C', O' thẳng hàng

$\frac{SA}{SA'} + \frac{SC}{SC'} = 2 \frac{SO}{SO'}, \frac{SB}{SB'} + \frac{SD}{SD'} = 2 \frac{SO}{SO'}$, mà $x+y+z+t=8$ nên $\frac{SO}{SO'} = 2$ hay O' là trung điểm của SO. Do đó $x+z=4, y+t=4$

+) V_1 là thể tích của $S.A'B'C'D'$, V là thể tích $S.ABCD$, ta có:

$2 \frac{V_1}{V} = \frac{V(S.A'B'C')}{V(S.ABC)} + \frac{V(S.A'D'C')}{V(S.ADC)} = \frac{1}{x(4-x)} \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{4-y} \right) = \frac{4}{x(4-x)y(4-y)}$

+) Áp dụng BĐT Cô si ta có $x(4-x) \leq \left(\frac{x+4-x}{2}\right)^2 = 4, y(4-y) \leq \left(\frac{y+4-y}{2}\right)^2 = 4$

Do đó $\frac{V_1}{V} \geq \frac{1}{8} \Rightarrow V_1 \geq \frac{1}{8}V$, dấu bằng xảy ra khi $x=y=z=t=2$ hay (P) qua trung điểm SO và song song với (ABCD).

+) $\forall x, y, z, t \geq 1, x+z=y+t=4 \Rightarrow x, y, z, t \in [1;3]$

+) $\Rightarrow x(4-x) = (x-1)(3-x) + 3 \geq 3; y(4-y) \geq 3$

nên $\frac{V_1}{V} \leq \frac{2}{9} \Rightarrow V_1 \leq \frac{2}{9}V$, dấu = xảy ra khi x, y, z, t thuộc $\{1;3\}$ hay (P) chứa 1 cạnh của hình chóp S.ABCD và qua O'.

- Áp dụng BĐT Cauchy ta có: $2a^4 + (a^4 + 1) \geq 2a^4 + 2a^2 \geq 4a^3$ hay $3a^4 + 1 \geq 4a^3$. Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = 1$

- Tương tự $3b^4 + 1 \geq 4b^3$ Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow b = 1$

$$\text{Vậy : } M \geq \frac{4a^3 + 4b^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có } (a-b)^2(a+b) &\geq 0 \Rightarrow 3(a+b)(a^2 - ab + b^2) \geq 3ab(a+b) \\ &\Rightarrow 3(a^3 + b^3) \geq 3ab(a+b) \Rightarrow 4(a^3 + b^3) \geq (a+b)^3 \end{aligned}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a = b$

$$\Rightarrow M \geq \frac{(a+b)^3 + 25c^3}{(a+b+c)^3} = \left(\frac{a+b}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3 = \left(1 - \frac{c}{a+b+c}\right)^3 + 25\left(\frac{c}{a+b+c}\right)^3$$

5 Đặt $t = \frac{c}{a+b+c}$ ($0 < t < 1$). Xét hàm số $f(t) = (1-t)^3 + 25t^3$ ($0 < t < 1$)

$$\text{Ta có: } f'(t) = -3\left[(1-t)^2 - (5t)^2\right] = -3(-24t^2 - 2t + 1), f'(t) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{6} \in (0;1) \\ t = -\frac{1}{4} \notin (0;1) \end{cases}$$

Bảng biến thiên

t	$-\infty$	0	$\frac{1}{6}$	1	$+\infty$
$f'(t)$		-	0	+	
$f(t)$			$\frac{25}{36}$		

$$\text{Vậy } \min_{(0;1)} f(t) = f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \text{ hay } \min M = \frac{25}{36} \text{ khi } a = b = 1, c = \frac{2}{5}.$$